プロの研究者はどうやって研究をおこなっているのか

吉永正彦
◎北海道大学大学院理学研究院

ある研究の始まりから一段落まで

個人的な話で恐縮だが，まず，ある研究の開始から一段落までの一連の流れを述べてみたい．

問題はルート系 Φ と正の整数 $m > 0$ に対して決まる m-次の Linial 配置と呼ばれる超平面配置 $\mathcal{A}_\Phi^{[1,m]}$ の特性多項式 $\chi(t)$ の零点分布に関するものだ．1997 年に公表されたプレプリント (2000 年に出版) で，Postnikov と Stanley は方程式 $\chi(t) = 0$ の零点が複素平面内で，実部 $= \dfrac{mh}{2}$ の直線上に並んでいることを予想した (h は Φ のコクセター数)．ここまでに現れた用語の解説はしないが，とにかく高次の方程式の解が実部一定の直線上に並んでいるという不思議な性質が観察されていたわけである．ルート系は A, B, C, D, E, F, G 型に分類されており，A, B, C, D, G については上記のプレプリントと直後の Athanasiadis の仕事で証明されていた．私がこの問題を知ったのは大学院生時代の 2002 年頃だったと思われる．その頃はこの問題に関する仕事は見られなくなっていた．残りが E 型, F 型のだけだったからあまり興味を惹かれなくなっていたのかもしれない．しかしルート系に関する話は，分類を使わない理解が望ましいので満足できる状態ではない．いくつかの状況証拠から，この問題は指導教員の斎藤恭司先生の理論と関係して解けるのでは，という予感があった．とは言え，長期的にいつかは解けたら良いな，と気にしつつも 10 年以上特に何もしなかった (関連する研究はいくらかしたが，問題自体の進展はなかった).

2014 年の 10 月，筆者は集中講義のために一週間東京に滞在しており, 空き時間に, 講義で取り上げる予定だっ

た Athanasiadis の (上の予想とは関係ない別の) 論文の内容をどのように紹介しようかと考えながら，散歩していた．突然, その論文のアイデアを一般化して，一年前の 2013 年 9 月に参加した研究集会中の立ち話で大阪大学の村井聡さんから教えてもらっていた Ehrhart 理論と，さらに以前論文で勉強していた紙屋-竹村-寺尾の特性準多項式の概念を組み合わせて, 上記の予想にアタックできるのではないか，という感覚が襲ってきた．

その後，特性多項式 $\chi(t)$ を Ehrhart 多項式を使って記述する計算をしてみると, 何か意味のありげな数列がでてきた．OEIS [1)]に放り込んでみると，オイラー多項式の係数をあるやり方で変換したものであることが分かった．しかしルート系ごとにその変換の仕方が異なっており，まだ全体像が描けない，と悩んでいた 2014 年 12 月に京都の研究集会で斎藤先生と話す機会があり「ルート系に対して決まるこういう数列知りませんか?」と尋ねてみた.「とりあえずこういう方針で書きなおしてみては?」という提案を受けて，計算をして，家に帰ってルート系に詳しい本を開いてみると，まさにそれが載ってるページが見つかった.「最高ルートを単純ルートの和で表した際の係数だ !! 」これがきっかけで，自分に必要だったものが Lam-Postnikov の「一般化オイラー多項式」であることが分かり，論文としてまとめ，年明け 2015 年 1 月にプレプリントを公表，専門誌へ投稿した (その後 2016 年 1 月にアクセプトされた)．この論文の時点では，まだ予想の少し弱い場合しかできていなかったのだが，その

1) Online Encyclopedia of Integer Sequences というサイトがあり，整数列の一部を入れると「その数列は登録されている○○列と一致します」と教えてくれる．

後の研究で m が十分大きい場合に予想が成立することが示されたので,「残り有限個」となったこともあり，個人的には一段落と思っている．

問題を見つける

研究にはじまりがあるとすれば，問題を持った時点であろう．問題の見つけかたはいろいろある．各分野の未解決問題をまとめた論文やサーベイなどがあるので，それを見るというのは一つの手である．明示的に「これが問題です」と書かれていなくても，他人の論文を読んだり研究発表を聞いて「別の場合はどうなんだろう？」と，ちょっとした疑問を抱くこともあり，この「ひっかかり」が研究テーマとなることもある．それとは別に，既に多くの人が研究している大予想の一部であったり,「予想が正しいとすればこういうことが成り立っているはずだ」というような，予想を補強する事実の証明を目指すこともある.「予想」というほどハッキリとは定式化されていなくても,「大体このような機構で統制されているはず」という見解 (構想とか哲学とか言われる) に基づいて，解けるはずの「問題」を探すこともある．特に意図もなく試みていた実験的な計算結果から，問題がハッキリと現れることもある．

今すぐに取り組むべきか？

問題があったとしても，何でもかんでもそれにアタックするわけではない．解き始める前に既に誰かが扱っていないか，先行結果を調べることになる．大抵の問題は，かなり難しいか，もしくは既に誰かが扱っている．

運よく先行研究がなかったとしても，それが今すぐに本気で取り組むべき問題かどうかの判断は難しい.「問題」にもいろいろな種類があって，費やされる時間で大雑把に分けると,「いつ解けるか分からないがそのうち解きたい長期的な問題」「とりあえずこれができれば論文として発表できそうな問題」「すぐにでも証明したい補題・命題」などである．

研究者が今この瞬間に焦点をあてる問題は，当然，手

持ちの知識で解ける問題であることが望ましい[2)]．しかし過去の数学者のエピソードを紐解けば，この「手頃な問題かどうか」を判断するのは大変難しいことが分かる．例えばリーマン (1826-1866) は，有名なリーマン予想に関して「すぐにできるはずだが，証明は保留」との判断を下していた．このようにリーマン予想を甘く見る傾向はリーマンにとどまらず，後の世代，例えばヒルベルト (1862-1943) ですら,「$2^{\sqrt{2}}$ が超越数となることの証明は，リーマン予想やフェルマー予想より難しいだろう」というようなことを言っていたとのことである (実際は，$2^{\sqrt{2}}$ の超越性は 1929 年に解決．リーマン予想は提示から 150 年以上たった今も未解決)．上の逸話が示していることは，問題の難易度の判断は，一流の数学者にとっても難しい判断なのだということである．

問題を解き始める

問題が定まれば，あとはそれの解決を必死に目指すのである．先行結果を探すことと重なるところが多いが，まずは使えそうな既存の結果を探す．専門家に「こういう問題に使えそうな結果ないですか？」と直接聞くこともあるし，Google 等で検索してみることもある．

今では，インターネットで検索するのは，普通に研究のプロセスの一部となっているが，十数年前に筆者が研究を始めた頃は, まだそれほど当たり前ではなかったように思う．当時 (2000 年頃) は，まだ「コンピュータを使った検索だけでそれほど重要な情報にはたどり着けないだろう．結局その道のプロに聞く方が速くて正確なはずだ」という雰囲気であったように思う．2003 年だったと思うが，Google でたまたま検索したキーワードで，その後の自分の研究に決定的に重要な役割を果たす論文がヒットした．エキスパートに頼らずとも，それまで縁がなかったテーマの重要な情報にアクセスできたことに強い印象を受けた.「その道のプロに聞く方が速くて正確」

2) 必ずそうでなければならないというわけではなく,「リーマン予想が正しいとすれば，こうなる」という種類の研究もある．

というのは今でも間違いではないと思うが，自分の守備範囲から離れると，誰が「その道のプロ」なのか，の判断が難しくなる．このようなときには膨大な情報の中から，(玉石混交とはいえ) 検討可能な量に絞り込んでくれるインターネットの検索は大変有用である．本稿の冒頭でふれた OEIS も多くの研究者の役に立っていると聞く．

使えそうな結果がない場合には，とにかく「手を動かす」ことが一般に推奨されている．既存の理論では手が届かない例を，なりふり構わず一つずつ理解していこうと試みているうちに，一般論が見えてくることもある．いつ誰から聞いたのか，定かではない (おぼろげには，学生時代に先輩から聞いた気がする) のだが「非自明な例を 100 個くらい計算すれば新しい結果が得られる」というのは，とても重要なアドバイスであると思う．

研究者付き合い

必死に問題を探していなくても，ある日突然問題が降ってくることもある．例えば研究内容の講演をした際に，聴衆から「この場合はどうですか?」などと聞かれたりすることがある．すぐに答えられることもあるが，それが次の研究のきっかけになることもある．講演のような場でなくとも，ほかの研究者と同席する機会があれば，ちょっとした疑問をぶつけてみるのはよくあることである．

研究者同士の付き合いで，いろいろな機会に「コメント歓迎」と求められることがある．例えば論文の原稿ができた段階で，周辺の人に見てもらうときなどである．もしくは，専門誌に投稿された論文の査読の依頼がきた場合などである．その方面のプロが書いた論文なので，簡単な誤字などは見つかっても，本質的な改良がすぐにできることなどはほとんどない．とはいえ，その論文が扱っている問題に深く興味を持てば，なにか少しでも改良できる余地はないか，と探求心に火がつくこともある．

問題が降ってくることには変わりないが，人から「この問題を一緒に考えないか？」と共同研究に誘われて考え始めることもある．研究上の趣味があい，議論が弾ん

だ末の誘いであったり，相手が持っている技術が必要であったり，本質的なアイデアを出してもらったお礼としてのお伺いであったり，共同研究のきっかけも千差万別である．

筆者はポスドク時代，ボスの L 先生から，人と積極的に交流しようとしない姿勢に対して「お前はもっと共同研究をするべきだ」と言われたことがある．共同研究をすれば，より多くの知見を研究に取り込めると同時に，共同研究者の数学を深く学ぶこともできる．より生産的な研究者になり，さらに成長することもできる，というのが L 先生の持論であったと思う．

筆者自身は (少なくとも学生時代から就職するくらいまでは)，自分の頭の中にある言葉にならない考えを他人に伝える努力をするのが億劫で，ごく少数の人としか共同研究をしなかった (できなかった)．人と議論する際に，生産的な議論ができるかどうかにはさまざまな要因があると思うが，ある程度バックグラウンドを共有できていることや，互いにアイデアを共通の言語 (日本語や英語) で適切に表現できることが重要なファクターであると思う．多くのバックグラウンドを共有できていて，方針を少し話せば互いの頭の中で独立に同じ計算ができるような間柄の人とであれば，散歩しながらでもバスの中ででも共同研究の議論は可能である．しかしそこまでバックグラウンドの共有ができている人はそれほどいないので，多くの場合は，黒板などを使いながら議論をして研究を進めることになる．

ただ，L 先生が言っていたように，意識的に共同研究をすることの重要性は，今ではよく分かる．数学の結果を受け入れるのも，それをさらに発展させるのも数学関係者のコミュニティーである．可能な限り，コミュニティーの多くのメンバーに共有してもらえる状態を目指す方が孤立して一人で考えるよりは良いことが多いだろう．しかし一方で孤立を恐れないことも時には重要であると思う．(ただしそれは交流を面倒くさがることとは本質的に違うとは思う．)

(無理矢理でも) 頻繁に会って共同研究を進める

数学の研究には普通締切は存在しない．他人に先を越されて悲しい思いをすることはあっても，そんなことは気にせず「今は別のことで忙しいのでそのうちやります〜」というスタンスで研究を放置しておいても，急に世界が滅びるわけではない．

しかし時には「この研究は何としても完遂しなければいけない」という義務感を感じる研究もある．研究自体に締切はないとはいえ，学生や求職中のポスドクとの共同研究であれば学位論文の締切が控えていたり，次の応募までに論文のプレプリントを完成させたい，というような，ある種の「締切」があることもある．いろいろな事情で，いまここでやりきっておかなければ，今後永遠に誰もしないだろう，というようなケースもある．(人によっては，外部の要因から来る義務感がなくとも，必ず一つの研究をきっちり終わらせてから次の研究に移る，ということを徹底している人もいる).

終わらせなければいけない，という研究がある場合，それが個人の単独の研究であれば，とにかく意志の強さが求められる．共同研究であれば，会って，話して，知見を共有し，何ができているのか，何が難しいのか，などを同意するまでとことん議論することが重要であるように思われる．筆者の経験上，毎週一回以上，数時間話すことを数か月続けていれば，何らかの方向性が定まり，一年くらい続ければ，何らかの成果が得られる可能性が高いと思っている．

一流の数学者はどう考えるかを考える

共同研究ではない「研究のやり方」を一つだけ書いてみよう．それはほかの (一流の) 数学者ならどう考えるだろうか？ と自問してみることである．講演を聞いたり，直接議論したり，書いたものを読んでいるうちに，この人ならきっとこうする，というのが体感できることがある．筆者はあるとき, ある高次元の多様体の構造を分析したいと考えていた．その頃，K 先生によるモース理論に

関係した文献をいろいろ眺めたり，講演を聞いたりしていたこともあって，あるときふと「K 先生ならこう考えるのではないか」というアイデアが芽生えたことがあった．その方面に詳しい M さんと，ある研究集会中の食事の席でたまたま隣り合うことがあったので，思い切ってこういうアイデアで，こういう多様体の形をこのように記述できるのではないかと考えているのですが，実行可能ですかね？ というようなことを聞いてみた．M さんからは Yes ／ No ではない予期せぬ答えが返ってきた：「きっと K 先生が興味を持つと思うから K 先生に聞いてみなよ.」 私は自分の研究は K 先生の研究とはまったく関係がないし，私の質問には，少なくとも表面上は，K 先生の痕跡はないと思っていたので，K 先生こそ聞くべき相手だ，という返答に驚くとともに，数学者の影響を受けるというのはこういうことか，と思い，印象に残っている．一流の数学者というのは，研究成果や直接の議論を通した影響だけでなく，論文や本を通して，深い影響を広く与え続けているのだろう．

人に説明をする

上に述べた共同研究の重要性とも関係しているが，人に説明をして聞いてもらう，という機会は貴重である．時代を超越した独創的な結果でもない限り，コミュニティーで理解されないことには，はじまらない，というのが一つの理由であるが，それだけではなく，それまで見えていなかった自分の研究の新たな側面が見えることもある．これは自分の研究発表だけでなく，他人の成果を他人に説明する際の準備にもあてはまると思う．冒頭の話で触れた Athanasiadis の論文については, 筆者は 10 年以上前から読んで知っていた．しかし恥ずかしながら，読み方が甘かったのか，集中講義で人に紹介する，という段になって初めてそのアイデアを自分の研究でも使いこなせるレベルに達したのだと思う．

研究時間を作る・出張する

研究に集中するには，時間はあればあるほど良い．研究をする上では，湯水のように時間があって,「研究しよう」と思った瞬間から好きなだけ研究に時間が使える，というのが理想だ．しかし大学に身を置いていると，当然ながら研究以外の用務も数多くある．大抵の研究以外の仕事はスケジュールがきっちり決まっており，研究を後まわしにせざるをえない場面も多い．

数学者は他の分野と比べて研究集会やワークショップへの出張が多いという意見を聞いたことがある．おそらく理由の一つは，そもそも数学の成果はコミュニティーで議論・共有されて初めてその価値が認められて受け継がれていくから，というのがあると思う．ほかの理系分野だと,「教科書を書き換える成果」という言い方をされるのを聞くが，数学の場合だと「教科書を書き換える」ほどの成果は 100 年のスパンで見てもほとんどないのではないだろうか.「教科書を書き換える」ほどの成果なら，放っておいても勝手に広がっていくだろうが，数学では「成果を広く共有してさらに発展させる」ためには，比較的オープンな場での議論が不可欠である．また，特定の問題を解決する上でも，興味の近い研究者と議論することが重要である．

研究集会等の出張中は一時的にせよ「湯水のように時間が使える」こともあり，どんな研究集会でも空き時間に独りで黙々と自分の研究を進める人，久々にあった共同研究者と共同研究を進める人も少なくない．

以上とりとめもなくいろいろと書いてきた．筆者個人は「プロの仕事術」とでも言えるような立派なノウハウを持っているわけではないし，おそらく「この通りにやれば誰でも研究できます」というような普遍的な方法は存在しないだろう．一研究者が研究を続けるうえで，日々直面しているさまざまな事柄の記録としてみていただければ幸いである．(数学セミナー 2017 年 7 月号 特集「数学研究のすすめ」 2026 年 11 月 17 日微修正)

[よしなが まさひこ]