

私のおすすめ — Periods

2001 年に出版された “Mathematics Unlimited — 2001 and Beyond” は多くの数学関係者の 21 世紀に向けた夢が語られていて大変お買い得な一冊です。その中から私が個人的に衝撃を受けた論説 “Periods” (by M. Kontsevich and D. Zagier)¹を紹介したいと思います²。“Periods” は端的に言えば「(実)数」に対する新たな視点を与え、実数の根幹にかかわる深く基本的な予想を立てています。

まずは次の三つの数を見てください

$$\begin{aligned}\pi &= 3.1415926535\dots \\ \log 2 &= 0.6931471805\dots \\ \rho &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.11000100\dots\end{aligned}$$

これらは超越数です。特に ρ は Liouville 数と呼ばれ、歴史上超越性が示された最初の実数です。ところでこれらの三つの数が、同じくらいの頻度で人間の前に現れるか、というとなんかことはありません。 $\pi, \log 2$ に関しては高校の数学で習うので、みなさん見たことがあると思います。しかし ρ を見たことある人は、かなり限られるでしょう。私も「最初の超越数」という文脈以外でこの数を見たことがありません。つまり実数には「重要な実数」と「あまり使わない実数」の違いが厳然とあります。これらの違いは一体どこから来るのでしょうか? Kontsevich と Zagier の論説は、この問いに対する一つの観察から始まります。彼らは、 π と $\log 2$

が持っている、おそらく ρ は持っていない、ある初等的な性質を指摘します。それは次のような「面積」による表示方法です。

$$\begin{aligned}\pi &= \int_{x^2+y^2<1} 1dxdy \\ \log 2 &= \int_1^2 \frac{dx}{x} \\ \rho &= \int \dots \text{多分そんな公式はない}\end{aligned}$$

もちろん Liouville 数 ρ も何らかの図形の面積として表わされます。しかし上の表示で決定的なポイントは π と $\log 2$ は、整数係数多項式で表される図形の面積であるという点です。 π や $\log 2$ がその他大勢の実数に比べると由緒正しい実数であることは、なんとなく共感してもらえないのではないかと思います。これらの数の由緒正しさは実は「整数係数有理関数の積分」であるという事実由来するのだろう、というのが彼らの提唱です。このような表示を持つ数を彼らは “period” (周期³) と呼び、周期を集めたものを \mathcal{P} と書くことにします。周期 \mathcal{P} は可算集合で加法、乗法で閉じています。また $\pi, \log n = \int_1^n \frac{dx}{x} \in \mathcal{P} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ より

$$\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R} \subsetneq \mathcal{P} \subsetneq \mathbb{R}$$

です。以上がこれまでに知られている \mathcal{P} の定性的性質のほぼすべてです。与えられた実数が周期かどうかについてはたくさんの予想があります、例えば $\frac{1}{\pi}, e, \gamma, \rho \notin \mathcal{P}$ と予

¹邦訳: 周期「数学の最先端 1」所収

²“Unlimited” と銘打った本に「ピリオド」というタイトルの論説が載るのは、遊び心でしょうか。

³「三角関数の周期は 2π である」という際の「周期」が言葉の由来だと思われま。また、より一般的な概念として 1989 年に梅村先生が提唱した「古典数」があります。

想されていますが、全く分かっていません。それどころか、周期でない実数の最初の例が見つかったのすらごく最近です⁴。

彼らは \mathcal{P} についてのいくつかの予想と問題を出しています。その中で「予想1」を紹介します。次の問題を考えましょう。

問題. $\log 4 = 2 \log 2$ を示せ。

なにをアホなと思われるかもしれませんが、対数 $\log n = \int_1^n \frac{dx}{x}$ の性質を何も知らないとしましょう。証明は次のようにできます。

$$\begin{aligned} \log 4 &= \int_1^4 \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^4 \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_1^2 \frac{dx'}{x'} \\ &= 2 \log 2 \end{aligned}$$

(2行目から3行目は $x = 2x'$ と変数変換しています。) 証明は特に難しいことはしていませんが、よく見ると、実は元の問題よりも強いことを示していることが分かります。問題は二つの実数が等しいことを示せというものでした。しかし我々の証明ではそれぞれの値を求めることをしていません。値は求めず、それぞれの実数を表す積分のレベルで変形できるということを示しています。ちなみに積分の変形ルールとは

(1) 線形性、(2) 変数変換、(3) 微分積分の基本公式

の三つです。実は \mathcal{P} の等号は常にこの三つのルールだけで説明できるのではないかと、というのが彼らの予想です。

⁴arXiv:0805.0349

予想1. $\alpha_1 = \int_{\Delta_1} \omega_1, \alpha_2 = \int_{\Delta_2} \omega_2 \in \mathcal{P}$ は周期とする。 $\alpha_1 = \alpha_2$ とすると、二つの積分は変換ルール(1)–(3)でうつりあう。

積分が(1)–(3)でうつりあえば、二つの周期の値は当然等しくなります。予想1は、それ以外の奇跡的な一致が起こらないことを意味しています。別の言い方をすると、周期達は自分の出自を憶えているとも言えます。

古典的に整数と実数の関係といえば、 $\mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Q} \Rightarrow$ 完備化 $\Rightarrow \mathbb{R}$ という構成を通じたものでした。しかしこの伝統的な実数観は、上の予想に対して(現時点では)全く無力です。予想1は整数と実数の非常に深い関係を明らかにしていると思われます。もし反例があればそれはそれでビックリです。

数の世界を海に例えるなら、数の海はとても広く深いので、我々に分かっていることはごくわずかです。しかし周期の概念は実数の根幹に食い込んでいて、予想1は我々を実数の海の奥底へ導いてくれる気がします。そこには竜宮城のような人をとらえて離さぬ美しい世界があるのでしょうか。はたまたすべてを飲み込む原初の真っ暗闇があるのでしょうか。いずれにせよ、そこには

過去と未来のすべての数学が含まれているのである。(C. G. Jung)⁵

吉永正彦
神戸大学理学部数学教室

(email: myoshina @ math.kobe-u.ac.jp)

2008年6月8日

⁵Jung “Synchronicity: An Acausal Connecting Principle” 邦訳：自然現象と心の構造、ただし上の訳は吉永によります。原文の英語版は “it contains the whole mathematics and everything yet to be discovered in this field.” です。