

Albert-László Barabási 著 青木薫訳

新ネットワーク思考

～世界の仕組みを読み解く～

吉永正彦

ネットワークとは、人間同士の知り合い関係から電力網、生体内での化学反応系まで色々な場面で使われる物と物のつながり具合の総称です。「ネットワーク」には規模も対象も様々なレベルがあるのですが、本書はこれらの中に共通の構造を見いだした著者による一般向けの解説書“LINKED: The New Science of Networks”の日本語訳です。内容も訳もとても良いと思うのですが、日本語タイトルの付け方や帯のコメント(「インターネットの弱点、エイズの急速な広がり、マイクロソフトのひとり勝ち、アルカイダの組織など、すべてを説明するルールがあった」, 「ついに複雑系の姿をとらえた話題の書!」など)が勝手に怪しげな雰囲気を出していて、そのせいであまり売れていないのではないかと少々心配しています。正直なところ私も知り合いから「バラバシという人はすごい!」という噂を聞かなければ読まなかったと思います。

本書にしたがって、ネットワークとグラフ理論におけるバラバシ登場までの流れを紹介をします。

1 点と線からできた宇宙

扱いたいのは次の問題です。

問題 1 世の中のネットワークはどのようなグラフで表現されるか?

ここでいうグラフとはいくつかの点(頂点)とそれらを結ぶ線(辺)からなる図形のことです。



図 1: 頂点数 4 のグラフの例

現実のネットワークが、どのように構成されるものであるか分かれば、様々なネットワークを人工的に作り、そこで自由にシミュレートすることが出来ます。感染症の予防などこの問題の応用はいくらでもあるでしょう。

以下では主に人間同士の知り合い関係ネットワークを例に扱います。つまり一人一人の人間を点で表し、二人の人間は知り合いなら線で結ぶ、という方法で描かれたグラフがどのようなものか考えます。頂点の数は人口なので、我々の問題は膨大な頂点数を持つグラフを対象にします。

また、一つの頂点から出ている線の本数は、その人の知り合いの数に対応しています。例えば線が一本しか出ていなければその人は一人しか知り合いがいないことになります。現実には近づけるには、頂点数だけでなく、辺の本数についてもある程度制限をつけるのが妥当です。そこで次のような条件を置きましょう。

- (i) 人間が 10 億人 ($= 10^9$) いる。
- (ii) 各人は大体 100 人 ($= 10^2$) の知り合いを持つ。

まずはとにかく何でも良いので、これらの条件を満たすグラフ(ネットワーク)を一つ作ってみましょう。とりあえず次のようなものが考えられます。

定義 1 (正則グラフ Reg.)

10^9 個の頂点を円周上に等間隔に並べ、二つの頂点 v_1, v_2 に対して、 v_1 と v_2 の間隔が 50 以下ならこれらの頂点を辺で結ぶ。

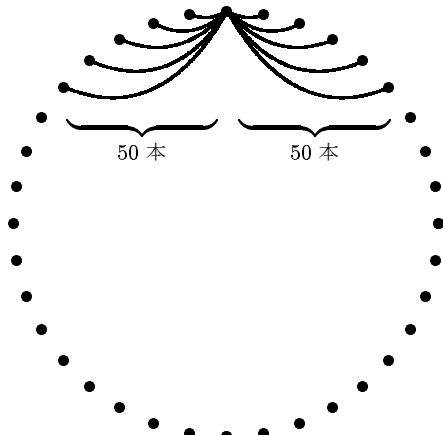


図 2: Reg.

このグラフは各頂点から丁度 100 本ずつ辺が出ていますので、Reg.(Regular graph) と呼ぶことにします(上の図は一番上の頂点から出ている辺だけを書いています)。

さて、とりあえず頂点数 10 億、各頂点から 100 本ずつ辺の出ているグラフが構成できましたが、これは現実世界を近似しているのでしょうか？ 言い換えると、このグラフでシミュレートした結果を現実世界の現象と受け入れられるのでしょうか？ ほとんどの人は信じないでしょう。このグラフは現実世界を近似していると信じるには特徴的すぎます。一例をあげると、このグラフが表現している社会は**すべての人が丁度 100 人ずつの知り合いを持った社会**です。一方現実世界には、知り合いが 10 人の人もいれば、1000 人の人もいます。直感的にダメそうです。さらに決定的な事実として、「世間は狭い」ことを実証した次のような社会学の調査があります。

Milgram の調査 1 (S. Milgram, 1967)

住んでいる地域、年齢や職業などを全くランダムに選んだ二人のアメリカ人は「知り合いの知り合いの...知り合い」と何回のステップでつながるか？ → **調査結果: 平均したら 5.5 回。**

これはネットワークを表すグラフの言葉で言うと、勝手な 2 頂点が平均して大体 5 ~ 6 本の辺

を介して結ばれていることを意味します。しかし上の Reg. で 2 頂点間の平均距離を計算すると、 $5 \times 10^6 = 500$ 万となることが分かります。これは現実世界 5 ~ 6 の 100 万倍で、あまりにも大きすぎます。

Reg. がダメな理由は明らかでしょう。このグラフは対称性が高すぎるのです。現実世界の人たちの多様性がグラフにまったく表れていません。上にも書きましたが、現実世界にはたくさんの知り合いを持つ人もいれば、あまり知り合いのいない人もいます。知り合いの人数などにある種のランダム性を持たせないことには現実的なネットワークの構成は難しそうです。そこで次に「平均したら知り合いの人数は 100 人」という仮定を満たすように、ランダム性を入れたグラフをつくります。

定義 2 10 億個の中の各 2 頂点のペアに対して、確率 $\frac{100}{10 \text{ 億}} = 10^{-7}$ で辺を結ぶ。

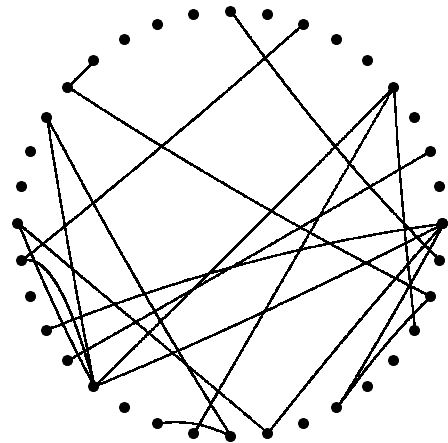


図 3: ランダムグラフ

これをランダムグラフ (Random graph) と呼ぶことにします。直感的にはランダムグラフは上の Reg. よりは現実世界を近似しているそうです。実際このネットワークの 2 点の距離の期待値は(後述の Watts-Strogatz の論文を信用すると) 大体 4.5 となります。これは Milgram の調査結果とも良い感じ です。

ランダムグラフはハンガリーの数学者エルデシュ(Erdős) とレーニイ (Rényi) によって 1959 年に導入されました。彼らは純粋に数学的な興味からランダムグラフを導入したのであって、少なくとも現実世界のネットワークの近似として

導入したわけではないだろうと言うのが著者バラバシの見解です¹。バラバシ(ハンガリー出身)は同国の英雄を「本気で現実世界のネットワークを近似する問題を考えていたなら、彼らがこんな安直なモデルは立てるはずはない。」ともいわんばかりの勢いで尊敬しています。しかしその後40年近く、エルデシュ-レーニイのランダムグラフモデルはネットワークの科学を支配し続けます。

2 友達の友達が友達の確率

しかし90年代後半になって非常に明快なアイデアで「ランダムグラフモデルはちょっとおかしいんじゃない?」と言い出す人が現れました。ワッツ(Watts)とストロガッツ(Strogatz)です²。彼らの理屈はこうです:「私の親友を二人つれてきて、彼らが直接の知り合いである確率を考えよう。ランダムグラフモデルにおいてその確率は 10^{-7} であるが、実際はそれより遥かに高い確率で直接の知り合いであろう。」世の中にはサークルや学校のクラスのように、任意の二人が互いに知り合いである、という集団がたくさんあります。しかしランダムグラフモデルではこのような知り合いサークルが発生しないというわけです。ワッツとストロガッツはネットワークにおいて「知り合いの知り合いが直接の知り合いである確率」を重要な指標として導入しました(クラスタリング係数)³。

ランダムグラフのクラスタリング係数は定義から 10^{-7} です。ではクラスタリング係数の大きなグラフというのはどのようなものでしょうか?

ここで一度あきらめた Reg. に戻しましょう。

¹最近の Random group の理論の話などを聞いていると「それまでのグラフの研究はどれも具体的に構成された一つのグラフの研究だった。一方エルデシュらは具体的な構成には現れない、その他大勢のグラフの性質を知りたかったのだ」という問題意識が考えられますが、本当にそう思っていたかどうかは分かりません。

²Collective dynamics of 'small-world' networks. Nature **393** 440-442, 4 June 1998. Google で検索すれば Free で pdf ファイルが手に入ります。

³『知り合いの知り合いが直接の知り合いである確率』と『ある人の二人の知り合いが、直接の知り合いである確率』は同じことです。

このグラフのクラスタリング係数を調べるとなんと $\frac{1}{4}$ になります。これはまづまづの数字です⁴。

	平均距離	クラスタリング係数
Reg.	5×10^6	0.25
Random	4.5	10^{-7}
現実世界	5.5	$\geq 10\%(?)$

ワッツとストロガッツは Reg. からスタートして徐々にランダム性をあげていくと、平均距離もクラスタリング係数も共に良い振る舞いをするグラフが構成できることを(純粋に数学的に)示しました。ポイントは Reg. からランダム性を上げていくと、平均距離もクラスタリング係数も単調に減っていくのですが、その減少の仕方に差があることを利用しています。平均距離の方がずっと速く減少するので、クラスタリング係数を大きく保ったまま、平均距離の小さいグラフが得られると言うわけです。

ここでようやく著者バラバシの登場です。卓越したアイデアと数学的力量によりなされたワッツとストロガッツのモデルを横目に見ながら、98年頃バラバシのグループはホームページの間のリンクによるネットワークの地図を作っていました。そして彼らはワッツとストロガッツのモデルでは説明できない現象を見つけます。

彼らは次のようなことを調べました:「知り合いを500人以上持つ人、1000人以上持つ人、1500人以上持つ人、2000人以上持つ人...と調べていくとそういう人の数はどんどん減っていく。どれくらいの速さで減るのだろうか?」知り合いを n 人以上持つ人の数を $k(n)$ と書くことにすると、 $n \rightarrow \infty$ の時にランダムグラフやワッツ-ストロガッツのモデルでは、 $k(n)$ は指数関数的 ($k(n) \sim e^{-an}$) に0に近づきます。しかしバラバシのグループの集めたデータでは、その減り方が冪乗 ($k(n) \sim n^{-\gamma}$) で減っていくことが観察されました⁵。このように膨大な知り合い

⁴現実世界のクラスタリング係数がいくらか、というのは私(吉永)は調べていないので分かりません。直感的には10%は越えるだろうと思うのですが、どうでしょうか? 表中の10%(?)というのは私の直感です。

⁵指数関数の方が冪乗より遥かに速く減少します。

を持つ人を“ハブ”と呼ぶことにしますが、バラバシの観察は、ハブが予想より遥かにたくさんいるというものです。

「知り合いを膨大に持つ人などというのは、社会全体からみたら例外的なごく一部の人の人で、それほど真剣に考えなくても良いのでは?」と考えることもできますが、バラバシはハブの存在こそ解決すべきジレンマだと重要視します。実際ハブの存在はネットワークの情報伝達などを考える際決定的な役割を果たします。

3 客が客を呼び、金持ちはより金持ちに

ここでバラバシはそれまで見過ごされてきたネットワークの二つの性質の重要性を見抜きます。ビックリするくらい簡単なことで、言われれば誰でも納得するでしょう。一つ目は

(A) 現実世界のネットワークは成長する。

ランダムグラフにしる、ワッツ-ストログッツにしる、グラフの頂点数は最初から固定されました。しかし現実のネットワークは常に頂点数や辺の数を変えています。もちろん現実のネットワークも、ある瞬間だけ見れば頂点数の固定された一つのグラフには違いないのですが、ハブの存在を説明するには成長するモデルを考えることが本質的です。二つ目は

(B) 頂点が新しく辺を伸ばすときには、ランダムに辺を伸ばすわけではなく、ハブに優先的に辺を伸ばす。

これも具体的な状況を想像すれば自然なことです。例えば引っ越しなどをして新しいコミュニティで知り合いを一から作る状況を考えましょう。最初に知り合うのはどういう人でしょうか? あまり人付き合いのない人と知り合いになるより、社交的な人と知り合いになる確率の方が高いでしょう。また別の例では、ホームページを作った人がリンクを張る際に面識のないどこかの小学生のホームページと検索エンジン大手の

Yahoo に同じ確率でリンクを張るでしょうか? そんなことはありません。つまりネットワークは成長する際に、より多くの辺を持つ頂点に優先的に辺を伸ばすのです。そうするとシミュレーションするまでもなく、ハブの発生は明らかでしょう。まさに「客が客を呼び、金持ちはより金持ちに」というのがネットワークの本質的な性質を的確に表現しています。

頂点数を固定した静的なモデルを考えている限り見えないのですが、ネットワークの「成長」と「優先的選択」という二つの簡単な法則が、ネットワークの本質的な構造に深く関わっているのです。仮にハブの問題を無視したとしても、この二つの視点の欠けたモデルなど信用できないように思われます。私はこの二つの法則を見抜いたバラバシへの尊敬と共に、‘自由な’はずの数学者がこのモデルを提出できなかったことに少し寂しさを感じます。

もちろんバラバシのモデルが最終究極のモデルというわけではありませんが、いくつかの例ではその有効性が実証されています。一例として、数年前に流行したウイルスメールがいまだ撲滅できないという現象があります。それまでのモデルによるシミュレーションでは『ワクチンソフトが開発されればウイルスメールはすぐに撲滅できる』という現実を反映しない結果となる一方、バラバシのモデルでは現実に近い挙動を見事に示したそうです。他の例については本書をご覧ください。

バラバシの登場でこの分野が終わったわけではなく、むしろようやくランダムグラフの呪縛から解かれたと見るべきだと思います。「プロジェクト X」風の読みやすい読み物に仕上がっていて、実際に本を読む方が私の解説などよりずっと面白いはずなので、一読をおすすめします。(2004年5月14日)

吉永正彦
京都大学数理解析研究所 (D3)
yosinaga@kurims.kyoto-u.ac.jp