佐武図形と半単純代数群の分類

渡部 隆夫

平成２７年５月９日

「佐武先生の数学・佐武先生の想い出」 講演スライド

半単純代数群の分類に関する略年表

Borel1956 Groupes linéaire algébriques, Ann. of Math. 64 (1956), 20–82.
＊代数群を最初に系統的に扱った論文

Chevalley1956/58 Sur la classification des groupes de Lie algébriques, Sém. Chevalley 1956/58, E.N.S., Paris.
＊代数閉体上の同型定理と分類

Tits1959 Sur la classification des groupes algébriques semi-simples, C. R. Acad. Sci. Paris 249 (1959), 1438–1440.
＊半単純非等方核 (semisimple anisotropic kernel) の導入

Satake1960 On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, Ann. Math. 71 (1960), 555-580.
＊ Γ 図形の導入

Araki1962 On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J. of Math. Osaka City University 13 (1962), 1–34.
＊ Γ 図形 (= 佐武図形) を使った実単純 Lie 環の分類

Satake1963 On the theory of reductive algebraic groups over a perfect field, J. of Math. Soc, Japan, Vol.15, No. 2 (1963), 210–235.
＊完全体上の同型定理

Veisfeiler1964 Classification of semiseimple Lie algebras over a p-adic field, Dokl. Akad. Nauk SSSR 158 (1964), 258–260.
＊ Satake1963 を使った p-進体上の単純 Lie 環の分類 (結果のみ)

Tits1966 Classification of algebraic semisimple groups, in "Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups", Proc. Symp. in Pure Math. 9, Vol.I, A.M.S., 1966, pp.33–62.
＊任意の体上の同型定理と Γ 図形 (= 佐武図形 = Tits index) の分類
(ただし, Γ 図形の分類は結果のみ)

Satake1967 Symplectic representations of algebraic groups satisfying a certain analyticity condition. Acta Math. 117 (1967), 215279.
＊コホモロジー不変量 $\gamma(G)$ の計算

Satake1971 Classification Theory of Semi-simple Algebraic Groups, Marcel Dekker, 1971. (1967 年のシカゴ大での講義ノート)
＊分類についてのテキスト , とくに p-進体上の分類を含む

Selbach1976 Klassifikationstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen, Bonner Mathematische Schriften, 1976.
＊ Tits1966 の Γ 図形の分類に証明を付けた

Tits1990 Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups, J. of Algebra 131 (1990), 648-677.
* Tits1966 にあった？$E_{8,1}^{133}$ の存在性

Springer1998 Linear Algebraic Groups, 2nd edition, 1998.
＊ Chapter 17 に Γ 図形の分類

Satake2001 On classification of semisimple algebraic groups, in Class Field Theory -Its Centenary and Prospect (Ed. Katsuya Miyake), Advanced Studies Pure Math. 30 (2001), 197–216.
＊代数体上の分類

Satake1960 On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, Ann. Math. 71 (1960), 555-580.

Satake1960 を書かれたころの回想

私の修行時代 (数学のたのしみ No.5, 1998 年 2 月 日本評論社) から抜粋

私はプリンストンにいる間に表現論を使ってコンパクト化を一般の古典群の場合に構成することを考え，二つの論文にまとめた（Ann. of Math., 1960）．そのときはあまり意識しなかったが，このとき用いた「ガロア群の作用を考えたルート図式」を，実単純リー環の分類にも有効に使えることが荒木捷朗さんによって指摘された．これはさらに一般の体の上の単純代数群の分類にも適用できることが後でわかった（これと同様な分類法は J. Tits (1959) によっても得られていた）．私のコンパクト化自身もまだ未熟なものであった．しかし一般の（エルミット型）半単純代数群の場合に標準的コンパクト化を構成するためには，代数群の基礎，特に reduction theory が整備されるのを待たなければならなかった．（それは後に Baily-Borel (1966) によって達成された．）

1　Γ 図形 (佐武図形)

k を完全体, $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{\mathsf{k}}/\mathsf{k})$ を絶対 Galois 群とする.

G を連結半単純 k 代数群として,

$$A := G\text{ の極大 k 分裂トーラス}$$
$$T := A\text{ を含む }G\text{ の極大 k トーラス}$$

を固定する. 即ち

$$A \cong_{/\mathsf{k}} \overbrace{\mathrm{G_m} \times \cdots \times \mathrm{G_m}}^{n'}, \qquad T \cong_{/\bar{\mathsf{k}}} \overbrace{\mathrm{G_m} \times \cdots \times \mathrm{G_m}}^{n}$$

ここで $\mathrm{G_m}$ は 1 次元乗法群.

T の指標群を

$$X = X(T) := \mathrm{Hom}_{\bar{\mathsf{k}}}(T, \mathrm{G_m}) \cong \mathbf{Z}^n$$

とすると, Γ の右作用 $X \curvearrowleft \Gamma$

$$\chi^{\sigma}(t) := \sigma^{-1}(\chi(\sigma(t))), \qquad (\forall t \in T,\ \chi \in X,\ \sigma \in \Gamma)$$

がある.

1.1　絶対ルート系

指標 $\alpha : T \longrightarrow \mathbb{G}_\mathrm{m}$ がルートであるとは,

$$
\begin{aligned}
&\exists P_\alpha : G \text{ の 1 次元連結べき単部分群 } /\bar{\mathsf{k}} \\
&\exists x_\alpha : \mathbb{G}_\mathrm{a} \longrightarrow P_\alpha : \bar{\mathsf{k}}\text{-同型} \\
\text{such that}\quad & t x_\alpha(\xi) t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)\xi), \qquad \forall t \in T,\ \forall \xi \in \mathbb{G}_\mathrm{a}
\end{aligned}
$$

を満たすとき. ここで $\mathbb{G}_\mathrm{a}$ は 1 次元加法群.

$$
\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(G,T) := G \text{ の } T \text{ に関するルートすべての集合}
$$

は $X_{\mathbf{Q}} = X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の中でルート系になる.

(R1) $\mathfrak{r}$ は有限集合で, $0 \notin \mathfrak{r}$ かつ $X_{\mathbf{Q}} = \langle \mathfrak{r} \rangle_{\mathbf{Q}}$.

(R2) $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{r}$ に対し,

$$
c_{\alpha,\beta} := 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbf{Z} \quad \text{かつ} \quad s_\alpha(\beta) := \beta - c_{\alpha,\beta}\alpha \in \mathfrak{r}
$$

(R3) $\forall \alpha \in \mathfrak{r}$ に対し, $\mathbf{Q}\alpha \cap \mathfrak{r} = \{\pm\alpha\}$.

1.2 Γ基本系

A は G の極大 k 分裂トーラスで $A \subset T$.
指標群 $X = X(T)$ の部分加群 X_0 を

$$X_0 := \{\chi \in X \,:\, \chi|_A = 0\}$$

とする. X に加法を保つ全順序で次を満たすものが存在する.

$$\chi \in X,\ \chi > 0 \text{ かつ } \chi \notin X_0 \implies \chi^\sigma > 0\ \ \forall \sigma \in \Gamma$$

この順序を Γ 線形順序とよぶ. これから正ルートの集合

$$\mathfrak{r}_+ := \{\alpha \in \mathfrak{r} \,:\, \alpha > 0\}$$

が定まる.

$\mathfrak{r}$ の基本系 $\Delta \subset \mathfrak{r}_+$ が次の条件で一意に定まる.

- Δ は $\mathfrak{r}_+$ の中の 1 次独立なベクトルの最大系.
- $\mathfrak{r} \cap \langle \Delta \rangle_+ = \mathfrak{r}_+$,
  ここで $\langle \Delta \rangle_+ := \{\sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha \,:\, 0 \le c_\alpha \in \mathbf{Q}\}$.

Γ 線形順序から決まる基本系 Δ を Γ 基本系とよぶ.

1.3　制限ルート系 (相対ルート系)

$Y := X(A)$ を極大 k 分裂トーラス A の指標群とすると, 制限写像

$$X \xrightarrow{\pi} Y \,:\, \chi \mapsto \chi|_A$$

により, $X/X_0 \cong Y$ である.

$\Delta \subset \mathfrak{r}$ を Γ 基本系として,

$$\mathfrak{r}_0 := \mathfrak{r} \cap X_0, \quad \Delta_0 := \mathfrak{r}_0 \cap \Delta$$

とすると, $\mathfrak{r}_0$ は $\mathfrak{r}$ の部分ルート系で, Δ_0 が $\mathfrak{r}_0$ の基本系になる.

$\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{r}_0$ の Weyl 群をそれぞれ

$$W := \{s_\alpha \,:\, \alpha \in \mathfrak{r}\}, \qquad W_0 := \{s_\alpha \,:\, \alpha \in \mathfrak{r}_0\}$$

とおき, W の部分群

$$W^\Gamma := \{w \in W \,:\, w(X_0) = X_0\}$$

をとれば, $W_0 \lhd W^\Gamma$ である.

定理 1 [Satake1963, Theorem 2]

上に定めた記号により

$$\bar{\mathfrak{r}} := \pi(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0), \qquad \bar{\Delta} := \pi(\Delta - \Delta_0)$$

とおけば, $Y_{\mathbf{Q}} := Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ において $\bar{\mathfrak{r}}$ は拡張されたルート系になる. また $\bar{\Delta}$ はその基本系で W^Γ/W_0 は $\bar{\mathfrak{r}}$ の Weyl 群と同一視できる.

1.4 G の半単純非等方核

A の G における中心化群を $Z(A)$ として,

$$\boxed{G(\mathfrak{r}_0) := \ Z(A) \text{ の交換子群}}$$

とする.

このとき $G(\mathfrak{r}_0)$ は k コンパクト (即ち, $G(\mathfrak{r}_0)$ の極大連結可解 k 部分群が自明) で,

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}(G(\mathfrak{r}_0), G(\mathfrak{r}_0) \cap T)$$

である.

$G(\mathfrak{r}_0)$ を G の半単純非等方核という.

1.5　Γ 図形

Δ を $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(G, T)$ の Γ 基本系とする．このとき

$$\boxed{\forall \sigma \in \Gamma, \quad \exists! w_\sigma \in W_0 \quad \text{such that} \quad \Delta^\sigma = w_\sigma \Delta}$$

が成り立つ．そこで

$$\boxed{\Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \,:\, \sigma \mapsto [\sigma], \quad \chi^{[\sigma]} := w_\sigma^{-1} \chi^\sigma \quad (\chi \in X)}$$

と準同型を定義する．定義から

$$\Delta^{[\sigma]} = \Delta, \qquad \Delta_0^{[\sigma]} = \Delta_0 \qquad (\forall \sigma \in \Gamma)$$

なので，対応 $\sigma \mapsto [\sigma]$ は

$$\Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(X, \Delta, \Delta_0) \quad \text{準同型}$$

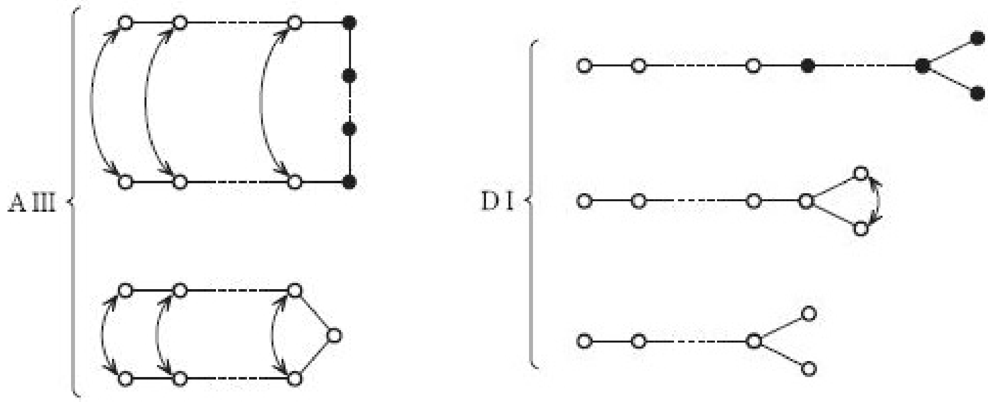
である．

$S_G := (X, \Delta, \Delta_0, [\Gamma])$ を G の Γ 図形 という．

- Δ は通常の Dynkin 図形
- Dynkin 図形の頂点で Δ_0 に含まれるものは黒丸 ● で表示
- $[\Gamma]$ の作用を矢印で表示

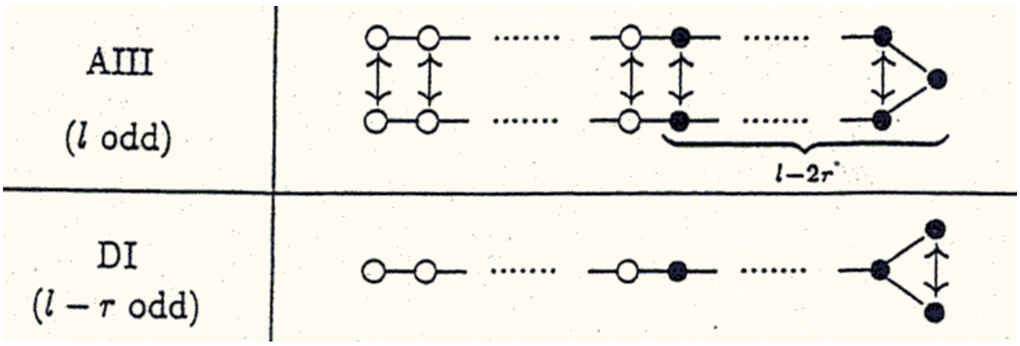
により $(\Delta, \Delta_0, [\Gamma])$ を図 (佐武図形) で表示する．

岩波数学辞典第 4 版 p.1694 から抜粋



上の図で矢印は $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ の作用で移りあうルートを表すが, 黒丸 ● のルートへの作用が自明な訳ではない. ● にも作用があるので, 本来は下の図のようになる.

Satake2001, p.214 から抜粋



1.6 Γ 図形の同型

Γ 図形 $(X, \Delta, \Delta_0, [\Gamma])$ の定義は代数群とは無関係にできる. 即ち

$$\begin{cases} \Delta \subset X : \text{ルート系} \\ \Delta_0 \subset \Delta : \text{部分集合} \\ [\Gamma] \subset \mathrm{Aut}(X, \Delta, \Delta_0) : \text{部分群} \end{cases}$$

の組をとればよい.

2 組の Γ 図形 $(X, \Delta, \Delta_0, [\Gamma])$, $(X', \Delta', \Delta'_0, [\Gamma]')$ に対し,

$$X \xrightarrow{\psi} X' : \text{加群の同型写像}$$

$$\text{such that} \quad \begin{cases} \psi(\Delta) = \Delta' \\ \psi(\Delta_0) = \Delta'_0 \\ \psi \circ [\sigma] = [\sigma]' \circ \psi \quad (\forall \sigma \in \Gamma) \end{cases}$$

であるような ψ を Γ 図形の同型写像という.

G から定まる Γ 図形 S_G は同型を除いて極大 k トーラス T と Γ 基本形 Δ の取り方に依存しない.

Γ 図形 $(X, \Delta, \Delta_0, [\Gamma])$ が単連結であるとは, Δ から定まる基本ウェイト系 (Δ に対応するコルート系の双対基) が X の $\mathbf{Z}$-基底になること.

1.7 合同類と同型定理

連結半単純 k コンパクト群 G_0 と Γ 図形 $S = (X, \Delta, \Delta_0, [\Gamma])$ の組 (G_0, S) で,

$$S_{G_0} = (X^0, \Delta_0, \Delta_0, [\Gamma])$$

となるものを考える.

このような組 (G_0, S) と (G_0', S') が次を満たすとき, 合同であるという.

- Γ 図形の同型写像 $S \xrightarrow{\psi} S'$ が存在する.
- k 同型写像 $G_0 \xrightarrow{f_0} G_0'$ が存在する.
- 適当な極大 k トーラス $T_0 \subset G_0$ を取れば, $X(T_0) = X^0$ で, $(f_0|_{T_0}^{-1})^* = \psi|_{X^0}$ が成り立つ.

$\mathfrak{G}_0\mathfrak{S} :=$ 上のような合同類すべての集合

定理 2 [Satake1963, Theorem 3]

対応

$$\begin{array}{ccc} \{\text{連結半単純 k 代数群の同型類全体}\} & \longrightarrow & \mathfrak{G}_0\mathfrak{S} \\ [G] & \mapsto & [G(\mathfrak{r}_0), S_G] \end{array}$$

は単射である.

この対応の像を $\mathfrak{G}_0\mathfrak{S}_{\mathsf{k}}$ と表す.

2　半単純代数群の分類

- 許容的 Γ 図形による分類
- 半分裂型群とコホモロジー不変量による分類

2.1　許容的 Γ 図形による分類

定理 2 より

$$\mathfrak{G}_0\mathfrak{S}_{\mathsf{k}} \cong \text{連結半単純 k 代数群の同型類全体}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{G}_0\mathfrak{S}_{\mathsf{k}} & \xrightarrow[{[G_0,S]\mapsto[G_0]}]{\pi_1} & \begin{pmatrix}\text{連結半単純 k コンパクト群}\\ \text{の同型類集合}\end{pmatrix} \\
{\scriptstyle \pi_2}\Big\downarrow {\scriptstyle \begin{matrix}[G_0,S]\\ \downarrow \\ [S]\end{matrix}} & & \\
\begin{pmatrix}\Gamma\,\text{図形}\\ \text{の同型類集合}\end{pmatrix} & &
\end{array}$$

を考えると, π_1 は全射.

$$\mathfrak{S}_{\mathsf{k}} := \pi_2(\mathfrak{G}_0\mathfrak{S}_{\mathsf{k}})$$

とおいて, $\mathfrak{S}_{\mathsf{k}}$ の同型類に含まれる Γ 図形を許容的 Γ 図形とよぶ.

$\mathfrak{G}_0\mathfrak{S}_{\mathsf{k}}$ の決定は次の 2 段階に分けられる.

(Q1) 連結半単純 k コンパクト群の決定

(Q2) 許容的 Γ 図形の分類

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{G}_0\mathfrak{S}_{\mathsf{k}} & \xrightarrow{\pi_1} & \begin{pmatrix}\text{連結半単純 k コンパクト群}\\ \text{の同型類集合}\end{pmatrix} \\
{\scriptstyle \pi_2}\big\downarrow & & \\
\mathfrak{S}_{\mathsf{k}} & &
\end{array}
$$

▶ 有限体の場合

Lang の定理 により,

$$\text{連結半単純 } \mathbf{F}_q\text{-コンパクト群} = \{e\}$$

これから

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{F}_q} = \{[X, \Delta, \emptyset, [\Gamma]] \ : \ [\Gamma] \subset \mathrm{Aut}(X, \Delta) \text{ 巡回部分群}\}$$

であり

$$\boxed{\mathfrak{G}_0\mathfrak{S}_{\mathbf{F}_q} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathfrak{S}_{\mathbf{F}_q}}$$

▶ 実数体の場合

Cartan : 幾何的な方法による分類.

Weyl : 単連結実コンパクト群はその Dynkin 図形
から一意に定まる.

Araki1962 : 許容的 Γ 図形の決定.

とくに

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{連結単連結半単純}\\ \text{実代数群の同型類集合}\end{pmatrix} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}\text{許容的単連結 }\Gamma\text{ 図形}\\ \text{の同型類集合}\end{pmatrix}}$$

2.2 Steinberg 群とコホモロジー不変量

k が任意の場合に戻り, G の半単純非等方核が自明 $G(\mathfrak{r}_0) = \{e\}$ であるとき, G を Steinberg 群という.

$$\mathfrak{G}_0\mathfrak{S}_{\mathsf{k}} \xrightarrow{\pi_1} \begin{pmatrix} \text{連結半単純 k コンパクト群} \\ \text{の同型類集合} \end{pmatrix}$$

$${\pi_1}^{-1}([e]) = \text{Steinberg 群の k 同型類集合}$$

定理 3

任意の連結半単純 k 代数群 G に対し,

$$\exists ! [G_1] \in {\pi_1}^{-1}([e]), \quad \exists f : G \longrightarrow G_1 : \bar{\mathsf{k}}\text{-同型}$$
$$\text{such that} \quad f^{\sigma} \circ f^{-1} \in \mathrm{Inn}(G_1)\ , \forall \sigma \in \Gamma$$

このとき G を G_1 の k inner twist という. ここで Z_1 を G_1 の中心とすれば, $\mathrm{Inn}(G_1) \cong G_1/Z_1$ である.

定理 3 の状況 $G \xrightarrow{f} G_1$ で

$$b_\sigma := f^\sigma \circ f^{-1} = \mathrm{Inn}(g_\sigma), \quad (g_\sigma \in G_1,\ \sigma \in \Gamma)$$

とすると,

- $\Gamma \ni \sigma \mapsto b_\sigma \in \mathrm{Inn}(G_1) \cong G_1/Z_1$ は 1-コサイクルで,

$$\beta_{\mathsf{k}}(G, f) := [b_\sigma] \in H^1(\mathsf{k}, G_1/Z_1)$$

- $\Gamma \times \Gamma \ni (\sigma, \tau) \mapsto c_{\sigma,\tau} := g_\sigma^\tau g_\tau g_{\sigma\tau}^{-1} \in Z_1$ は 2-コサイクルで

$$\gamma_{\mathsf{k}}(G, f) := [c_{\sigma,\tau}] \in H^2(\mathsf{k}, Z_1)$$

が定義でき, 完全列

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathsf{k}, G_1) \longrightarrow H^1(\mathsf{k}, G_1/Z_1) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathsf{k}, Z_1)$$

から

$$\delta(\beta_{\mathsf{k}}(G, f)) = \gamma_{\mathsf{k}}(G, f)$$

である.

$G \xrightarrow{f} G_1$ に対し, $S_G = (X, \Delta, \Delta_0, [\Gamma])$ ならば $S_{G_1} \cong (X, \Delta, \emptyset, [\Gamma])$. $\mathrm{Aut}(X, \Delta)$ の部分群

$$C_\Delta := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(X, \Delta) \ : \ \sigma \circ [\gamma] = [\gamma] \circ \sigma \quad \forall \gamma \in \Gamma\}$$

をとれば,

$$C_\Delta \cong \mathrm{Out}_{\mathsf{k}}(G_1)\,.$$

これから C_Δ は $H^2(\mathsf{k}, Z_1)$ に作用して,

$\gamma_{\mathsf{k}}(G) := \gamma_{\mathsf{k}}(G, f) \mod C_\Delta$ は, 同型 $G \xrightarrow{f} G_1$ の取り方に依存しない.

▶ p-進体の場合

$\gamma_{\mathsf{k}}(G)$ による分類の基本となる結果は

定理 4[Kneser, Math. Z., Vol. 89, 1965]

k が p-進体, G が単連結半単純 k 代数群ならば $H^1(\mathsf{k}, G) = 0$ である．これから連結写像 $H^1(\mathsf{k}, G/Z) \longrightarrow H^2(\mathsf{k}, Z)$ は全単射である．

系

k を p-進体, G, G' を単連結半単純 k 代数群で, 共に Steinberg 群 G_1 の k inner twist とする．このとき $C_\Delta \backslash H^2(\mathsf{k}, Z_1)$ の中で $\gamma_{\mathsf{k}}(G) = \gamma_{\mathsf{k}}(G')$ ならば, G と G' は k 同型である．

Tate–Poitou の双対定理から

$$H^2(\mathsf{k}, Z_1) \cong H^0(\Gamma, X(Z_1)) = X(Z_1)^\Gamma = X(Z_1)^{[\Gamma]}$$

G_1 を単連結とすると

$$X(Z_1) \cong X/\langle \Delta \rangle_{\mathbf{Z}}$$

よって

$$C_\Delta \backslash H^2(\Gamma, Z_1) \cong C_\Delta \backslash (X/\langle \Delta \rangle_{\mathbf{Z}})^{[\Gamma]}$$

右辺は Γ 図形だけで記述される．まとめると

$$\left(\begin{array}{c}\text{連結単連結半単純}\\ \text{k 代数群の同型類集合}\end{array}\right) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \bigsqcup_{\substack{[X,\Delta,\emptyset,[\Gamma]] \in \mathfrak{S}_{\mathsf{k}} \\ \text{単連結}}} C_\Delta \backslash (X/\langle \Delta \rangle_{\mathbf{Z}})^{[\Gamma]}$$

$$\begin{pmatrix}\text{連結単連結半単純}\\ \text{k 代数群の同型類集合}\end{pmatrix} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \bigsqcup_{\substack{[X,\Delta,\phi,[\Gamma]]\in\mathfrak{S}_{\mathrm{k}}(e)\\ \text{単連結}}} C_\Delta\backslash(X/\langle\Delta\rangle_{\mathbb{Z}})^{[\Gamma]}$$

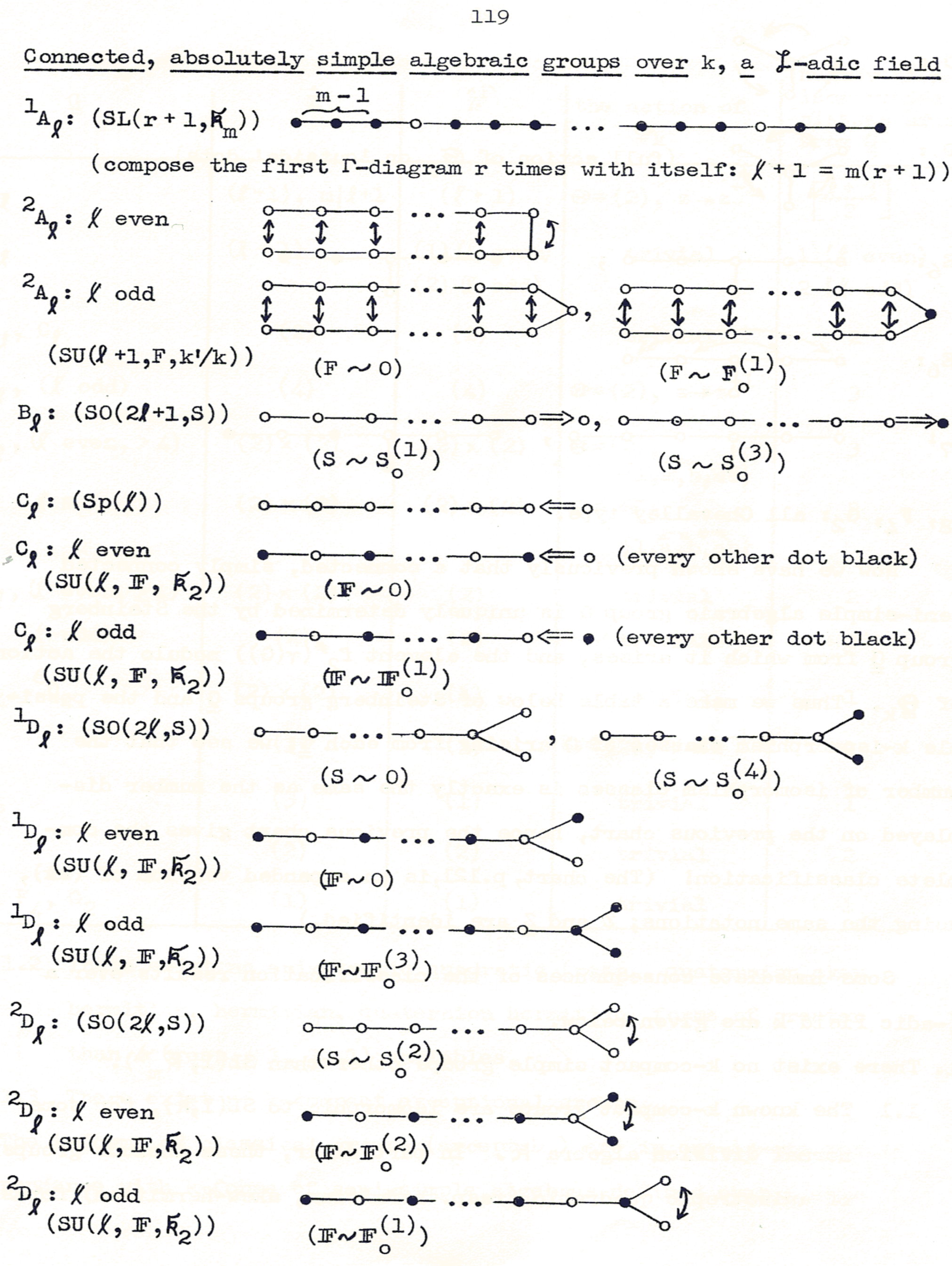
Satake1971 p.121

121

$\underline{G}$	$\hat{Z}$	$\hat{Z}^\Gamma$	the action of $\underline{\Theta}_k$	number of k-isomorphism classes arising from $\underline{G}$
$^1A_\ell$	$(\ell+1)$, $m\vert\ell+1$	$(\ell+1)$	$\Theta=(2)$, $z\to z^{-1}$	$\left[\frac{\ell+3}{2}\right]$
$^2A_\ell$	$(\ell+1)$	(1) (ℓ even) (2) (ℓ odd)	trivial	1 (ℓ even) 2 (ℓ odd)
B_ℓ, C_ℓ	(2)	(2)	trivial	2
$^1D_\ell$, (ℓ odd)	(4)	(4)	$\Theta=(2)$, $z\to z^{-1}$	3
$^1D_\ell$, (ℓ even, >4)	$(2)\times(2)$	$(2)\times(2)$	$\Theta=(2)$, $\{1,a,b,ab\}$	3
$\ell=4$	$(2)\times(2)$	$(2)\times(2)$	$\Theta=\mathfrak{S}_3$, $\{1,a,b,ab\}$	2
$^2D_\ell$, (ℓ even, ≥ 4)	$(2)\times(2)$	(2)	trivial	2
(ℓ odd)	(4)	(2)	trivial	2
$^3D_4$, $^6D_4$	$(2)\times(2)$	(1)	trivial	1
E_6	(3)	(3)	$\Theta=(2)$, $z\to z^{-1}$	2
$^2E_6$	(3)	(1)	trivial	1
E_7	(2)	(2)	trivial	2
E_8, F_4, G_2	(1)	(1)	trivial	1

許容的Γ図形 $\mathfrak{S}_k$ の分類

Satake1971 p.119



119

Connected, absolutely simple algebraic groups over k, a $\mathfrak{p}$-adic field

$^1A_\ell$: $(SL(r+1, K_m))$ — $m-1$

(compose the first Γ-diagram r times with itself: $\ell+1 = m(r+1)$)

$^2A_\ell$: ℓ even

$^2A_\ell$: ℓ odd

$(SU(\ell+1, F, k'/k))$ — $(F \sim 0)$, $(F \sim F_0^{(1)})$

B_ℓ: $(SO(2\ell+1, S))$ — $(S \sim S_0^{(1)})$, $(S \sim S_0^{(3)})$

C_ℓ: $(Sp(\ell))$

C_ℓ: ℓ even (every other dot black)

$(SU(\ell, \mathbb{F}, K_2))$ — $(\mathbb{F} \sim 0)$

C_ℓ: ℓ odd (every other dot black)

$(SU(\ell, \mathbb{F}, K_2))$ — $(\mathbb{F} \sim \mathbb{F}_0^{(1)})$

$^1D_\ell$: $(SO(2\ell, S))$ — $(S \sim 0)$, $(S \sim S_0^{(4)})$

$^1D_\ell$: ℓ even

$(SU(\ell, \mathbb{F}, K_2))$ — $(\mathbb{F} \sim 0)$

$^1D_\ell$: ℓ odd

$(SU(\ell, \mathbb{F}, K_2))$ — $(\mathbb{F} \sim \mathbb{F}_0^{(3)})$

$^2D_\ell$: $(SO(2\ell, S))$ — $(S \sim S_0^{(2)})$

$^2D_\ell$: ℓ even

$(SU(\ell, \mathbb{F}, K_2))$ — $(\mathbb{F} \sim \mathbb{F}_0^{(2)})$

$^2D_\ell$: ℓ odd

$(SU(\ell, \mathbb{F}, K_2))$ — $(\mathbb{F} \sim \mathbb{F}_0^{(1)})$

▶ 代数体の場合

1980 年代後半に, 代数体上の半単純代数群のガロアコホモロジーの計算が完了した.

k を有限次代数体とし, p_∞ を k の実素点の全体とする.

定理 5[Kneser, Harder, Sansuc, Chernousov]

G を連結半単純単連結 k 代数群で Z をその中心とし, 連結写像と自然な写像をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\delta &: H^1(\mathsf{k}, G/Z) \longrightarrow H^2(\mathsf{k}, Z) \\
i &: H^1(\mathsf{k}, G/Z) \longrightarrow \prod_{v\in\mathsf{p}_\infty} H^1(\mathsf{k}_v, G/Z) \\
j_\infty &: H^2(\mathsf{k}, Z) \longrightarrow \prod_{v\in\mathsf{p}_\infty} H^2(\mathsf{k}_v, Z) \\
\delta_\infty &: \prod_{v\in\mathsf{p}_\infty} H^1(\mathsf{k}_v, G/Z) \longrightarrow \prod_{v\in\mathsf{p}_\infty} H^2(\mathsf{k}_v, Z)
\end{aligned}$$

とする.

(1) δ と i は共に全射である.

(2) δ の $\mathrm{Ker}\, i$ への制限は, 全単射 $\mathrm{Ker}\, i \cong \mathrm{Ker}\, j_\infty$ を与える.

(3) j_∞ と δ_∞ のファイバー積を

$$H^2(\mathsf{k}, Z) \star \prod_{v\in\mathsf{p}_\infty} H^1(\mathsf{k}_v, G/Z)$$

とすると

$$\delta \times i : H^1(\mathsf{k}, G/Z) \longrightarrow H^2(\mathsf{k}, Z) \star \prod_{v\in\mathsf{p}_\infty} H^1(\mathsf{k}_v, G/Z)$$

は全単射である.

全単射

$$H^1(\mathsf{k}, G/Z) \xrightarrow{\delta\times i} H^2(\mathsf{k}, Z) \star \prod_{v\in\mathsf{p}_\infty} H^1(\mathsf{k}_v, G/Z)$$

を分類の形に書き直すと

系 [cf. Satake2001]

G_1 を連結半単純単連結な Steinberg 群, Z_1 を G_1 の中心とする.

$$\eta \times \{\xi_v\}_v \in H^2(\mathsf{k}, Z_1) \star \prod_{p\in\mathsf{p}_\infty} H^1(\mathsf{k}_v, G_1/Z_1)$$

が与えられたとき,

$$\exists\ \mathsf{k}\ \text{inner twist}\ \ G \xrightarrow{f} G_1$$
$$\text{such that}\quad \gamma_{\mathsf{k}}(G, f) = \eta, \qquad \beta_{\mathsf{k}_v}(G, f) = \xi_v \quad (\forall v \in \mathsf{p}_\infty)$$

このような (G, f) は次の意味で一意である. 即ち, (G', f') を同様なもう一組とすると

$$\exists\ \mathsf{k}\ \text{同型}\ \ G \xrightarrow{\varphi} G'\ \ \text{such that}\ \ f' \circ \varphi \circ f^{-1} \in \mathrm{Inn}(G_1)$$

p を k の素点すべての集合とすると, 標準写像

$$j : H^2(\mathsf{k}, Z_1) \longrightarrow {\prod_{v\in\mathsf{p}}}' H^2(\mathsf{k}_v, Z_1)$$

は単射であるから, $\eta \in H^2(\mathsf{k}, Z_1)$ は $j(\eta) = (\eta_v)_{v\in\mathsf{p}}$ で決まる.

例 $\mathbf{Q}$ 上の直交群 B_ℓ 型のケース

$n = 2\ell + 1$ として, $G_1 = \mathrm{Spin}(n)$ とすると, $Z_1 = \mu_2$ より

$$H^2(\mathbf{Q}, Z_1) = \mathrm{Br}(\mathbf{Q})_2 \longrightarrow \prod_{p\le\infty}{}' \mathrm{Br}(\mathbf{Q}_p)_2$$

また G_1 の Γ 図形 $[X, B_\ell, \emptyset, e]$ より

$$H^1(\mathbf{R}, G_1/Z_1) \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{単連結}\,\Gamma\,\text{図形}\,[X, B_\ell, \Delta_0, e] \\ \Delta_0 = B_{\ell-r}, 0 \le r \le \ell \end{matrix} \right\}$$

$$\overbrace{\circ - \cdots\cdots - \circ - \underbrace{\bullet - \cdots\cdots \bullet \Longrightarrow \bullet}_{\ell-r}}^{\ell}$$

$\eta \times \xi_\infty \in H^2(\mathbf{Q}, Z_1) \star H^1(\mathbf{R}, G_1/Z_1)$ とすると, ある r で

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_\infty &\longleftrightarrow [X, B_\ell, B_{\ell-r}, e] \\ &\longleftrightarrow \text{符号数}\,(n-r, r)\,\text{の}\,n\,\text{次元}\,2\,\text{次空間}\,V_\infty\,\text{の Spin 群} \end{aligned}}$$

$j(\eta) = (\eta_p)$ とすると, 各 $p \neq \infty$ で

$$\boxed{\begin{gathered} \exists\, n\,\text{次元}\,2\,\text{次空間}\,V_p\ \ \text{such that} \\ \eta_p = V_p\,\text{の Hasse 不変量 (even Clifford 代数の Brauer 類)} \end{gathered}}$$

このとき, Minkowski–Hasse の定理から

$$\exists\, n\,\text{次元}\,2\,\text{次空間}\,V/\mathbf{Q}\ \ \text{such that}\ \ V \otimes \mathbf{Q}_p = V_p\ \ (\forall p \le \infty)$$

であり

$$\eta \times \xi_\infty \longleftrightarrow G = \mathrm{Spin}(V)$$

補足

同型類の Hasse 原理について.
G, G' を共に k 上の連結単連結単純群とする.

$$\mathsf{k} \text{ の任意の素点 } v \text{ で } G_v \cong G'_v \implies G \cong G' \ ?$$

これは一般には不成立. 詳しくは

- $B_n, C_n, G_2, F_4, E_7, E_8$ では成立.
- A_n, D_n, E_6 では不成立. (外部自己同型群が自明でないことによる.)