$\mathrm{GL}(n)/\mathsf{k}$ の非線形的簡約理論: $\mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty)/\Gamma_i$ の基本領域の構成レシピ

Takao Watanabe
2015 年 3 月 14 日 上智大学

以下は Lee Tim Weng 君の修士論文の結果である. 有限次代数体 k を固定して, その整数環を o, 無限素点 (または有限素点) の集合を p_∞ (または p_f) とする. k のアデールを $\mathbf{A}$, ノルム 1 のイデール群を $\mathbf{A}^1$, $\mathsf{k}_\infty = \prod_{\sigma\in\mathsf{p}_\infty}\mathsf{k}_\sigma$ と表す. アデール群 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})$ の標準的な極大コンパクト部分群を $K = K_\infty \times K_f$ とする. 行列のサイズ n を明示する場合は, $K^{(n)}, K_\infty^{(n)}, K_f^{(n)}$ などと表す.

1 イデアル類群の代表系

k の類数を h として, イデアル類群の代表系で整イデアルであるもの $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_h$ を固定する. ただし $\mathfrak{a}_1 = \mathsf{o}$ とする. 各 $\mathfrak{a}_i$ に対し, $\alpha_i \in \mathbf{A}^1$ を $\alpha_i(\mathsf{k}_\infty \times \prod_{\sigma\in\mathsf{p}_f}\mathsf{o}_\sigma) \cap \mathsf{k} = \mathfrak{a}_i$ が成り立つようにとる. また r 次の対角行列

$$\eta_i^{(r)} := \mathrm{diag}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{r-1}, \alpha_i) \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{A})^1$$

をとり, $r = n$ のときは単に $\eta_i^{(n)}$ を η_i と表す.

2 格子の類の代表系と数論的離散群

k^n の中のランク n の射影的 o 加群全体の集合を $\mathfrak{L}_n$ とすると, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})^1$ は $\mathfrak{L}_n$ に推移的に作用する. 即ち, $L \in \mathfrak{L}_n$, $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A})^1$ に対し $gL := (\mathsf{k}_\infty^n \times \prod_{\sigma\in\mathsf{p}_f} g_\sigma L_\sigma) \cap \mathsf{k}^n$. とくに

$$\Lambda_i := \mathsf{o}e_1 + \cdots + \mathsf{o}e_{n-1} + \mathfrak{a}_i e_n$$

とすれば, $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_h$ は $\mathrm{GL}_n(\mathsf{k})\backslash\mathfrak{L}_n$ の完全代表系である. η_i の定義により $\eta_i\Lambda_1 = \Lambda_i$ となる. $\mathrm{GL}_n(\mathsf{k})$ の中の Λ_i の固定化群を Γ_i とおく. $\Gamma_1 = \mathrm{GL}_n(\mathsf{o})$ である.

3 Γ_i に関するカスプの代表系

$1 \le m \le n-1$ を固定して, 極大放物的部分群

$$Q(\mathsf{k}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a \in \mathrm{GL}_m(\mathsf{k}),\ b \in \mathrm{M}_{m,n-m}(\mathsf{k}),\ d \in \mathrm{GL}_{n-m}(\mathsf{k}) \right\}$$

をとる. 以下では $Q(\mathsf{k})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathsf{k})/\Gamma_i$ の完全代表系を与える. 各 $\mathfrak{a}_j$ に対し

$$\exists\kappa_{ij} \in \mathsf{k}^\times \ \text{ such that } \ \kappa_{ij}\mathfrak{a}_j^{-1}\mathfrak{a}_i \in \mathsf{o} \ \text{ and } \ \mathfrak{a}_j + \kappa_{ij}\mathfrak{a}_j^{-1}\mathfrak{a}_i = \mathsf{o}.$$

このとき, $\alpha'_{ij} \in \mathfrak{a}_j$ と $\alpha''_{ij} \in \mathfrak{a}_j^{-1}\mathfrak{a}_i$ を $\alpha'_{ij} + \kappa_{ij}\alpha''_{ij} = 1$ を満たすようにとり

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} I_{m-1} & & & \\ & \alpha'_{ij} & & \kappa_{ij} \\ & & I_{n-m-1} & \\ & -\alpha''_{ij} & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{k})$$

とおく. 定義から

$$\xi_{ij}\Lambda_i = \mathsf{o}e_1 + \cdots + \mathsf{o}e_{m-1} + \mathfrak{a}_j e_m + \mathsf{o}e_{m+1} + \cdots + \mathsf{o}e_{n-1} + \mathfrak{a}_j^{-1}\mathfrak{a}_i e_n$$

となり, さらに次が成り立つ.

Proposition (Weng)**.** $\{\xi_{i1}, \cdots, \xi_{ih}\}$ は $Q(\mathsf{k})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathsf{k})/\Gamma_i$ の完全代表系である.

4 Humbert 形式の凸錘

各 $\sigma \in \mathsf{p}_\infty$ に対し, $\mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\sigma)$ を n 次正定値対称 (または Hermite) 行列のなす凸錘とし,

$$\mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty) := \prod_{\sigma \in \mathsf{p}_\infty} \mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\sigma)$$

とおく. $\mathrm{GL}_n(\mathsf{k}_\infty)$ は通常のように右から推移的に作用し, 任意の $A \in \mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty)$ は

$$A = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ {}^t\overline{u}_A & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{[m]} & 0 \\ 0 & A_{[n-m]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & u_A \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix},$$
$$\Big(A^{[m]} \in \mathsf{P}_m(\mathsf{k}_\infty), \ \ A_{[n-m]} \in \mathsf{P}_{n-m}(\mathsf{k}_\infty), \ \ u_A \in \mathrm{M}_{m,n-m}(\mathsf{k}_\infty) \Big)$$

と表せる. 固定した $\mathfrak{a}_i$ に対し,

$$\mathsf{P}_n^i := \left\{ A \in \mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty) \,:\, \prod_{\sigma \in \mathsf{p}_\infty} |\det A_\sigma|_{\mathsf{k}_\sigma} = \mathrm{Nr}(\mathfrak{a}_i)^{-2} \right\}$$

とおく. 写像 $\pi_{ij} : \mathrm{GL}_n(\mathsf{k}_\infty) \longrightarrow \mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty)$ を $\pi_i(g) = {}^t\overline{g}^{-1} {}^t\overline{\xi}_{ij}^{-1} \eta_{i,\infty}^2 \xi_{ij}^{-1} g^{-1}$ と定義すれば次が成立:

$$\mathrm{GL}_n(\mathsf{k}_\infty)^1/(\xi_{ij}\eta_i)_\infty K_\infty (\xi_{ij}\eta_i)_\infty^{-1} \cong \pi_{ij}(\mathrm{GL}_n(\mathsf{k}_\infty)^1) = \mathsf{P}_n^i\,.$$

また $\mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty)$ の中の領域 $\mathsf{F}_{n,m}^{i,j}$ を

$$\mathsf{F}_{n,,m}^{i,j} := \left\{ A \in \mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty) \,:\, |\det A^{[m]}|_{\mathsf{k}_\infty} \le \frac{\mathrm{Nr}(\mathfrak{a}_k)^2}{\mathrm{Nr}(\mathfrak{a}_j)^2} |\det A[\xi_{ij}\gamma\xi_{ik}^{-1}]^{[m]}|_{\mathsf{k}_\infty}, \ \ \begin{matrix} \forall \gamma \in \Gamma_i, \\ k = 1, \cdots, h \end{matrix} \right\}$$

と定義する.

5 $\mathrm{GL}_n(\mathsf{k})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{A})^1$, $\mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty)/\Gamma_i$, P_n^i/Γ_i の基本領域

$1 \le k, \ell \le h$ に対し

$$\Gamma_{k,\ell}^m := (\eta_k^{(m)}(\eta_\ell^{(m)})^{-1}) \left\{ \mathrm{GL}_m(\mathsf{k}_\infty) \times K_f^{(m)} \right\} (\eta_k^{(m)}(\eta_\ell^{(m)})^{-1})^{-1} \cap \mathrm{GL}_m(\mathsf{k})$$

とおき, 同様に $\Gamma_{k,\ell}^{n-m}$ を定義する. これらの離散群について

$$\mathfrak{B}_j = \mathsf{P}_m(\mathsf{k}_\infty)/\Gamma_{j,1}^m \text{ の基本領域}, \quad \mathfrak{C}_{ij} = \mathsf{P}_{n-m}(\mathsf{k}_\infty)/\Gamma_{i,j}^{n-m} \text{ の基本領域}$$

を取り固定する. 更に

$$\mathfrak{D}_{ij} := \left\{ \begin{pmatrix} \delta & u \\ v & w \end{pmatrix} \,:\, \begin{matrix} \delta \in \mathrm{M}_{m-1,n-m-1}(\mathsf{k}_\infty/\mathsf{o}), & u \in \mathrm{M}_{m-1,1}(\mathsf{k}_\infty/\mathfrak{a}_i^{-1}\mathfrak{a}_j) \\ v \in \mathrm{M}_{1,n-m-1}(\mathsf{k}_\infty/\mathfrak{a}_j), & w \in \mathsf{k}_\infty/\mathfrak{a}_i^{-1}\mathfrak{a}_j^2 \end{matrix} \right\} \subset \mathrm{M}_{m,n-m}(\mathsf{k}_\infty)$$

をとる. ここで $\mathsf{k}_\infty/\mathsf{o}$ は, 加法群としての k_∞ における o の基本領域と同一視している.

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_{n,m}^{i,j} &= \mathsf{F}_{n,m}^{i,j}(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{C}_{i,j}, \mathfrak{D}_{i,j}) \\ &:= \{ A \in \mathsf{F}_{n,m}^{i,j} \,:\, A^{[m]} \in \mathfrak{B}_j, \ A_{[n-m]} \in \mathfrak{C}_{i,j}, \ u_A \in \mathfrak{D}_{i,j} \} \end{aligned}$$

と定義する.

Theorem (Weng)**.** 上の記号のもとで
(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})^1$ の中の領域

$$\bigsqcup_{1\le i,j\le h} \pi_{i,j}^{-1}(\mathsf{F}_{n,m}^{i,j}\cap \mathsf{P}_n^i)\xi_{ij}\eta_i K_f$$

は $\mathrm{GL}_n(\mathsf{k})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})^1$ の基本領域である.
(2) P_n^i の中の領域

$$\mathsf{P}_n^i \cap \bigcup_{j=1}^h {}^t\overline{\xi}_{ij}^{-1}\mathsf{F}_{n,m}^{i,j}\xi_{i,j}^{-1}$$

は P_n^i/Γ_i の基本領域である.
(3) $\mathsf{F}_{n,m}^{i,j}$ を与える $\mathfrak{B}_j, \mathfrak{C}_{i,j}$ がすべて正のスカラー倍で不変ならば

$$\bigcup_{j=1}^h {}^t\overline{\xi}_{ij}^{-1}\mathsf{F}_{n,m}^{i,j}\xi_{i,j}^{-1}$$

は $\mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty)/\Gamma_i$ の基本領域である.

6 $\mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty)/\Gamma_i$ の基本領域の帰納的構成

$m=n-1$ として, 以下のように帰納的に基本領域が構成できる.

- $n=1$ のとき, 任意の i,j について $\Gamma_{i,j}^1=\mathsf{o}^\times$ であり, 線形的簡約理論 (Voronoi 簡約理論の代数体版) から $\mathsf{P}_1(\mathsf{k}_\infty)/\mathsf{o}^\times$ の基本領域 Ω_1 で正のスカラー倍により不変なものが取れる.

- $n=2$ のとき, 定理から

$$\Omega_2^i := \bigcup_{j=1}^h {}^t\overline{\xi}_{ij}^{-1}\mathsf{F}_{2,1}^{i,j}(\Omega_1,\Omega_1,\mathsf{k}_\infty/\mathfrak{a}_i^{-1}\mathfrak{a}_j^2)\xi_{ij}^{-1}$$

  が $\mathsf{P}_2(\mathsf{k}_\infty)/\Gamma_i$ の基本領域となり, これは正のスカラー倍により不変.

- Ω_{n-1}^i が定義されたとすると

$$\Omega_n^i := \bigcup_{j=1}^h {}^t\overline{\xi}_{ij}^{-1}\mathsf{F}_{n,n-1}^{i,j}(\Omega_{n-1}^j,\Omega_1,\mathfrak{D}_{i,j})\xi_{ij}^{-1}$$

  が $\mathsf{P}_n(\mathsf{k}_\infty)/\Gamma_i$ の基本領域となり, これは正のスカラー倍により不変.