

# **A bound of the number of reduced Arakelov divisors of a number field**

(joint work with Ryusuke Yoshimitsu)

Takao Watanabe

Department of Mathematics

Osaka University

今回の話の目的は, Schoofの論文

## Computing Arakelov class groups

RENÉ SCHOOF

ABSTRACT. Shanks's infrastructure algorithm and Buchmann's algorithm for computing class groups and unit groups of rings of integers of algebraic number fields are most naturally viewed as computations inside Arakelov class groups. In this paper we discuss the basic properties of Arakelov class groups and of the set of reduced Arakelov divisors. As an application we describe Buchmann's algorithm in this context.

Algorithmic Number Theory, MSRI Publications Vol.44, 2006

にある簡約 Arakelov 因子の個数の評価

COROLLARY 7.9. *Let  $F$  be a number field of degree  $n$ . Then*

$$\#\text{Red}_F \leq \text{vol}(\widetilde{\text{Pic}}_F^0) \cdot 6^n.$$

の改良である.

## 1 簡約イデアル

## 2 実2次体の簡約イデアル

## 3 $r_F$ の評価

## 4 証明の概略

### 4-1 $F$ の有向 Arakelov 因子

### 4-2 有向 Arakelov 類群

### 4-3 Schoof の定理

### 4-4 $\text{Vol}(\Omega_a)$ の計算

### 4-5 $\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap H_e)$ の評価

## 5 凸体の slicing theorem 概観

## 1 簡約イデアル

$F$  :  $n$  次代数体, 判別式  $\Delta_F$

$\mathcal{O}_F \subset F$  : 整数環

$$F_{\mathbf{R}} := F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} = \prod_{\sigma \in V_{\infty}} F_{\sigma} = \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2}$$

$(n = r_1 + 2r_2)$

$\text{Id}_F$  を  $F$  の分数イデアル群とする.

**定義** 分数イデアル  $\mathfrak{a} \in \text{Id}_F$  が次の2条件を満たすとき, **簡約イデアル**という.

- $1 \in \mathfrak{a}$ , 即ち  $\mathcal{O}_F \subset \mathfrak{a}$ .
- $a \in \mathfrak{a}$  が  $|\sigma(a)| < 1$  ( $\forall \sigma \in V_{\infty}$ ) を満たすならば,  $a = 0$  である.

$\mathfrak{a}$  は  $F_{\mathbf{R}}$  の格子とみなせる. 2番目の条件は, 1が  $F_{\mathbf{R}}$  の max-norm に関して  $\mathfrak{a}$  の最短ベクトルになっていることを意味する.

$\text{Red}_F$  を簡約イデアル全体の集合とする.

補題  $\mathfrak{a} \in \text{Red}_F$  ならば,  $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{O}_F$  かつ

$$\text{Nr}(\mathfrak{a}^{-1}) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|\Delta_F|} \quad (=: \partial_F \text{ とおく})$$

証明  $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{O}_F$  は定義から自明.  $F_{\mathbf{R}}$  の凸体

$$C := \{(x_{\sigma})_{\sigma \in V_{\infty}} \in F_{\mathbf{R}} : |x_{\sigma}| \leq (\text{Nr}(\mathfrak{a})\partial_F)^{1/n}\}$$

をとる.  $\mathfrak{a}$  を  $F_{\mathbf{R}}$  の格子とみなし,  $C$  に Minkowski の凸体定理を適用すると,

$$0 \neq \exists (x_{\sigma}) \in C \cap \mathfrak{a}$$

$1 \in \mathfrak{a}$  が最短ベクトルだから,

$$\exists \sigma \in V_{\infty}, \text{ s.t. } 1 \leq |x_{\sigma}|$$

よって  $\text{Nr}(\mathfrak{a}^{-1}) \leq \partial_F$ . (qed)

ノルムが一定の定数以下の整イデアルの個数は有限だから

$$r_F := \#\text{Red}_F < \infty$$

となる.

## 2 実 2 次体の簡約イデアル

$F = \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ ,  $\Delta_F = \Delta > 0$  とする.

2 元 2 次形式 判別式  $\Delta$  の  $\mathbf{Z}$ -係数 2 元 2 次形式

$$q(x, y) = [a, b, c] := ax^2 + bxy + cy^2$$
$$(a, b, c \in \mathbf{Z}, b^2 - 4ac = \Delta)$$

を考える.  $q$  が

$$|\sqrt{\Delta} - 2|a|| < b < \sqrt{\Delta}$$

を満たすとき, これを**簡約形式**という. 定義から

$[a, b, c]$  が簡約形式  $\iff [-a, b, -c]$  が簡約形式

$\mathcal{F}_\Delta :=$  判別式  $\Delta$  の  $\mathbf{Z}$ -係数 2 元 2 次形式全体

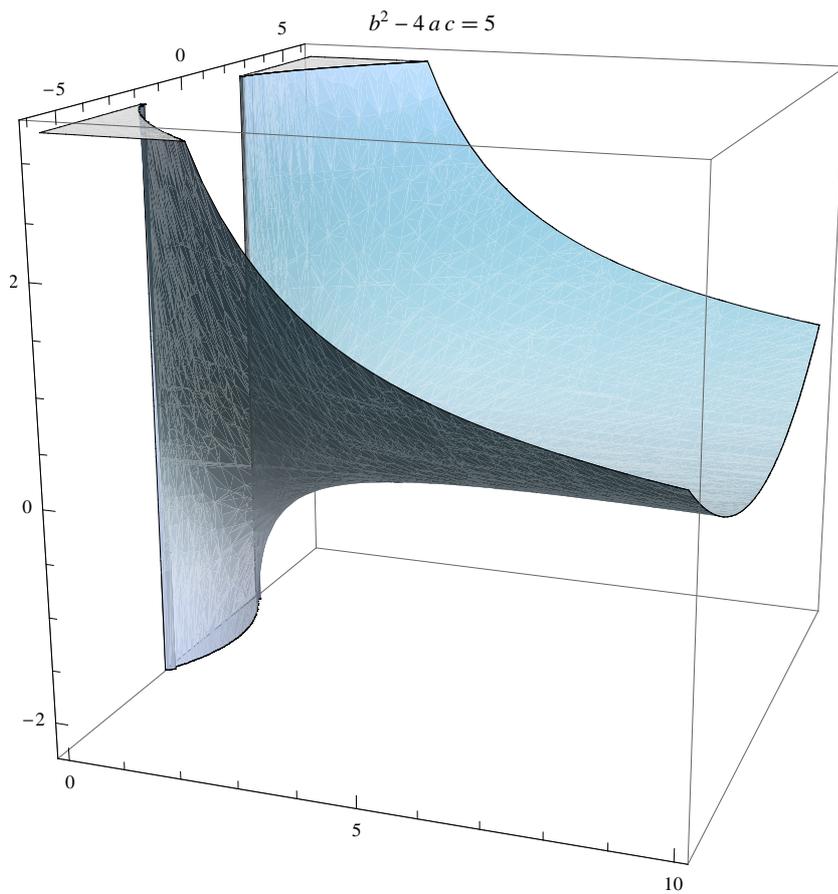
$\mathcal{RF}_\Delta := \mathcal{F}_\Delta$  中の簡約形式全体

とすると,  $\mathcal{F}_\Delta$  には  $SL_2(\mathbf{Z})$  が作用して

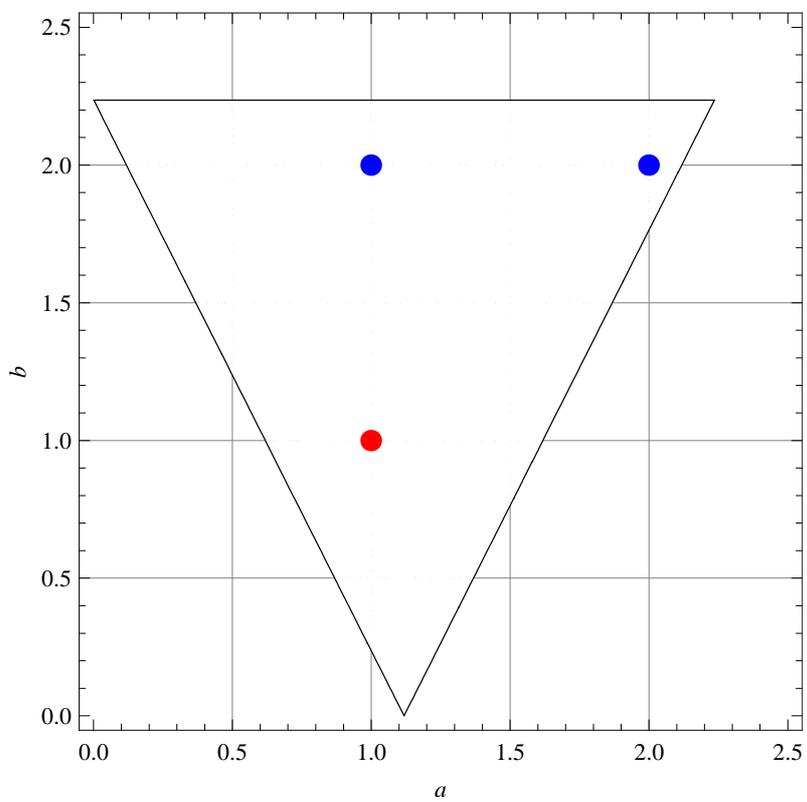
$$\mathcal{F}_\Delta = SL_2(\mathbf{Z}) \cdot \mathcal{RF}_\Delta$$

が成り立つ.

例  $\Delta = 5$



$$|\sqrt{5} - 2|a|| < b < \sqrt{5}$$



## 簡約化作用素

$$\mathcal{F}_\Delta = SL_2(\mathbf{Z}) \cdot \mathcal{RF}_\Delta$$

$q = [a, b, c] \in \mathcal{F}_\Delta$  に対し,  $q$  と  $SL_2(\mathbf{Z})$ -同値な簡約形式は次の計算で求まる. まず,  $s(q) \in \mathbf{Z}$  を

$$s(q) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(c) \lfloor \frac{b}{2|c|} \rfloor & (|c| \geq \sqrt{\Delta}) \\ \operatorname{sgn}(c) \lfloor \frac{\sqrt{\Delta}+b}{2|c|} \rfloor & (|c| < \sqrt{\Delta}) \end{cases}$$

( $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  を超えない最大の整数)

で定める. これから

$$\rho(q) := [c, -b + 2c \cdot s(q), c \cdot s(q)^2 - b \cdot s(q) + a]$$

とおく. このとき,

$$0 \leq \exists m \in \mathbf{Z}, \quad \rho^m(q) \in \mathcal{RF}_\Delta$$

が成り立つ. この  $\rho$  を簡約化作用素とよぶ.

例  $q = [-1360889, -747003, -102509] \in \mathcal{F}_5$  に対し,  $\rho^5(q) = [-1, 1, 1] \in \mathcal{RF}_5$ .

簡約化作用素の大事な性質の一つは

$$q \text{ が簡約形式} \implies \rho(q) \text{ も簡約形式}$$

即ち,  $\rho$  は  $\mathcal{RF}_\Delta$  に作用する.

$$\mathcal{RF}_\Delta / \langle \rho \rangle := \rho\text{-軌道の集合}$$

とおくと, よく知られている定理は

$$F \text{ の狭義イデアル類数} = \#(\mathcal{RF}_\Delta / \langle \rho \rangle)$$

$F$  の簡約イデアル  $q = [a, b, c]$  は簡約形式で  $a > 0$  と仮定する. このとき, 分数イデアル

$$\mathfrak{a}_q := \mathbf{Z} + \frac{b + \sqrt{D}}{2a} \mathbf{Z}$$

は簡約イデアルとなり, 対応  $q \mapsto \mathfrak{a}_q$  は全単射

$$\{[a, b, c] \in \mathcal{RF}_\Delta : a > 0\} \xrightarrow{\cong} \text{Red}_F$$

を与える. よって

$$r_F = \frac{\#(\mathcal{RF}_\Delta)}{2}$$

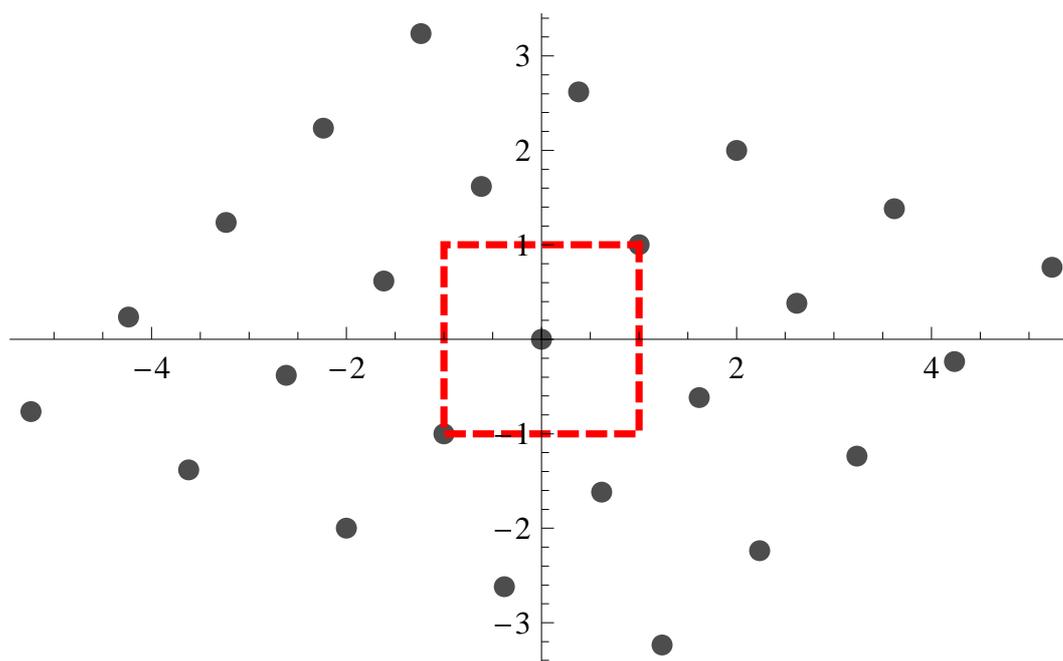
例  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  のとき,

$$\mathcal{RF}_5 = \{[1, 1, -1], [-1, 1, 1]\}$$

で

$$\mathfrak{a}_{[1,1,-1]} = \mathbb{Z} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\mathbb{Z} = \mathfrak{O}_F$$

が唯一の簡約イデアルとなる.



$\mathbb{Q}(\sqrt{5})_{\mathbb{R}}$  中の  $\mathfrak{O}_F$ -格子点

### 3 $r_F$ の評価

定理  $F$  を任意の代数体とするとき

$$\frac{(r_1 + r_2 - 1)! R_F h_F}{(\log \partial_F)^{r_1 + r_2 - 1}} \leq r_F$$

$$r_F \leq \frac{\pi R_F h_F}{2^{r_2} w_F \rho^{n-1} J_{r_1, r_2}} \leq \frac{2\sqrt{r_1 + \pi r_2} R_F h_F}{w_F \rho^{n-1}}$$

ここで

$R_F := F$  の単数規準

$h_F := F$  の類数

$w_F := F$  に含まれる 1 のべき根の個数

$$\partial_F := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|\Delta_F|}$$

$$\rho := \frac{1}{2} \log \frac{4}{3}$$

$$J_{r_1, r_2} := \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r_1} \left(\frac{J_1(2t)}{2t}\right)^{r_2} dt$$

( $J_1(t)$  は Bessel 関数)

数値例  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_F})$  を実 2 次体とすれば, 定理は

$$\frac{2R_F h_F}{\log |\Delta_F|} \leq r_F \leq \frac{2R_F h_F}{\log(4/3)} \leq \frac{2\sqrt{2}R_F h_F}{\log(4/3)}$$

となる. 実際の数値は次のようになる.

$\Delta_F$	LB	$r_F$	UB
5	0.59	1	3.34
8	0.84	1	6.13
12	1.06	2	9.16
13	0.93	1	6.95
17	1.47	3	14.58
21	1.02	2	10.90
24	1.43	2	15.95
28	1.62	4	19.27
29	0.97	1	11.46
33	2.19	4	26.64
37	1.38	3	17.34
40	1.97	4	25.30
41	2.24	5	28.94
44	1.58	2	20.83
53	0.99	1	13.68
1173	3.17	10	78.04
1313	7.92	26	197.89

## 4 証明の概略

下からの評価

$$\frac{(r_1 + r_2 - 1)! R_F h_F}{(\log \partial_F)^{r_1 + r_2 - 1}} \leq r_F$$

は容易であるから, 上からの評価

$$r_F \leq \frac{\pi R_F h_F}{2^{r_2} w_F \rho^{n-1} J_{r_1, r_2}} \leq \frac{2\sqrt{r_1 + \pi r_2} R_F h_F}{w_F \rho^{n-1}}$$

を示す. そのために

- 有向 Arakelov 因子についての Schoof の定理
- Vaaler の cube slicing theorem

を用いる.

## 4-1 $F$ の有向 Arakelov 因子

有向 Arakelov 因子 とは、次の形の形式和である。

$$D^* = \sum_{\sigma \in V_\infty} \lambda_\sigma \sigma + \sum_{p \in V_f} n_p p$$

ここで、

$$\lambda_\sigma \in F_\sigma^\times, \quad n_p \in \mathbf{Z} \quad (n_p = 0 \text{ a.a. } p \in V_f)$$

とする。有向 Arakelov 因子全体の群を

$$\widetilde{\text{Div}}_F := \left( \bigoplus_{\sigma \in V_\infty} F_\sigma^\times \sigma \right) \oplus \left( \bigoplus_{p \in V_f} \mathbf{Z} p \right).$$

と表す。次の同型がある。

$$\text{div}^* : \text{Id}_F \times F_{\mathbf{R}}^\times \longrightarrow \widetilde{\text{Div}}_F$$

$$\text{div}^*(a, u) := \sum_{\sigma \in V_\infty} u_\sigma^{-1} \sigma + \sum_{p \in V_f} n_p p$$

ここで

$$a = \prod p^{-n_p} \in \text{Id}_F, \quad u = (u_\sigma) \in F_{\mathbf{R}}^\times$$

とする。

## 4-2 有向 Arakelov 類群

$D^*$  の次数  $\deg(D^*)$  を

$$\deg(D^*) := \sum_{\sigma \in V_\infty} d_\sigma \log |\lambda_\sigma| + \sum_{\mathfrak{p} \in V_f} d_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}}$$

$$(d_\sigma = [F_\sigma : \mathbf{R}], d_{\mathfrak{p}} = \#(\mathfrak{O}_F/\mathfrak{p}))$$

により定める. 次数 0 の部分群を

$$\widetilde{\text{Div}}_F^0 := \{D^* : \deg(D^*) = 0\}$$

とおく.  $a \in F^\times$  に対し, 主因子を

$$\text{pd}^*(a) := \text{div}^*(a^{-1} \mathfrak{O}_F, (\sigma(a))_{\sigma \in V_\infty})$$

により定義すると, これは  $\widetilde{\text{Div}}_F^0$  に含まれる. そこで剰余群

$$\widetilde{\text{Pic}}_F^0 := \widetilde{\text{Div}}_F^0 / \text{pd}^*(F^\times)$$

を  $F$  の有向 Arakelov 類群 という.

$\widetilde{\text{Pic}}_F^0$  は,  $F$  の狭義イデアル類群  $\text{Cl}_{F,+}$  と関係している. 自然な射影

$$\widetilde{\text{Div}}_F^0 \longrightarrow \text{Id}_F : \text{div}^*(\mathfrak{a}, u) \mapsto \mathfrak{a}$$

から, 次の完全列が従う.

$$0 \longrightarrow \tilde{T}^0 \longrightarrow \widetilde{\text{Pic}}_F^0 \longrightarrow \text{Cl}_{F,+} \longrightarrow 0$$

ここで

$$\tilde{T}^0 := F_{\mathbf{R},1}^0 / \mathcal{O}_F^\times \cap F_{\mathbf{R},1}^0$$

は  $n-1$ 次元コンパクトトーラス で,

$$F_{\mathbf{R},1}^0 := \{(u_\sigma) \in F_{\mathbf{R},1} : \text{Nr}_{F_{\mathbf{R}}}(u) = 1\}$$

かつ

$$F_{\mathbf{R},1} := \{(u_\sigma) \in F_{\mathbf{R}}^\times : u_\sigma > 0 \text{ if } F_\sigma = \mathbf{R}\}$$

とする.  $F_{\mathbf{R},1}$  は  $F_{\mathbf{R}}^\times$  の 1 の連結成分である.

この完全列

$$0 \longrightarrow \tilde{T}^0 \longrightarrow \widetilde{\text{Pic}}_F^0 \longrightarrow \text{Cl}_{F,+} \longrightarrow 0$$

から,  $\widetilde{\text{Pic}}_F^0$  はコンパクト Lie 群の構造を持つ. その単位連結成分の群が  $\tilde{T}^0$  で, 連結成分のなす群が  $\pi_0(\widetilde{\text{Pic}}_F^0) \cong \text{Cl}_{F,+}$  である.

とくに,  $\widetilde{\text{Pic}}_F^0$  は不変測度をもつ. ここでは次のように正規化された不変測度を使う.

$$\text{Vol}(\widetilde{\text{Pic}}_F^0) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_F} \sqrt{n} R_F h_F.$$

### 4-3 Schoof の定理

簡約イデアル  $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{-n_{\mathfrak{p}}} \in \text{Red}_F$  に対し,

$$\text{div}^*(\mathfrak{a}, \text{Nr}(\mathfrak{a})^{-\frac{1}{n}}) = \sum_{\sigma \in V_{\infty}} \text{Nr}(\mathfrak{a})^{\frac{1}{n}} \sigma + \sum_{\mathfrak{p} \in V_f} n_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$$

で定まる有向 Arakelov 因子を簡約 Arakelov 因子とよぶ。

これから, 部分集合  $\Omega_{\mathfrak{a}} \subset \widetilde{\text{Div}}_F^0$  を

$$\Omega_{\mathfrak{a}} := \left\{ \text{div}^*(\mathfrak{a}, \text{Nr}(\mathfrak{a})^{-\frac{1}{n}} u) : \begin{array}{l} u = (u_{\sigma}) \in F_{\mathbb{R},1}^0 \\ |\log u_{\sigma}| < \rho \\ (\forall \sigma \in V_{\infty}) \end{array} \right\}$$

と定める。

定理[Schoof, 2006] これらの  $\Omega_{\mathfrak{a}}$ ,  $\mathfrak{a} \in \text{Red}_F$ , は互いに disjoint で, その和集合

$$\bigsqcup_{\mathfrak{a} \in \text{Red}_F} \Omega_{\mathfrak{a}}$$

は, 自然な写像  $\widetilde{\text{Div}}_F^0 \rightarrow \widetilde{\text{Pic}}_F^0$  により  $\widetilde{\text{Pic}}_F^0$  に埋め込まれる。

定理から

$$\bigsqcup_{\alpha \in \text{Red}_F} \Omega_\alpha \subset \widetilde{\text{Pic}}_F^0$$

よって

$$\sum_{\alpha \in \text{Red}_F} \text{Vol}(\Omega_\alpha) \leq \text{Vol}(\widetilde{\text{Pic}}_F^0).$$

である。不変測度だから、 $\text{Vol}(\Omega_\alpha)$  の値は  $\alpha$  に依存しない。したがって一つの  $\alpha \in \text{Red}_F$  を固定すれば

$$r_F \cdot \text{Vol}(\Omega_\alpha) \leq \text{Vol}(\widetilde{\text{Pic}}_F^0)$$

が成り立つ。

#### 4-4 Vol( $\Omega_a$ ) の計算

$F_{\mathbf{R}}$  と  $\mathbf{R}^n$  を同一視し,  $\omega_{\mathbf{R}^n}$  を  $\mathbf{R}^n$  の Lebesgue 測度とする.  $\widetilde{\text{Pic}}_F^0$  の測度と  $\omega_{\mathbf{R}^n}$  の比較により次の関係を得る.

$$\text{Vol}(\Omega_a) = 2^{r_2} \cdot \sqrt{\frac{n}{r_1 + 4r_2}} \cdot \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap H_e)$$

ここで,

$$e := \frac{1}{\sqrt{r_1 + 4r_2}}(1, \dots, 1, 2, 0, 2, 0, \dots, 2, 0)$$

は  $\mathbf{R}^n$  の (通常の内積による) 単位ベクトルで,

$$H_e := \langle e \rangle^\perp \subset \mathbf{R}^n$$

はその直交補空間である. また

$$K_\rho := I_\rho^{r_1} \times D_\rho^{r_2} \subset \mathbf{R}^n$$

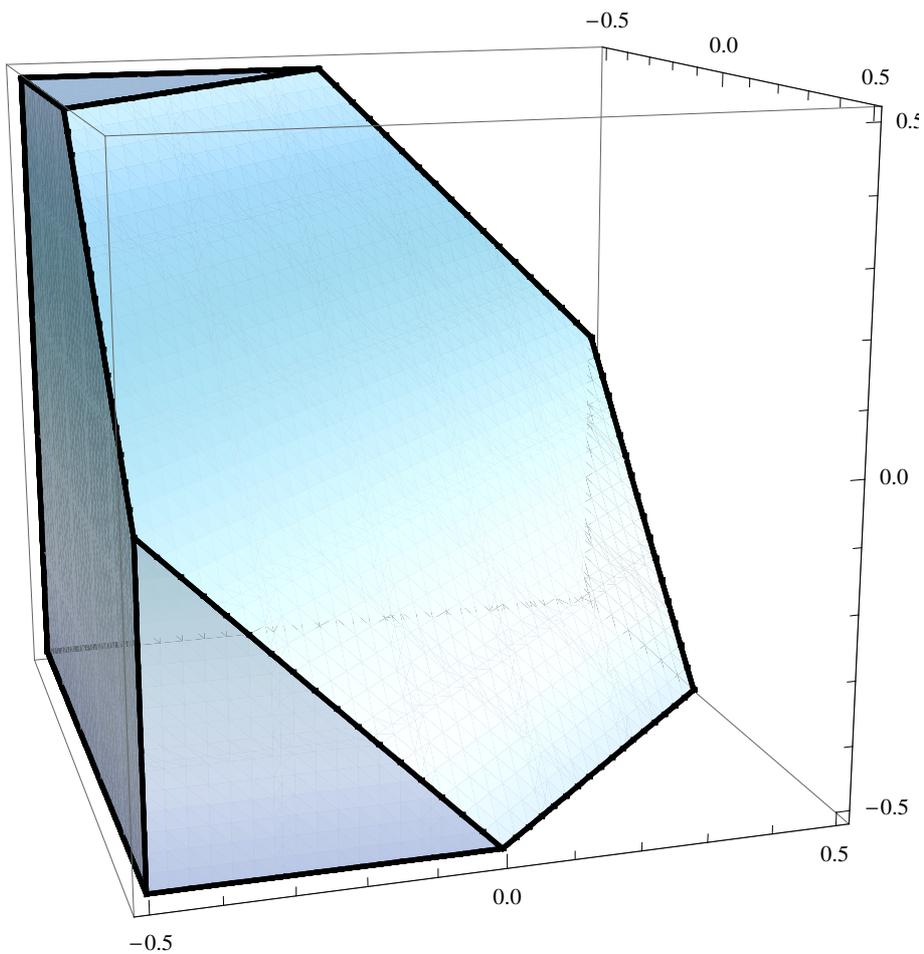
は,  $n$  次元原点対称凸体で

$$I_\rho := (-\rho, \rho), \quad D_\rho := \{(y, z) \mid y^2 + z^2 < \rho^2\}$$

の積である. ただし  $\rho = \frac{1}{2} \log \frac{3}{4}$  とする.

$$\text{Vol}(\Omega_a) = 2^{r_2} \cdot \sqrt{\frac{n}{r_1 + 4r_2}} \cdot \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap H_e)$$

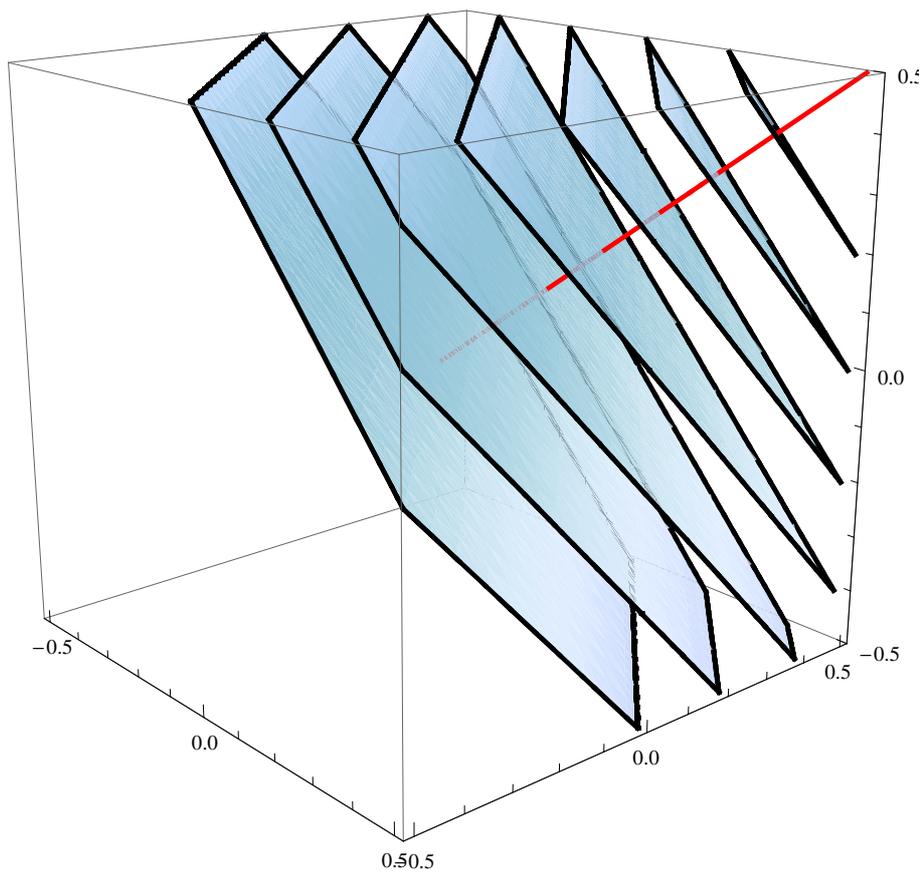
$\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap H_e)$  は, 凸体  $K_\rho$  の超平面  $H_e$  による切断面の体積である.



切断面の体積はFourier変換を用いて計算できる.  
1変数  $t \in \mathbf{R}$  の関数  $f(t)$  を

$$f(t) := \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap (He + te)).$$

とおく.



$\chi_{K_\rho}$  を  $K_\rho$  の特性関数とすれば,  $f$  の Fourier 変換は

$$\begin{aligned}\hat{f}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-rt\sqrt{-1}} dt \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \chi_{K_\rho}(\mathbf{u}) e^{-r(\mathbf{u}, \mathbf{e})\sqrt{-1}} d\mathbf{u} \\ &= 2^{r_1+r_2} \pi^{r_2} \rho^n \prod_{i=1}^{r_1} \frac{\sin(\rho a r)}{\rho a r} \times \prod_{i=1}^{r_2} \frac{J_1(2\rho a r)}{2\rho a r}\end{aligned}$$

となる. ここで  $a := 1/\sqrt{r_1 + 4r_2}$  とおいた.

Fourier 逆変換により

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap H_{\mathbf{e}}) &= f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) dr \\ &= \frac{2^{r_1+r_2} \pi^{r_2} \rho^{n-1} \sqrt{r_1 + 4r_2}}{\pi} J_{r_1, r_2}\end{aligned}$$

を得る. ここで

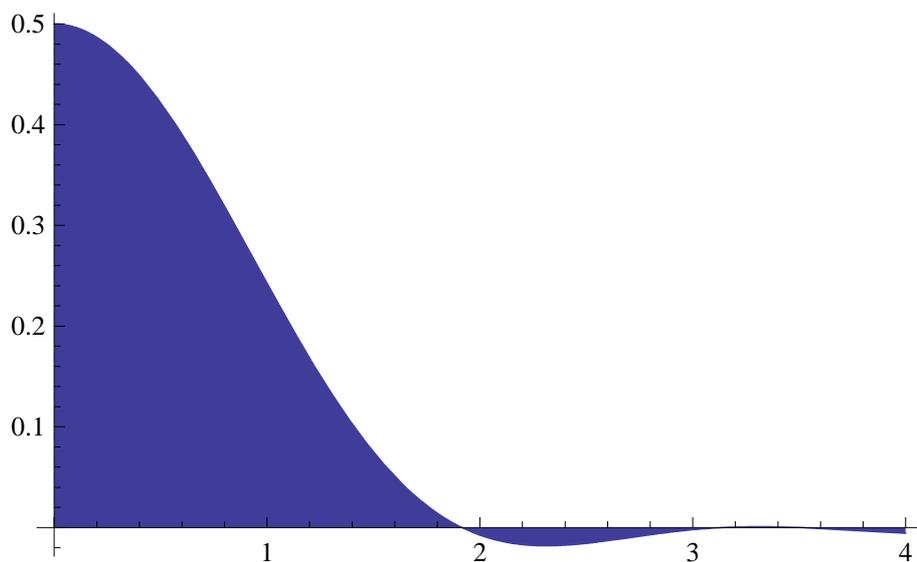
$$J_{r_1, r_2} = \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r_1} \left(\frac{J_1(2t)}{2t}\right)^{r_2} dt.$$

したがって

$$\begin{aligned} r_F &\leq \frac{\text{Vol}(\widetilde{\text{Pic}}_F^0)}{\text{Vol}(\Omega_a)} = \frac{2^{r_1} \pi^{r_2} \sqrt{r_1 + 4r_2} R_F h_F}{w_F \cdot \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap H_e)} \\ &= \frac{\pi R_F h_F}{2^{r_2} w_F \rho^{n-1} J_{r_1, r_2}} \end{aligned}$$

#### 4-5 $\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap H_e)$ の評価

一般に  $J_{r_1, r_2}$  の値は確定できない。Vaaler の cube slicing theorem は  $J_{r_1, r_2}$  の下からの評価を与える。



$$J_{1,1} = \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{24}$$

定理[Vaaler, 1979]  $n$  の分割を

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$$

として,  $B_{n_i}$  を  $\mathbf{R}^{n_i}$  の原点中心の体積 1 をもつ球とする, それらの積からできる  $n$  次元凸体を

$$Q_n := B_{n_1} \times B_{n_2} \times \cdots \times B_{n_r} \subset \mathbf{R}^n.$$

とおく. このとき, 任意の  $n \times m$  実行列  $A$ ,  $\text{rank}(A) = m < n$  に対し

$$\frac{1}{\sqrt{\det(A^t A)}} \leq \omega_{\mathbf{R}^m}(Q_n \cap \text{Im}(A))$$

が成り立つ.

この定理を次で適用する.

$$A := \begin{pmatrix} H_e \text{ の正規直交基を列ベクトルにもつ} \\ n \times (n-1) \text{ 行列} \end{pmatrix}$$

$$R := \begin{pmatrix} (2\rho)^{-1} E_{r_1} & 0 \\ 0 & (\sqrt{\pi\rho})^{-1} E_{2r_2} \end{pmatrix}$$

このとき

$$\frac{1}{\sqrt{\det({}^t A^t R R A)}} \leq \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap H_e)$$

A を具体的に計算して,

$$2^{r_1-1} \pi^{r_2} \rho^{n-1} \sqrt{\frac{r_1 + 4r_2}{r_1 + \pi r_2}} \leq \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_\rho \cap H_e)$$

を得る. よって

$$r_F \leq \frac{2\sqrt{r_1 + \pi r_2} R_F h_F}{w_F \rho^{n-1}}$$

Vaaler の定理は Siegel の補題の証明に使われた.

Bombieri and Gubler, Heights in Diophantine Geometry, Cambridge, 2006

の Appendix C3

## 5 凸体の slicing theorem 概観

凸体の切断面積  $n = p + 2q$  として,  $\mathbb{R}^n$  の原点対称凸体

$$K_{p,q} = I^p \times D^q$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

を考える.  $\mathbb{R}^n$  の単位ベクトル

$$e = (u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q), \quad (w_i \in \mathbb{C})$$

を取り, その直交補空間を  $H_e$  として

$$f(t) = \omega_{\mathbb{R}^{n-1}}(K_{p,q} \cap (H_e + te))$$

とおけば, そのFourier変換は

$$\hat{f}(r) = (2\pi)^q \prod_{i=1}^p \frac{\sin(u_i r/2)}{u_i r/2} \times \prod_{j=1}^q \frac{J_1(|w_j| r)}{|w_j| r}$$

となる. よって逆変換により

$$f(t) = \frac{(2\pi)^q}{\pi} \int_0^\infty \cos(rt) \times \prod_{i=1}^p \frac{\sin(u_i r/2)}{u_i r/2} \times \prod_{j=1}^q \frac{J_1(|w_j| r)}{|w_j| r} dr$$

とくに

$$\begin{aligned} & \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_{p,q} \cap H_e) \\ &= \frac{(2\pi)^q}{\pi} \int_0^\infty \prod_{i=1}^p \frac{\sin(u_i r/2)}{u_i r/2} \times \prod_{j=1}^q \frac{J_1(|w_j| r)}{|w_j| r} dr \end{aligned}$$

この方法による切断面積の計算は一般の原点对称星型領域 (star body) でも可能で、次の公式がある。

定理[Koldobsky, 1998]  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  を原点对称星型領域として、

$$\varphi_\Omega(\mathbf{x}) := \min\{r \geq 0 : \mathbf{x} \in r\Omega\}, \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$$

を  $\Omega$  の Minkowski 関数とする。このとき、任意の単位ベクトル  $e \in \mathbf{R}^n$  で

$$\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(\Omega \cap H_e) = \frac{1}{(n-1)\pi} (\varphi_\Omega^{-n+1})^\wedge(e)$$

が成り立つ。

一般に  $\varphi_\Omega^{-n+1}$  は  $\mathbf{R}^n$  上可積分とは限らないので、右辺は超関数としての Fourier 変換と見る必要がある。

この公式

$$\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(\Omega \cap He) = \frac{1}{(n-1)\pi} (\varphi_{\Omega}^{-n+1})^{\wedge}(e)$$

から、次が従う.

系[Minkowskiの一意性定理]  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbf{R}^n$  をそれぞれ原点对称星型領域とする. 任意の単位ベクトル  $e \in \mathbf{R}^n$  で

$$\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(\Omega_1 \cap He) = \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(\Omega_2 \cap He)$$

となるならば,  $\Omega_1 = \Omega_2$  である.

文献は

Koldobsky, Fourier Analysis in Convex Geometry, AMS, 2005.

Koldobsky and Yaskin, The Interface between Convex Geometry and Harmonic Analysis, AMS, 2008.

立方体の切断面積 立法体  $I^n = K_{n,0}$  の場合は,

$$\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(I^n \cap H_e) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{\sin(u_i r)}{u_i r} dr$$

である. 次の評価が知られている.

定理[Ball, 1986] 任意の単位ベクトル  $e$  で

$$1 \leq \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(I^n \cap H_e) \leq \sqrt{2}$$

が成り立つ. 左辺の等号は  $e = (1, 0, \dots, 0)$  で,  
右辺の等号は  $e = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0)$  で  
成り立つ.

上からの評価は次の不等式と Hölder の不等式から導かれる.

定理[Ball, 1986] 任意の  $2 \leq s \in \mathbf{R}$  で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right|^s dx \leq \sqrt{\frac{2}{s}}$$

が成り立つ. 等号は  $s = 2$  の時に成立.

最近, Marichal - Mossinghoff により  $\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(I^n \cap H_e)$  を計算する次の公式が示された.

定理[M-M, 2006]  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  を任意のベクトルで,  $\Pi_{\mathbf{a}} := a_1 \cdots a_n \neq 0$  ならば

$$\begin{aligned} & \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(I^n \cap H_{\mathbf{a}}) \\ &= \frac{\|\mathbf{a}\|}{a_n} + \frac{\|\mathbf{a}\|}{2^{n-2}(n-1)!\Pi_{\mathbf{a}}} \sum_{\epsilon \in V_n^-} \Pi_{\epsilon} \cdot (\mathbf{a}, \epsilon)_+^{n-1} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで

$$V_n := \{\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) : \epsilon_i \in \{\pm 1\}\}$$

$$V_n^- := \{\epsilon \in V_n : \epsilon_n = -1\}$$

$$(\mathbf{a}, \epsilon)_+ := \max\{0, (\mathbf{a}, \epsilon)\}$$

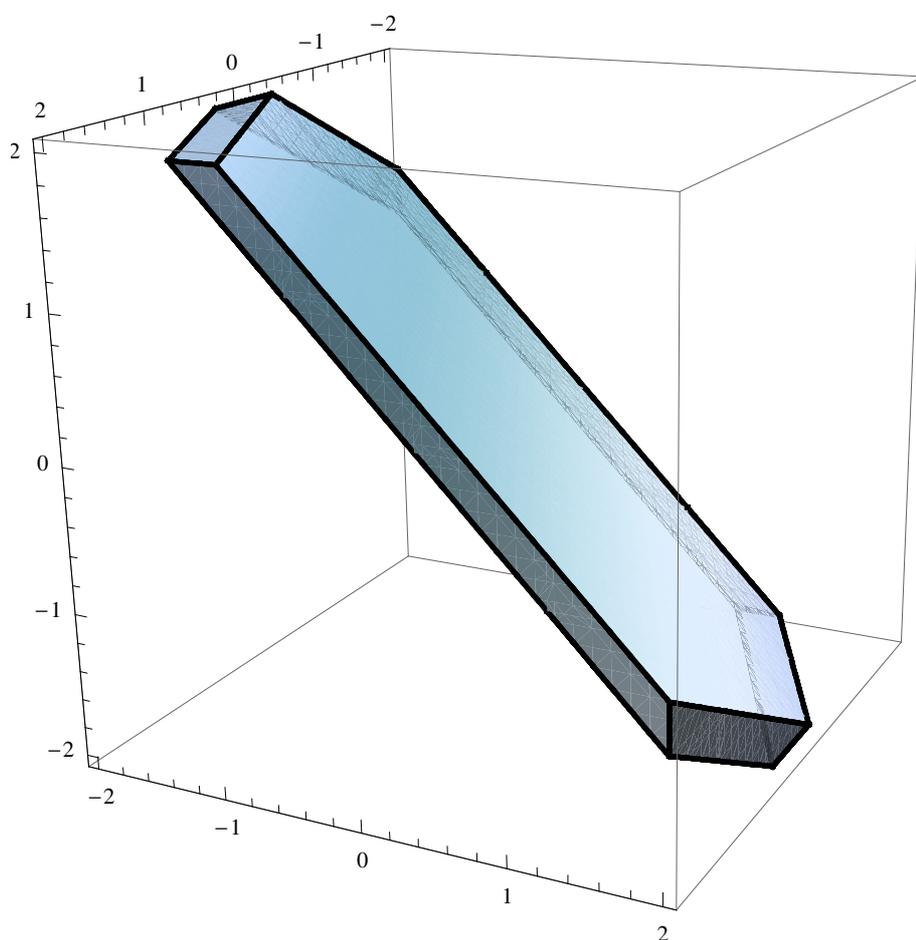
とする.

[M-M] J.-L. Marichal and M. J. Mossinghoff, Slices, slabs and sections of the unit hypercube, arXiv MG/0607715

[M-M] では以下のような公式も与えられている.  
ベクトル  $a \in \mathbb{R}^n$  と  $0 < \theta \in \mathbb{R}$  を固定して,

$$S_{a,\theta} := \{x \in \mathbb{R}^n : |(a, x)| \leq \frac{\theta}{2}\}$$

により  $\mathbb{R}^n$  の (slab という) 領域を定義する.



$a = (-1, 2, 2), \theta = 2/3$  での  $S_{a,\theta}$  の図

体積  $\omega_{\mathbf{R}^n}(I^n \cap S_{a,\theta})$  について次が知られている.

定理[Pólya, 1912]  $a = (a_1, \dots, a_n)$  を任意のベクトルで  $\Pi_a = a_1 \cdots a_n \neq 0$  ならば

$$\begin{aligned} & \omega_{\mathbf{R}^n}(I^n \cap S_{a,\theta}) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\theta r)}{r} \prod_{i=1}^n \frac{\sin(a_i r)}{a_i r} dr \end{aligned}$$

が成り立つ.

これは  $f(t) = \omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(K_{p,q} \cap (H_e + te))$  の積分表示を  $-\theta/2 \leq t \leq \theta/2$  で積分すればよい. また [M-M] により

定理[M-M, 2006]  $a$  は上と同じで,  $\hat{a} = (a_1, \dots, a_n, \theta) \in \mathbf{R}^{n+1}$  とおけば

$$\begin{aligned} & \omega_{\mathbf{R}^n}(I^n \cap S_{a,\theta}) \\ &= 1 + \frac{1}{2^{n-1} n! \Pi_a} \sum_{\epsilon \in V_{n+1}^-} \Pi_\epsilon \cdot (\hat{a}, \epsilon)_+^n \end{aligned}$$

が成り立つ.

したがって

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\theta r)}{r} \prod_{i=1}^n \frac{\sin(a_i r)}{a_i r} dr \\ &= 1 + \frac{1}{2^{n-1} n! \prod a} \sum_{\epsilon \in V_{n+1}^-} \prod \epsilon \cdot (\hat{a}, \epsilon)_+^n \end{aligned}$$

例  $p_1 = 3, p_2 = 5 \dots, p_8 = 23$  を素数として,

$$a = \left( \frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_8} \right), \quad \theta = 1$$

とおく. このとき

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{23} = 0.998$$

より

$$(\hat{a}, \epsilon)_+ = \max\left\{0, -1 + \frac{\epsilon_1}{p_1} + \dots + \frac{\epsilon_n}{p_8}\right\} = 0 \quad (\forall \epsilon)$$

よって, 任意の  $m \leq 8$  で

$$\int_0^\infty \frac{\sin r}{r} \prod_{i=1}^m \frac{\sin(r/p_i)}{r/p_i} dr = \frac{\pi}{2}$$

多重円盤の切断面積 多重円盤  $D^q = K_{0,q}$  ( $2q = n$ ) の場合は,

$$\omega_{\mathbf{R}^{n-1}}(D^q \cap H_e) = \frac{(2\pi)^q}{\pi} \int_0^\infty \prod_{j=1}^q \frac{J_1(|w_j|r)}{|w_j|r} dr$$

である.

この体積の上からの評価 (Ball の定理の類似) は, まだ無いように思える.

他方,  $D^q \subset \mathbf{R}^n = \mathbf{C}^q$  を実超平面ではなく, 複素超平面で切断した場合の研究がある.  $e$  の  $\mathbf{C}^q$  における Hermite 内積に関する直交補空間を  $H_{e,\mathbf{C}}$  とする. 次は

Oleszkiewicz - Pelczyński, Polydisc slicing in  $\mathbf{C}^n$ , *Studia Math.* 142, 2000

による.

定理[O-P, 2000]  $e = (w_1, \dots, w_q) \in \mathbb{C}^q$  を単位ベクトルとする. このとき

$$\omega_{\mathbb{R}^{2q-2}}(D^q \cap H_{e, \mathbb{C}}) = \frac{\pi^{q-1}}{2} \int_0^\infty r \prod_{j=1}^q \frac{J_1(|w_j|r)}{|w_j|r} dr$$

であり,

$$\pi^{q-1} \leq \omega_{\mathbb{R}^{2q-2}}(D^q \cap H_{e, \mathbb{C}}) \leq 2\pi^{q-1}$$

が成り立つ.

等号が成立するための条件も厳密に分かる. この定理は次の不等式から従う.

定理[O-P, 2000]  $2 \leq s \in \mathbb{R}$  とすると

$$\int_0^\infty r \left| \frac{2J_1(r)}{r} \right|^s dr \leq \frac{4}{s}$$

が成り立つ. ここで等号が成り立つのは  $s = 2$  のときで, このときに限る.