2020年度日本数学会秋季総合分科会 代数学分科会 講演スライド

Sturm語の反復指数の空隙

大中 鈴絵 (兵庫県立鳴尾高校)

渡部 隆夫 (阪大理)

1　Sturm語とは

1.1　語の定義

A を空でない有限集合とする.

- A の要素をアルファベットという.
- A の要素からなる列 $x = (x_i)$ を A 上の語という.
- 語 $x = (x_i)$ を $x = x_1x_2x_3\cdots$ とも書く.

$x = x_1x_2x_3\cdots$ を語とするとき

- $|x| := x$ の列の長さ
- $|x| = \infty$ のとき, x を無限語という.
- x の有限または無限の部分列で $x_ix_{i+1}\cdots$ と番号が連続するものを x の因子という.
- x の因子 y と z で $x = yz$ となるとき, y を x のプレフィックス, z を x のサフィックスという.
- x が無限語で, 長さ有限の因子 y と z により, $x = yzzz\cdots = yz^\infty$ となるとき, x を ultimately periodic であるという.

1.2　無限語の subword complexity

x を無限語, n を自然数とするとき

$$F_n(x) := \{\, x_i \cdots x_{n+i-1} \mid i = 1, 2, 3, \cdots \,\} = x \text{ の長さ } n \text{ の因子すべての集合}$$

として,

$$p(n, x) := F_n(x) \text{ の要素の個数}$$

により $p(n, x)$ を定義する. $p(n, x)$ を subword complexity function という.

$$\begin{aligned} x \text{ が ultimately periodic} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{数列 } \{p(n, x)\} \text{ は有界である} \\ &\Longleftrightarrow \quad {}^{\exists}n \quad \text{s.t.} \quad p(n, x) \le n \end{aligned}$$

がわかる. この対偶は

$$x \text{ が ultimately periodic でない} \quad \Longleftrightarrow \quad {}^{\forall}n \quad p(n, x) \ge n + 1$$

になる.

1.3 Sturm語の定義と構成

x を無限語とする.

$$x \text{ が Sturm 語} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\forall}n \quad p(n,x) = n+1$$

- Sturm語は ultimately periodic でなく subword complexity が最小の語
- $p(1,x) = 2$ なので, x の項に現れるアルファベットは2つである

以下では $\mathrm{A} = \{0,1\}$ として, $\{0,1\}$上のSturm語すべての集合を $\mathbf{St}$ とおく.
$\mathbf{St}$ の要素は具体的に次のように構成される.

- $0 < \theta < 1$ を無理数, ρ を実数, $i = 1,2,3,\cdots$ とするとき

$$s_{\theta,\rho} := (s_{\theta,\rho}(i)), \quad \text{ここで } s_{\theta,\rho}(i) := \lfloor \theta(i+1) + \rho \rfloor - \lfloor \theta i + \rho \rfloor$$
$$S_{\theta,\rho} := (S_{\theta,\rho}(i)), \quad \text{ここで } S_{\theta,\rho}(i) := \lceil \theta(i+1) + \rho \rceil - \lceil \theta i + \rho \rceil$$

  はどちらも $\{0,1\}$ 上のSturm語である.
- 任意の $x \in \mathbf{St}$ は, ある無理数 θ と実数 ρ により, $x = s_{\theta,\rho}$ または $x = S_{\theta,\rho}$ となる.
  θ を x の傾きという.

2　Sturm語の反復指数

2.1　反復指数の定義

無限語 x と自然数 n に対し

$$r(n,x) := \min\{\, m \geq 1 \;:\; x_i^{i+n-1} = x_{m-n+1}^{m} \;\; \text{for some } i \text{ with } 1 \leq i \leq m-n \,\}$$

により $r(n,x)$ を定義する．ここで $x_i^j = x_i x_{i+1} \cdots x_j$ は x の因子を表す．さらに

$$\mathrm{rep}(x) := \liminf_{n\to\infty} \frac{r(n,x)}{n}$$

を x の反復指数という．

- $r(n,x)$ は, x のプレフィックスに長さ n のある因子が(オーバーラップを許容して)2重に含まれるときの, そのようなプレフィックスの長さで最小の値である．
- たとえば, $x = 01001001\cdots$ のとき

$r(2,x) = 5$　2回現れる長さ2の因子は 01 ：　$\underline{\text{01}}\text{0}\underline{\text{01}}\text{001}$

$r(3,x) = 6$　2回現れる長さ3の因子は 010 ：$\underline{\text{010010}}\text{01}$

$r(4,x) = 7$　2回現れる長さ4の因子は 0100 ：$\underline{\text{0100100}}\text{1}$　($x_4 = 0$ はオーバーラップ)

2.2　反復指数の例

- x が ultimately periodic $\Longrightarrow \mathrm{rep}(x) = 1$
- x が Sturm語 $\Longrightarrow 1 \le \mathrm{rep}(x) \le 2$
- $\theta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とすると

$$s_{\theta,0} = 10110101101101011010\cdots$$

であり

$$\mathrm{rep}(s_{\theta,0}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- $x \in \mathbf{St}$ のとき, x の傾き θ は

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1x_2\cdots x_n \text{ に現れる } 1 \text{ の個数}}{n}$$

で決まる. $\mathrm{rep}(x)$ は θ の連分数展開に関係していると考えられる. (今のところ, 明示的な関係がわかっているわけではない.)

2.3　Bugeaud - Kim の結果

以下 $\mathrm{rep}(\mathbf{St}) = \{\ \mathrm{rep}(x)\ :\ x \in \mathbf{St}\ \}$ とする. 2.2節の例に述べたように実数の部分集合として

$$\mathrm{rep}(\mathbf{St}) \subset [1, 2]$$

と閉区間 $[1, 2]$ に含まれる. 次の定理が Bugeaud と Kim により示された.

定理**(Bugeaud-Kim)**

任意の $x \in \mathbf{St}$ について

$$1 \leq \mathrm{rep}(x) \leq r_{\max} = \sqrt{10} - \frac{3}{2} = 1.66227\cdots$$

が成り立つ. 1 は $\mathrm{rep}(\mathbf{St})$ の最小値でかつ集積点であり, $r_{\max}$ は $\mathrm{rep}(\mathbf{St})$ の最大値でかつ孤立点である. $\mathrm{rep}(x) = r_{\max}$ となる x の傾きの連分数展開は $2, 1, 1$ を循環節にもつ循環連分数, つまり $[0, a_1, a_2, \cdots, a_K, \overline{2, 1, 1}]$ の形になる.

2.4　主結果

値 r_1 と r_2 を次で定める.

$$r_1 = \frac{48+\sqrt{10}}{31} = 1.65039\cdots, \qquad r_2 = \frac{415\sqrt{149}-2693}{1438} = 1.65001\cdots.$$

定理

開区間 $(r_1, r_{\max})$ は $\mathrm{rep}(\mathrm{St})$ の空隙, つまり $(r_1, r_{\max}) \cap \mathrm{rep}(\mathrm{St}) = \emptyset$ である. 値 r_1 は $\mathrm{rep}(\mathrm{St})$ の最大の集積点である. また $r_2 \leq \mathrm{rep}(x) \leq r_1$ となる $x \in \mathrm{St}$ の傾きの連分数展開は $[0, a_1, a_2, \cdots, a_K, (2,1,1)^{n_1}, 1, (2,1,1)^{n_2}, 1, \cdots]$ の形をもつ. ここで n_i は自然数で, $(2,1,1)^{n_i}$ は $2,1,1$ の並びを n_i 回繰り返すことを表す.

- r_1 が $\mathrm{rep}(\mathbf{St})$ に含まれるかどうかはわからない.

2.5 Sturm語の列の構成

Sturm語の列 $\{x^{(n)}\} \subset \mathbf{St}$ で, $\mathrm{rep}(x^{(n)}) < r_1$ かつ $\mathrm{rep}(x^{(n)}) \to r_1$ $(n \to \infty)$ となる $x^{(n)}$ は次のように構成できる. 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し

1 循環連分数 $\vartheta_n := [0, \overline{(2,1,1)^{2n}, 1}] = [0, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \cdots]$ をとる.

2 $\{0,1\}$ 上の有限語の列 $M_0^{(n)}, M_1^{(n)}, M_2^{(n)}, \cdots$ を次で帰納的に定義する.

$$M_0^{(n)} := 0, \qquad M_1^{(n)} := 0^{a_1^{(n)}-1}1, \qquad M_{k+1}^{(n)} := (M_k^{(n)})^{a_{k+1}^{(n)}} M_{k-1}^{(n)} \quad (k \geq 1)$$

このとき $M_k^{(n)} \to s_{\vartheta_n,0}$ $(k \to \infty)$ が成り立つ.
(ここで 0^a は 0 の a 個の繰り返しとし, M^a は有限語 M の a 個の繰り返しとする.)

3 $W_k^{(n)} := 1 M_0^{(n)} M_1^{(n)} \cdots M_{k-2}^{(n)}$ とおく.

4 $x^{(n)} := \lim_{k\to\infty} W_k^{(n)}$ とする.

- $x^{(n)}$ は $s_{\vartheta_n,0}$ のサフィックスになりその傾きは ϑ_n に等しいが, 切片はわからない.