F 爆発入門

(Introduction to F-blowups)

安田 健彦*

これは，2010 年 9 月に山形大学で行われた研究集会「特異点と多様体の幾何学」で発表した内容をまとめたものである．

1 前史

この章では基礎体を標数 0 の代数閉体とする．

この論説でたびたび使われる「爆発」とは射影的かつ双有理的な代数多様体の射 $Y \to X$ のことである．また，Y は X の爆発であると言ったり，X から Y を構成することを爆発と言ったりもする．

1.1 ナッシュ爆発

$X \subset \mathbb{A}^n$ を d 次元アフィン代数多様体とする．X の非特異点に対し，その点での接平面をグラスマン多様体 $G(n,d)$ の点と対応させるガウス写像

$$\gamma : X_{\mathrm{sm}} \to G(n,d)$$

を考えよう．X の**ナッシュ爆発**は，この写像のグラフの $X \times G(n,d)$ における閉包と定義される．また，ナッシュ爆発の正規化を**正規ナッシュ爆発**という．（正規）ナッシュ爆発は，貼り合わせによりアフィンでない代数多様体に対しても定義できる．ナッシュ爆発による特異点解消に関する以下のような結果が知られている．

定理 1.1 ([7])．1 次元代数多様体はナッシュ爆発を有限回繰り返すことで非特異になる．

定理 1.2 ([10])．2 次元代数多様体は正規ナッシュ爆発を有限回繰り返すことで非特異になる．

1.2 高次ナッシュ爆発

点 $x \in X$ に対し，$x^{(n)} \subset X$ を $\mathfrak{m}_x^{n+1} \subset \mathcal{O}_X$ で定義される閉部分スキームとする． これは，点集合としては 1 点だが，被約でないスキーム構造を持っている．いわゆるファット・ポイントであ

* 鹿児島大学

る．これは X のヒルベルト・スキーム $\mathrm{Hilb}(X)$ の点 $[x^{(n)}]$ に対応する．X の n **次ナッシュ爆発**を $\mathrm{Hilb}(X)$ の閉部分スキーム

$$\mathrm{Nash}_n(X) := \overline{\{[x^{(n)}] | x \in X_{\mathrm{sm}}\}} \subset \mathrm{Hilb}(X)$$

と定義しよう．$\mathrm{Nash}_1(X)$ はナッシュ爆発と同型になる．$\mathrm{Nash}_n(X)$ の各点は X のファット・ポイントに対応するので，自然な写像

$$\mathrm{Nash}_n(X) \to X,\ [Z] \mapsto Z_{\mathrm{red}}$$

が得られる．これは，ちゃんとスキームの射になっていて，さらに名前の通り爆発になっている．

定理 1.3 ([15])**.** X が 1 次元のとき，十分大きな n に対し，$\mathrm{Nash}_n(X)$ は非特異になる．

1.3 G ヒルベルト・スキーム

M を非特異代数多様体とし，有限群 G が有効に作用しているとする．（つまり，G の単位元以外の元は非自明に作用する．）G 作用による自由軌道 Z は $\sharp G$ 個の点からなるが，これはまた $\mathrm{Hilb}(M)$ の点 $[Z]$ と対応させることが出来る．そこで G ヒルベルト・スキームは

$$\mathrm{Hilb}^G(M) := \overline{\{[\text{自由軌道}]\}} \subset \mathrm{Hilb}(M)$$

と定義される [4]．$\mathrm{Hilb}^G(M)$ の各点は M の閉部分スキームでサポートは（自由とは限らない）軌道となる．

一方，商多様体 M/G は軌道全体の集合と思うことができる．従って，自然な写像

$$\mathrm{Hilb}^G(M) \to M/G,\ [Z] \mapsto [Z_{\mathrm{red}}]$$

が定まる．これもまたスキームの射であり，かつ爆発になる．

定理 1.4 ([3])**.** M が 2 次元なら $\mathrm{Hilb}^G(M)$ は M/G の最小特異点解消となる．

定理 1.5 ([6],[1])**.** M が 3 次元で M/G がゴレンシュタインなら $\mathrm{Hilb}^G(M)$ は M/G のクレパント特異点解消となる．

1.4 共通のアイデア

上に述べた 3 つの爆発の構成は全て以下のように説明される．まず代数多様体 X の非特異点（若しくは一般の点）に対し，あるオブジェクトを一意的に対応させる．ただしこの対応は単射でなければならない．こうして得られるオブジェクト全体はモジュライ空間の部分スキームとなり X_{sm} と同型になる．

$$X_{\mathrm{sm}} \hookrightarrow \text{モジュライ空間}$$
$$x \mapsto \mathrm{Object}(x)$$

非特異点が動いて特異点に近づくときのオブジェクトの極限として得られるオブジェクトを付け足す，つまりモジュライ空間の中で閉包を取ることで，X の爆発を得る．

$$X \text{ の爆発} = \overline{\{\mathrm{Object}(x) | x \in X_{\mathrm{sm}}\}} \subset \text{モジュライ空間}$$

2　F 爆発の定義

これ以降，基礎体 k は標数 $p > 0$ の代数閉体とする．

2.1　定義（絶対ヒルベルト・スキームによる構成）

高次ナッシュ爆発の定義では，点 $x \in X$ に対し，極大イデアルのベキ $\mathfrak{m}_x^{n+1}$ で定義されるファット・ポイントを考えた．標数 p では次のようなベキも考えることが出来る：

$$\mathfrak{m}_x^{[p^e]} := (f^{p^e} | f \in \mathfrak{m}_x),\ e = 0, 1, 2, \ldots$$

このイデアルで定義されるファット・ポイントを $x^{[p^e]}$ と書くことにする．これはフロベニウス射の e 回繰り返し $F^e : X \to X$ による x のスキーム論的逆像 $(F^e)^{-1}(x)$ に等しい．代数多様体 X の e **次** F **爆発**を

$$\mathrm{FB}_e(X) := \overline{\{x^{[p^e]} | x \in X_{\mathrm{sm}}\}} \subset \mathrm{Hilb}(X)$$

と定義する [14]．高次ナッシュ爆発の時と同様に，自然な射

$$\mathrm{FB}_e(X) \to X$$

があり，これは爆発となる．

F 爆発の構成は高次ナッシュ爆発の構成の全くの類似なのだが，2 次元，3 次元における挙動は全く異なる．

2.2　相対ヒルベルト・スキームや商スキームによる構成

$F : X \to X$ を X の（絶対）フロベニウス射とする．Kunz はフロベニウス射の平坦性により，非特異性を特徴付けたが，これを以下のように述べることが出来る：

定理 2.1 ([5])**.** $e > 0$ に対して，$F^e : X \to X$ はちょうど X_{sm} の上で平坦となる．

$d = \dim X$ とし，$\mathrm{Hilb}_{p^{ed}}(F_X^e)$ を $F^e : X \to X$ に対して定まる相対ヒルベルト・スキームで長さが p^{ed} の 0 次元部分スキームをパラメタづけるものとする．これは X スキームである．しかも F^e を X_{sm} に制限すると，平坦で次数が p^{ed} となるので，切断 $X_{\mathrm{sm}} \to \mathrm{Hilb}_{p^{ed}}(F_X^e)$ が得られる．

また，ほとんど同じ事だが，$F_*^e \mathcal{O}_X$ はランクが p^{ed} の連接層で X_{sm} 上で平坦なので，これの商スキーム $\mathrm{Quot}_{p^{ed}}(F_*^e \mathcal{O}_X)$ も切断 $X_{\mathrm{sm}} \to \mathrm{Quot}_{p^{ed}}(F_*^e \mathcal{O}_X)$ を持つ．

事実 2.2. $\mathrm{FB}_e(X)$ は切断 $X_{\mathrm{sm}} \to \mathrm{Hilb}_{p^{ed}}(F_X^e)$ の像の閉包，そして切断 $X_{\mathrm{sm}} \to \mathrm{Quot}_{p^{ed}}(F_*^e\mathcal{O}_X)$ の像の閉包と同型.

絶対ヒルベルト・スキームによる構成の方が幾何学的に分かり易いが，相対ヒルベルト・スキームや商スキームによる構成は，次の章で述べる普遍性との関連がより直接的である.

3 基本性質

3.1 普遍性

定義 3.1 (平坦化)**.** $f : Y \to X$ を代数多様体の支配的な有限射，$\mathcal{M}$ を X 上の連接層，$\tilde{X} \to X$ を爆発とする．π が f の**平坦化**であるとは, $(\tilde{X} \times_X Y)_{\mathrm{red}}$ が $\tilde{X}$ 上平坦であることを言う．$\pi : \tilde{X} \to X$ が $\mathcal{M}$ の**平坦化**であるとは，$(\pi^*\mathcal{M})/\mathrm{tors}$ が $\tilde{X}$ 上平坦であることを言う．（π が f の平坦化であることと，π が $f_*\mathcal{M}$ の平坦化であることは同値.）また，π が f または $\mathcal{M}$ の**普遍平坦化**であるとは，それが平坦化であり，かつ任意の平坦化 $\pi' : \tilde{X}' \to X$ は $\tilde{X}$ を経由して（必然的に一意的に）分解すること.

F 爆発の相対ヒルベルト・スキームや商スキームによる構成から次のことが分かる：

定理 3.2. $\mathrm{FB}_e(X) \to X$ は $F^e : X \to X$ の普遍平坦化であり，従って $F_*^e\mathcal{O}_X$ の普遍平坦化でもある.

この定理と Kunz の定理から次の系を得る：

系 3.3. $e > 0$ に対し，$\mathrm{FB}_e(X) \to X$ はちょうど X_{sm} の上で同型となる.

3.2 F 爆発列の振る舞い

F 爆発は

$$\mathrm{FB}_0(X) = X, \mathrm{FB}_1(X), \mathrm{FB}_2(X), \ldots$$

という列をなすので，この列の振る舞いを知りたい.

問題 3.4. 単調性　各 e について射 $\mathrm{FB}_{e+1}(X) \to \mathrm{FB}_e(X)$ は在るか.
安定性　$e_0 \geq 0$ が存在して $\mathrm{FB}_{e_0}(X) \cong \mathrm{FB}_{e_0+1}(X) \cong \cdots$ となるか.
有界性　爆発 $Y \to X$ が存在して，全ての e に対し，射 $Y \to \mathrm{FB}_e(X)$ があるか.

これらの性質の間には，次のような明らかな関係がある：

$$\text{単調} + \text{有界} \Rightarrow \text{安定}$$
$$\text{安定} \Rightarrow \text{有界}$$

3.2.1 単調性

定義 3.5. [2] X が F **純**であるとは $\mathcal{O}_X \to F_*\mathcal{O}_X$ が局所的に $\mathcal{O}_X$ 加群の射として分離すること．

F 純特異点とは正標数還元により大体，対数的標準特異点に対応すると思われている [8].

定理 3.6 ([16])**.** X が F 純なら F 爆発列は単調になる．つまり射 $\mathrm{FB}_{e+1}(X) \to \mathrm{FB}_e(X)$ が在る．

証明. 問題は X 上局所的なので，$\mathcal{O}_X \to F_*\mathcal{O}_X$ は分離する，つまり $\mathcal{O}_X$ は $F_*\mathcal{O}_X$ の直和因子であるとして良い．すると，$F_*^e\mathcal{O}_X$ は $F_*^{e+1}\mathcal{O}_X$ の直和因子となる．$F_*^{e+1}\mathcal{O}_X$ を $\mathrm{FB}_{e+1}(X)$ に引き戻し，捻れ加群で割ると平坦になる．従って，直和因子 $F_*^e\mathcal{O}_X$ も $\mathrm{FB}_{e+1}(X)$ に引き戻し，捻れ加群で割ると平坦になる．$\mathrm{FB}_e(X)$ の普遍性より，射 $\mathrm{FB}_{e+1}(X) \to \mathrm{FB}_e(X)$ がある． □

また，双有理写像 $\mathrm{FB}_{e+1}(X) \to \mathrm{FB}_e(X)$ が $\mathrm{FB}_{e+1}(X)$ の与えられた点の周りで定義されるかという問題も考えられるが，こうなるための十分条件も [16] で示された．

3.2.2 安定性と有界性

完備局所整域 $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]/I$ を考え，$X = \operatorname{Spec} R$ とおく．有限生成 R 加群 M は一意的に既約加群 (indecomposable module) に分解する

$$M \cong \bigoplus_i M_i^{a_i}$$

M_i は互いに非同型な既約加群．${}^eR$ を R に R 加群の構造を $f \cdot g := f^{p^e} g$ で入れたものとする．これは，$F_*^e\mathcal{O}_X$ に対応する．e を動かしたときに，${}^eR$ の既約分解に現れる既約加群が同型を除いて有限個であるとき，R は**有限 F 表現型**であるという [9].

定理 3.7 ([16])**.** 代数多様体 X の有限 F 表現型の特異点しか持たないならば，X の F 爆発の列は有界である．さらに X が F 純ならば，X の F 爆発の列は安定である．

証明. e を動かしたときに，${}^eR$ の既約分解に現れる既約加群を $M_1, \ldots, M_l$ とし，$M := \bigoplus_{i=1}^l M_i$ とおく．M の普遍平坦化を $Y \to X$ とする．すると M_i の Y への引き戻しを捻れ加群で割ると平坦になる．従って，${}^eR$ の Y への引き戻しを捻れ加群で割ると平坦になる．普遍性より射 $Y \to \mathrm{FB}_e(X)$ が存在する． □

また，トーリック特異点の F 爆発の具体的な記述から，次の定理を証明できる．正規トーリック特異点は有限 F 表現型だが，非正規なものについても有限 F 表現型となるかどうか私は知らない．

定理 3.8 ([14])**.** （正規とは限らない）トーリック多様体の F 爆発の列は有界である．

4　G ヒルベルト・スキームとの関係

次に G ヒルベルト・スキームと F 爆発の間の関係を見る．

M を非特異代数多様体とし，G を有限群で M に有効に作用しているとする．さらに G の位数は p で割り切れないとする．このとき $\mathrm{Hilb}^G(M)$ は $X := M/G$ の爆発となる．

定理 4.1 ([14])**.** 任意の e に対し，射 $\mathrm{Hilb}^G(M) \to \mathrm{FB}_e(X)$ があり

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hilb}^G(M) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{FB}_e(X) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

は可換となる．

写像 $\mathrm{Hilb}^G(M) \to \mathrm{FB}_e(X)$ は次のように構成される．

$$\mathrm{Hilb}^G(M) \ni [Z] \mapsto [(F^e)^{-1}(Z)/G] \in FB_e(X)$$

ここで $(F^e)^{-1}(Z)$ は $F^e : M \to M$ による $Z \subset M$ のスキーム論的逆像で，$(F^e)^{-1}(Z)/G \subset X$ となる．

定理 4.2 ([11, 14])**.** 上述の射 $\mathrm{Hilb}^G(M) \to \mathrm{FB}_e(X)$ は $e \gg 0$ に対して同型となる．また G がアーベル群の時は $p^e > \sharp G$ であれば同型となる．

5　非可換幾何の視点

M,G,X を前節の通りとし，M, X はアフィンと仮定し，$M = \mathrm{Spec}\, S$, $X = \mathrm{Spec}\, R$ とおく．さらに $M \to X$ が分岐因子を持たない，つまり分岐集合の余次元は 2 以上とする．このとき，非可換環の同型

$$S * G \cong \mathrm{End}_R(S)$$

が成り立つ．この非可換環は大域次元が有限であるという意味で「非特異」であり，X の非可換特異点解消と呼ばれるものになっている．また，Bridgeland-King-Reid[1], Van den Bergh[12] により，G ヒルベルト・スキームと上の非可換環はある条件の下で導来同値であることが示された．つまり G ヒルベルト・スキームは非可換環 $S * G \cong \mathrm{End}_R(S)$ の可換な世界での化身であり，低い次元（2，3 次元）では $S * G \cong \mathrm{End}_R(S)$ の非特異性などの良い性質が，化身にも受け継がれると見ることが出来る．

同様の事が F 爆発に対しても成り立つ．ここで考えるべき環は

$$\mathrm{End}_R(R^{1/p^e}) \cong \mathrm{End}_{R^{p^e}}(R)$$

である．ちなみに右辺の環 $\mathrm{End}_{R^{p^e}}(R)$ の元は R の微分作用素で, $\bigcup_e \mathrm{End}_{R^{p^e}}(R)$ は R の微分作用素全体の環となる．

非可換幾何の視点からの研究については [13, 11] を参照して下さい．

参考文献

[1] Tom Bridgeland, Alastair King, and Miles Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3):535–554 (electronic), 2001.

[2] Melvin Hochster and Joel L. Roberts. The purity of the Frobenius and local cohomology. *Advances in Math.*, 21(2):117–172, 1976.

[3] Akira Ishii. On the McKay correspondence for a finite small subgroup of $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. *J. Reine Angew. Math.*, 549:221–233, 2002.

[4] Yukari Ito and Iku Nakamura. McKay correspondence and Hilbert schemes. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 72(7):135–138, 1996.

[5] Ernst Kunz. Characterizations of regular local rings for characteristic p. *Amer. J. Math.*, 91:772–784, 1969.

[6] Iku Nakamura. Hilbert schemes of abelian group orbits. *J. Algebraic Geom.*, 10(4):757–779, 2001.

[7] A. Nobile. Some properties of the Nash blowing-up. *Pacific J. Math.*, 60(1):297–305, 1975.

[8] Karen E. Smith. Brief guide to some of the literature on F-singularities. available at http://www.aimath.org/WWN/singularvariety/F-sings.pdf.

[9] Karen E. Smith and Michel Van den Bergh. Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 75(1):32–62, 1997.

[10] Mark Spivakovsky. Sandwiched singularities and desingularization of surfaces by normalized Nash transformations. *Ann. of Math. (2)*, 131(3):411–491, 1990.

[11] Yukinobu Toda and Takehiko Yasuda. Noncommutative resolution, F-blowups and D-modules. *Adv. Math.*, 222(1):318–330, 2009.

[12] Michel Van den Bergh. Non-commutative crepant resolutions. In *The legacy of Niels Henrik Abel*, pages 749–770. Springer, Berlin, 2004.

[13] Takehiko Yasuda. Frobenius morphisms of noncommutative blowups. arXiv:0906.1662, to appear in the proceedings of the 5th Franco-Japanese Symposium on Singularities.

[14] Takehiko Yasuda. Universal flattening of Frobenius. arXiv:0706.2700v4.

[15] Takehiko Yasuda. Higher Nash blowups. *Compos. Math.*, 143(6):1493–1510, 2007.

[16] Takehiko Yasuda. On monotonicity of F-blowup sequences. *Ill. J. Math.*, 53(1):101–110, 2009.