野性 McKay 対応概説

– 数論的視点と最新成果 –

安田健彦（東北大学）

これは，2019 年度第 27 回整数論サマースクール「構成的ガロア逆問題と不変体の有理性問題」の報告集に載せる原稿で，講義レジュメを改訂したものである．

モチーフ積分を用いた野性 McKay 対応の研究については，既に論説 [12] や解説記事を他の機会に書いた（例えば，第 24 回代数若手研究会の報告集）．今回は整数論サマースクールでの講義なので，数論的視点からこのテーマへの導入を試み，その後 p 進測度を用いた点数版野性 McKay 対応の証明を解説する．また，最近，野性スタック上のモチーフ積分の理論を構築し，応用として一般の群に対するモチーフ的野性 McKay 対応を証明することができたので [10]，その解説を最後に行う．

1　導入 – Galois 逆問題との関連 –

サマースクールのテーマである Galois 逆問題に対する Noether のアプローチをスキームを用いて幾何学的に説明すると以下のようになる．体 K 上の代数多様体 V（主にアフィン空間 $\mathbb{A}^d_K$ を考える）に有限群 G が忠実に作用しているとする．$X := V/G$ を付随する商多様体とし，

$$\pi\colon V \to X$$

を商射とする．$V^\circ \subset V$ と $X^\circ \subset X$ をそれぞれ π のエタール軌跡とする．これらは稠密開部分多様体であり，射 $\pi|_{V^\circ}\colon V^\circ \to X^\circ$ は G トーサー（G-torsor，主 G 束とも）の構造を持つ．この開部分多様体 X° の K 有理点

$$x\colon \operatorname{Spec} K \to X^\circ$$

に対し，その π によるスキーム論的逆像

$$\pi^{-1}(x) := \operatorname{Spec} K \times_{x,X,\pi} V = \operatorname{Spec} L$$

は $\operatorname{Spec} K$ 上の G トーサーとなり，射影 $\pi^{-1}(x) \to V$ は G 同変射である．図式にすると以下のようになる．

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(x) = \operatorname{Spec} L \arrow[r, "G\text{ 同変}"] \arrow[d, "G\text{ トーサー}"'] & V^\circ \arrow[d, "G\text{ トーサー}"] \\
\operatorname{Spec} K \arrow[r, "x"'] & X^\circ
\end{tikzcd}$$

もし，$\operatorname{Spec} L$ が連結であれば L/K は Galois 群 G を持つ Galois 拡大になり，Galois 逆問題が肯定的に解けることになる．もし K が数体で X が有理的（つまり $\mathbb{A}_K^d$ と双有理同値）であれば，十分多くの有理点が存在し，その中に $\pi^{-1}(x)$ が連結となるものが存在することも示される．このように，Galois 逆問題を商多様体 X の有理性の問題に帰着するのが Noether のアプローチだった．

上では X の有理点から $\operatorname{Spec} K$ 上の G トーサーが構成されたが，逆に G トーサー $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$ と K 上の G 同変射 $\operatorname{Spec} L \to V$ が与えられると G 作用による商を取ることで K 有理点

$$\operatorname{Spec} K = (\operatorname{Spec} L)/G \to V/G = X$$

が誘導される．このように商多様体 X の K 有理点と $\operatorname{Spec} K$ 上の G トーサーは密接に関連している．Galois 逆問題は存在問題だが，Galois 逆問題への Noether のアプローチの定量版として，以下のような（漠然とした）問題を考えることができる．

問題 1. X の K 有理点の「量」と $\operatorname{Spec} K$ 上の G トーサーのもしくは K の G-Galois 拡大の）「量」を関連付けよ．

野性 McKay 対応では，この問題の局所体版に対する一つの答えを提供する．元来の McKay 対応[1]はこのような問題ではなかったが，McKay 対応に対するモチーフ積分を使ったアプローチを野性的な状況に一般化することを試みる中で，自然とこのような見方をするのが自然であることが分かってきた．また，局所体版の結果から，数体の場合に何が言えるかを（ヒューリスティックな議論で）考察することで有理点の分布に関する Manin 予想と数体の Galois 拡大の分布に関する Malle 予想が密接に関連することが明らかになった [9].

有理点やトーサーが無限にある場合は素朴に数えることが出来ないので，分岐や高さのようなもので重み付けをする必要があるが，そのために $\mathcal{O}$ 上のモデルや整数点を考える必要がある．

2　Serre-Bhargava の量公式と点の Hilbert スキーム

ここからは K は非アルキメデス的局所体を表すことにする．$\mathcal{O}$ をその整数環，$\mathfrak{p}$ を $\mathcal{O}$ の極大イデアル，$k = \mathcal{O}/\mathfrak{p} = \mathbb{F}_q$ を剰余体とする．K 上のトーサーの数え上げとして重要なものに，**Serre-Bhargava の量公式**（mass formula）がある．

S_n を対称群とし，標準的な置換表現により $GL_n(\mathbb{C})$ に埋め込まれているとする．S_n トーサー $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$ は，K の絶対 Galois 群 G_K から S_n への連続準同形の S_n 共役類に 1 対 1 に対応する．

$$\{\text{連続準同形 } G_K \to S_n\}/S_n \xleftrightarrow{1:1} \{K \text{ 上の } S_n \text{ トーサー}\}/\cong$$

[1] McKay 対応は $SL_2(\mathbb{C})$ の有限部分群 G に対し，同じ Dynkin 図形が二通りの全く異なる方法で構成されるという McKay の観察に由来する．二つの方法とは，一つは表現論を用いるもので，もう一つは商多様体 $\mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消の例外集合から構成するものである．

S_n トーサー $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$ に対して $a(L)$ を，付随する写像

$$G_K \to S_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

の **Artin 導手**（Artin conductor）とする．

定理 2 (Serre-Bhargava の量公式 [2]，cf. [6])**.** 以下の等式が成り立つ：

$$\sum_L \frac{q^{-a(L)}}{\sharp \operatorname{Aut}(L)} = \sum_{i=0}^{n-1} P(n, n-i) q^{-i}$$

ここで，L は K 上の S_n トーサーの同型類全体を走り，$\operatorname{Aut}(L)$ は K 上の S_n トーサーとしての同型群，$P(n,j)$ は整数 n をちょうど j 個の正整数に分ける分割の個数とする．

S_n トーサー $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$ に対し，S_{n-1} 不変部分環 $L' = L^{S_{n-1}}$ を取ると，K 上の n 次エタール代数になる．L と L' は 1 対 1 に対応し Artin 導手 $a(L)$ は L'/K の**判別式指数**（discriminant exponent）$d(L')$ に等しく，上の公式は

$$\sum_{L'} \frac{q^{-d(L')}}{\sharp \operatorname{Aut}(L')} = \sum_{i=0}^{n-1} P(n, n-i) q^{-i}$$

と書ける．L' は n 次エタール L 代数の同型類全体を走る．元々Bhargava が証明したのはこの形の公式で，定理の式は Kedlaya による再定式化である．それ以前に Serre [8] は L'/K が完全分岐体拡大に制限したときの公式

$$\sum_{L' \colon \text{完全分岐体拡大}} \frac{q^{-d(L')}}{\sharp \operatorname{Aut}(L')} = q^{1-n}$$

を得ていた．Bhargava の証明は組み合わせ論的議論で Serre の公式に帰着するものだった．

McKay 対応を用いると，Bhargava の公式を Serre の公式を介さずに証明することが出来るので，それを説明する．$\mathcal{O}$ 上の $2n$ 次元アフィン空間

$$\mathbb{A}^{2n}_{\mathcal{O}} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}[x_1, \ldots, x_{2n}] = (\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}})^n$$

に自然な S_n の置換作用を入れる．商スキーム

$$X := \mathbb{A}^{2n}_{\mathcal{O}} / S_n = \operatorname{Spec} \mathcal{O}[x_1, \ldots, x_{2n}]^{S_n} = S^n \mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}$$

はアフィン平面の **n 次対称積**（n-th symmetric product）と呼ばれるものになる．これは商特異点をもつが，特別な特異点解消を持つ．**n 点の Hilbert スキーム** $\operatorname{Hilb}^n(\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ は代数幾何でよく調べられている対象で，$\operatorname{Spec} \mathcal{O}$ 上の体のスペクトラム $\operatorname{Spec} K$ に対し，

$$\operatorname{Hilb}^n(\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}/\mathcal{O})(K) = \{0 \text{ 次元閉部分スキーム } Z \subset \mathbb{A}^2_K \mid \dim_K \Gamma(\mathcal{O}_Z) = n\}$$

となるモジュライ空間である．X に *Hilbert-Chow* **射**という自然な射

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \to X$$

が存在する．$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ は $\mathcal{O}$ 上滑らかであり，上の射は**クレパント特異点解消**（次章，定義 4）と呼ばれるものになっている．McKay 対応により，上の定理の左辺は X の**弦点数**（string point-count）

$$\sharp_{\mathrm{st}}(X)$$

（次章，定義 3）に q^{-2n} を書けたものに等しいことが分かる．そして，弦点数の基本的な性質により $\sharp_{\mathrm{st}}(X)$ はクレパント特異点解消 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の $k = \mathbb{F}_q$ 上の有理点の個数に等しいことが分かる．

$$\sharp_{\mathrm{st}}(X) = \sharp\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}/\mathcal{O})(k)$$

最後に $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{A}^2_k/k) = \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} k$ は様々な次元のアフィン空間の非交和に分解することをもちいて，k 有理点の個数は

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(n, n-i) q^{2n-i}$$

であることが分かる．これらを合わせて，定理を得る．まとめると，証明は以下のように等式を繋げることで得られた．

$$\begin{aligned}
&\sum_L \frac{q^{2n-a(L)}}{\sharp\,\mathrm{Aut}(L)} \\
&= \sharp_{\mathrm{st}}(X) && \text{(McKay 対応)} \\
&= \sharp\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{A}^2_{\mathcal{O}}/\mathcal{O})(k) && \text{(弦点数の性質)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} P(n, n-i) q^{2n-i} && \text{(Hilbert スキームの分解)}
\end{aligned}$$

また，この証明により定理に現れる数を点の個数として幾何学的に解釈することができた．

3 $\mathfrak{p}$ 進測度と弦点数

引き続き K は非アルキメデス的局所体とし，前章の記法を用いる．整数環 $\mathcal{O}$ 上滑らかで相対次元 d を持つスキーム X を考えよう．整数点集合 $X(\mathcal{O})$ は K **解析多様体**[2]の構造を持つ．d 次形式の層 $\Omega^d_{X/\mathcal{O}} = \bigwedge^d \Omega_{X/\mathcal{O}}$ の各 k 点の近傍 U での局所生成元は $U(\mathcal{O})$ の測度を定める．これらは貼り合い $X(\mathcal{O})$ の測度 μ_X を定め，

$$\mu_X(X(\mathcal{O})) = q^{-d} \cdot \sharp X(k)$$

[2] リジッド空間などではなく，通常の多様体と同じように「素朴」な方法で定義される K 上の空間．参考文献として [5] を挙げておく．

となる（Weil の公式）．

同様の構成は，自然数 r に対し，有理 r 重 d 形式の層

$$(\Omega^d_{X/\mathcal{O}})^{\otimes r} \otimes K(X)$$

の可逆 $\mathcal{O}_X$ 部分加群に対して行うことが出来る．X が $\mathcal{O}$ 上滑らかな V の有限群 G による商 $X = V/G$ であるとき，このような可逆 $\mathcal{O}_X$ 部分加群が存在し（$r = \sharp G$ とする），$X(\mathcal{O})$ の測度 μ_X を定める．この可逆部分加群は標準因子 $K_{X/\mathcal{O}}$ に対応する．

定義 3. X の**弦点数**（stringy point-count）$\sharp_{\mathrm{st}} X$ を

$$\sharp_{\mathrm{st}} X := q^d \cdot \mu_X(X(\mathcal{O})) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

により定義する．

発散して無限大になることもあることに注意する．発散は，双有理幾何的な意味で特異点が「悪い[3]」ことを意味する．これを用いて，特異点の「悪さ」を調べることが出来る．

各 $\mathcal{O}$ 点は k 点を誘導するので，k 点 x を誘導する $\mathcal{O}$ 点の集合を $X(\mathcal{O})_x$ と書くと

$$X(\mathcal{O}) = \bigsqcup_{x \in X(k)} X(\mathcal{O})_x$$

となり，

$$\sharp_{\mathrm{st}} X = \sum_{x \in X(k)} q^d \cdot \mu_X(X(\mathcal{O}))_x$$

が成り立つ．つまり，弦点数 $\sharp_{\mathrm{st}} X$ は k 点を特異点から決まる重み $q^d \cdot \mu_X(X(\mathcal{O}))_x$ をつけて数え上げたものとなる．X が点 x で $\mathcal{O}$ 上滑らかなら，重みは 1 であり，特に X 全体が $\mathcal{O}$ 上滑らかなら

$$\sharp_{\mathrm{st}} X = \sharp X(k)$$

となる．

定義 4. 正規 $\mathcal{O}$ スキーム Y からの固有双有理射 $f\colon Y \to X$ が**クレパント**（crepant）であるとは，f の相対標準因子が消える，つまり

$$K_{Y/X} := K_{Y/\mathcal{O}} - f^* K_{X/\mathcal{O}} = 0$$

となることを意味する．また f が**クレパント特異点解消**（crepant resolution）であるとは，さらに Y が $\mathcal{O}$ 上滑らかであることを意味する．

弦点数の一番大事な性質が，クレパント射による不変性である．Y，X の両方に対して弦点数が定義され（例えば，商特異点のみを持つ場合），$f\colon Y \to X$ がクレパント射のとき，

$$\sharp_{\mathrm{st}} X = \sharp_{\mathrm{st}} Y$$

となる．特に，f がクレパント特異点解消であれば，

$$\sharp_{\mathrm{st}} X = \sharp Y(k)$$

となる．

[3] ここで言う「悪い」とは，正確には「対数末端（log terminal）でない」という意味．対数末端特異点は極小モデル理論で基本的な特異点のクラス．

4　捻弧，点数版 McKay 対応，解捻

X の $\mathcal{O}$ 点は代数幾何で考える弧の類似である．k 代数多様体の**弧**（arc）とは射 $\operatorname{Spec} k[[t]] \to X$ のことである．そこで，我々は $\mathcal{O}$ スキーム X の $\mathcal{O}$ 点（つまり，切断 $\operatorname{Spec} \mathcal{O} \to X$）のことも弧と呼ぶことにする．

導入で述べた対応により，ほとんどの（$X(\mathcal{O})$ の測度零部分を除き）弧に対し一意的に G トーサー $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$ が定まり，G 同変射 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \to X$（$\mathcal{O}_L$ は L の整数環，つまり，$\mathcal{O}$ の L での整閉包）が誘導される．このような同変射を**捻弧**（twisted arc）と呼ぶ．各 G トーサー $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$ に対し，これを誘導する $\mathcal{O}$ 点の集合を $X(\mathcal{O})_L$ とし，測度零部分を無視すると

$$X(\mathcal{O}) = \bigsqcup_L X(\mathcal{O})_L$$

という分解を得る．

有限群 G の $\mathcal{O}$ 線形作用 $G \curvearrowright \mathbb{A}^d_{\mathcal{O}}$ を考える．簡単のために商射 $\mathbb{A}^d_{\mathcal{O}} \to X$ は余次元 1 でエタール[4]であるとする．下で定義されるように，与えられた線形作用に付随する関数

$$v\colon \{G \text{ トーサー } \operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K\} \to \frac{1}{\sharp G}\mathbb{Z}$$

があり，弦点数 $\sharp_{\mathrm{st}} X = q^d \cdot \mu_X(X(\mathcal{O}))$ への L の寄与 $q^d \cdot \mu_X(X(\mathcal{O})_L)$ は実は

$$\frac{q^{d-v(L)}}{\sharp \operatorname{Aut}(L)}$$

となる．これより野性 McKay 対応の点数版が従う．

定理 5 (点数版野性 McKay 対応 [11])**.** 以下の等式が成り立つ．

$$\sharp_{\mathrm{st}} X = \sum_L \frac{q^{d-v(L)}}{\sharp \operatorname{Aut}(L)}$$

関数 v を決定し，L の寄与を計算するために必要となるのが**解捻**（untwisting）の手法である．F を $\mathbb{A}^d_{\mathcal{O}}$ の座標環 $\mathcal{O}[x_1, \ldots, x_d]$ の線形部分 $\bigoplus_i \mathcal{O} \cdot x_i$ とする．これは G 作用を持つ階数 d の自由 $\mathcal{O}$ 加群である．

定義 6. G トーサー $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$ に付随する**チューニング加群** Ξ_L（tuning module）を G 同変 $\mathcal{O}$ 準同形のなす加群

$$\Xi_L := \operatorname{Hom}^G_{\mathcal{O}}(F, \mathcal{O}_L)$$

として定義する．

[4]つまり，ある余次元 2 以上の閉集合を取り除くとエタールになる．この条件は，射 $\mathbb{A}^d_{\mathcal{O}} \to X$ がクレパントであるという条件に言い換えても良い．この仮定を外すためには対数版弦点数を考える必要がある．対数版とは，双有理幾何，特に極小モデル理論でよくやるようにスキーム X に $\mathbb{Q}$ 係数因子を付け加えることを意味する．

これは，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,\mathcal{O}_L)\cong\mathcal{O}_L^{\oplus d}$ の階数 d の自由 $\mathcal{O}$ 部分加群である．

定義 7. 関数 v は

$$v(L):=\frac{f_L}{\sharp G}\,\mathrm{length}_{\mathcal{O}_L}\frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,\mathcal{O}_L)}{\mathcal{O}_L\cdot\Xi_L}$$

と定義される．ただし，f_L は $\mathrm{Spec}\,L$ の連結成分の K 上の剰余次数を表す.[5]

チューニング加群の双対加群 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Xi_L,\mathcal{O})$ を考え，その $\mathcal{O}$ 上の対称代数

$$S^{\bullet}_{\mathcal{O}}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Xi_L,\mathcal{O})$$

を考える．これは再び $\mathcal{O}[x_1,\dots,x_d]$ と同型になる．元の G 作用付きアフィン空間を V と記し，L に関する V の**解捻空間**（untwisting space）を

$$V^{|L|}:=\mathrm{Spec}\,S^{\bullet}_{\mathcal{O}}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Xi_L,\mathcal{O})\cong\mathbb{A}^d_{\mathcal{O}}$$

と定義する．構成から次の 1 対 1 対応がある．

$$\{V^{|L|}\text{の }\mathcal{O}\text{ 点}\}\xleftrightarrow{1:1}\{G\text{ 同変射 }\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_L\to V\}$$

また自然な射 $V^{|L|}\to X$ が存在し，上の対応は $X(\mathcal{O})$ への写像と整合的となる．また，$X(\mathcal{O})$ への写像は $\mathrm{Aut}(L)$ 不変であり，測度零集合の外では $X(\mathcal{O})_L$ の上への $\sharp\,\mathrm{Aut}(L)$ 対 1 の対応となっている．これにより，

$$\mu_X(X(\mathcal{O})_L)=\frac{1}{\sharp\,\mathrm{Aut}(L)}\nu(V^{|L|}(\mathcal{O}))$$

が導かれる．ただし，ν は射 $V^{|L|}\to X$ の相対標準因子 $K_{V^{|L|}/X}$ から定まる $V^{|L|}(\mathcal{O})$ 上の測度である．そして，計算により $K_{V^{|L|}/X}$ は特殊ファイバー $V^{|L|}\otimes k$ に係数 $-v(L)$ を掛けたもの，

$$-v(L)\cdot(V^{|L|}\otimes k)$$

となることが分かる．これより，測度 ν は標準的な測度を $q^{-v(L)}$ がしたものであることが分かり，欲しかった等式

$$\mu_X(X(\mathcal{O})_L)=q^{d-v(L)}$$

を得る．

まとめると，定理 5の証明は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\sharp_{\mathrm{st}}(X)&=\mu_X(X(\mathcal{O}))\\&=\sum_L\mu_X(X(\mathcal{O})_L)\\&=\sum_L\frac{\nu(V^{|L|}(\mathcal{O}))}{\sharp\,\mathrm{Aut}(L)}\\&=\sum_L\frac{q^{d-v(L)}}{\sharp\,\mathrm{Aut}(L)}.\end{aligned}$$

[5] 論文 [11] の定義では f_L が抜けていて間違っている．同論文の Errata で修正された．f_L を付ける代わりに，$\mathrm{length}_{\mathcal{O}_L}$ を $\mathrm{length}_{\mathcal{O}}$ で取り替えても良い．

5 モチーフ的McKay対応

定義 8. 体 k 上の代数多様体の **Grothendieck 環** $K_0(\mathbf{Var}_k)$ は，k 代数多様体の同型類 $\{X\}$ で生成される自由アーベル群を以下の**鋏関係**（scissor relation）で割った商群として定義される：（鋏関係）$Y \subset X$ が閉部分多様体のとき，

$$\{X\} - \{Y\} - \{X \setminus Y\} = 0.$$

積は $\{X\}\{Y\} := \{X \times_k Y\}$ により与えられる．

k が有限体のとき，**点数実現写像**

$$K_0(\mathbf{Var}_k) \to \mathbb{Z}, \{X\} \mapsto \sharp X(k)$$

が存在する．したがって，$\{X\}$ は点の個数 $\sharp X(k)$ を精密化した不変量とみなすことができる．（基礎体 k が複素数体の場合は位相的 Euler 標数の精密化とみることも出来る．）また $\{X\}$ は基礎体 k が有限体でなくても意味を持つ．Grothendieck 環の元 X は，X のモチーフのトイ・モデルだと見なすことができる．

モチーフ積分の McKay 対応への応用を考えるために，環 $K_0(\mathbf{Var}_k)$ をさらに修正する必要がある．まず，

$$\mathbb{L} := \{\mathbb{A}_k^1\}$$

とする．自然数 n と射 $f\colon Y \to X$ が，各幾何学的点 $x\colon \operatorname{Spec} K \to X$ に対し，ファイバー $f^{-1}(x)$ が n 次元アフィン空間の有限群商 $\mathbb{A}_K^n/G$ に普遍同相（universally homeomorphic）であるとき，

$$\{Y\} = \{X\}\mathbb{L}^n$$

という関係式を追加することにより商環 $K_0(\mathbf{Var}_k)'$ を取る．また自然数 r を固定し，$\mathbb{L}$ の r 乗根 $\mathbb{L}^{1/r}$ を形式的に追加して得られる環を $K_0(\mathbf{Var}_k)'_r$．これを $\mathbb{L}$ で局所化したものを $\mathcal{M}'_r$ とおく．これは，$\{X\}\mathbb{L}^n$, $n \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}$ という形の元で加法群として生成される． F_m を $\dim X + n \leq -m$ を満たす元 $\{X\}\mathbb{L}^n$ で生成される部分群とすると，$\mathcal{M}'_r$ の降下フィルトレーション F_m, $m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}$ が得られる．完備化

$$\widehat{\mathcal{M}'_r} := \varprojlim \mathcal{M}'_r/F_m$$

が定義される．完備化された環の中では，

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \{X_i\}\mathbb{L}^{n_i} \quad (\dim X_i + n_i \to -\infty)$$

という形の無限和が定義できる．k が有限体のとき，この環においても等式 $\{X\} = \{Y\}$ は $\sharp X(k) = \sharp Y(k)$ を導く．ただし，上の点数実現写像を完備化まで拡張することはできないので，注意が必要．

これでモチーフ積分が値を取る環 $\widehat{\mathcal{M}'_r}$ が準備できたので，次に $\mathcal{O}$ スキーム上のモチーフ積分の理論を概説する．モチーフ積分は Kontsevich が p 進積分の類似として Kontsevich が導入し，標数零の体上の理論は Denef-Loeser [3] により基礎づけられ

た．その後，Sebag [7] が完備離散付値環上の（形式）スキームに一般化した．しかし，後で説明するスタック上の理論が等標数でしか出来ていないので，**ここから等標数に限定する**ことにする．任意の体 k に対し，$\mathcal{O}=k[[t]]$ とおく．$\mathcal{O}$ 上の平坦有限型スキーム X で稠密開集合上では $\mathcal{O}$ 上滑らかになっているものを考える．X の $\mathcal{O}$ 点をパラメタ付ける k 上のスキーム（弧空間，Greenberg 関手）$J_\infty X$ が存在し，その上に $\widehat{\mathcal{M}'_r}$ に値をとる測度を定義できる．そして，可測関数

$$h\colon J_\infty X \to \frac{1}{r}\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$$

（$h^{-1}(\infty)$ は測度零集合とする）に対し，積分

$$\int_{J_\infty X}\mathbb{L}^h\,d\mu_X \in \widehat{\mathcal{M}'_r}\cup\{\infty\}$$

が定義される．

前章で扱ったようなマイルドな特異点をもつ X に対し，弦点数 $\sharp_{\mathrm{st}}X$ のモチーフ版である**弦モチーフ**（stringy motif）$M_{\mathrm{st}}(X)$ は，$\Omega^d_{X/\mathcal{O}}$ と $\omega_{X/\mathcal{O}}$ の差を測る関数 h_X を用いて，

$$M_{\mathrm{st}}(X):=\int_{J_\infty X}\mathbb{L}^{h_X}\,d\mu_X \in \widehat{\mathcal{M}'_r}\cup\{\infty\}$$

と定義される．弦モチーフは弦点数と同様の性質を持つ．つまり，X が $\mathcal{O}$ 上滑らかなら

$$M_{\mathrm{st}}(X)=\{X\otimes_{\mathcal{O}}k\}$$

となり，$Y\to X$ がクレパント特異点解消なら

$$M_{\mathrm{st}}(X)=\{Y\otimes_{\mathcal{O}}k\}$$

となる．

注意 9. 上の X や Y は $\mathcal{O}$ 上のスキームであるのに対し，測度，積分の値や弦モチーフは，剰余体 k 上の Grothendieck 環 $K_0(\mathbf{Var}_k)$ から作られる環 $\widehat{\mathcal{M}'_r}$ に値を取ることに注意する．

野性 McKay 対応のモチーフ版は以下のように定式化できる．

定理 10 (モチーフ的野性 McKay 対応 [10])**.** k を任意の体とし，$\mathcal{O}=k[[t]]$ とする．有限群 G の $\mathcal{O}$ 線形作用 $G\curvearrowright\mathbb{A}^d_{\mathcal{O}}$ を考え，$X=\mathbb{A}^d_{\mathcal{O}}/G$ とする．商射 $\mathbb{A}^d_{\mathcal{O}}\to X$ が余次元 1 でエタールであるとき，以下の等式が成り立つ．

$$M_{\mathrm{st}}(X)=\int_{\Delta_G}\mathbb{L}^{d-v}$$

ここで，Δ_G は $\operatorname{Spec}k((t))$ 上の G トーサーをパラメタ付ける k 上のモジュライ空間で，v は前に定義されたもので Δ_G 上の関数を与える．右辺の積分は

$$\sum_{i\in\frac{1}{\sharp G}\mathbb{Z}}\{v^{-1}(i)\}\mathbb{L}^{d-i}$$

により定義される．

Conj(G) を G の共役類の集合とする．$k=\mathbb{C}$ のとき（もしくは，より一般に k が代数的閉体で標数が $\sharp G$ と素のとき），Δ_G は $\sharp\mathrm{Conj}(G)$ 個の点からなる 0 次元の空間であり，定理の右辺は

$$\sum_{[g]\in\mathrm{Conj}(G)} \mathbb{L}^{d-v(g)}$$

という G の共役類を渡る和になる．この場合の定理は本質的に Batyrev [1]，Denef-Loeser [4] により証明された．クレパント特異点解消 $Y\to X$ が存在するとき，定理から

$$\{Y_{\mathbb{C}}\} = \sum_{[g]\in\mathrm{Conj}(G)} \mathbb{L}^{d-v(g)}$$

となる．これから位相的 Euler 標数実現をとることで，多様体 $Y(\mathbb{C})$ の位相的 Euler 標数と G の共役類の個数が等しいという結果を得る．

$$\chi_{\mathrm{top}}(Y(\mathbb{C})) = \sharp\mathrm{Conj}(G)$$

最後の等式は,「物理学者の予想（phisicists' conjecture）」と呼ばれていたもので，Witten 達の弦理論の研究に由来する．

6　スタックによる再定式化

モチーフ的野性 McKay 対応の証明やさらなる一般化をするためにスタックを用いると見通しが良い．以下で考えるスタックは全て Deligne-Mumford スタックである．

再び $\mathcal{O}$ スキーム V に有限群 G が作用している状況を考えよう．V と商スキーム $X=V/G$ の中間に，**商スタック**

$$\mathcal{X} := [V/G]$$

が存在する．$\mathcal{X}$ は局所的には V に近く，大域的には X に近い．V が $\mathcal{O}$ 上滑らかであれば，$\mathcal{X}$ も $\mathcal{O}$ 上滑らかである．また，V が既約で G 作用が忠実であれば，$\mathcal{X}\to X$ は固有双有理射となる．さらに，$V\to X$ が余次元 1 でエタールであるという条件は，$\mathcal{X}\to X$ が余次元 1 で同型射であると言い換えることが出来る．特に，V が $\mathcal{O}$ 上滑らかで $V\to X$ が余次元 1 でエタールのとき，射

$$\mathcal{X}\to X$$

は **Deligne-Mumford スタックの圏におけるクレパント特異点解消**となる．前述の点数版 McKay 対応（定理 5），および，モチーフ的 McKay 対応（定理 10）は弦不変量はクレパント射により不変であるという主張の一種であるとみなすことができる．つまり，の性をスタックに X の不変量と $\mathcal{X}$ の不変量（両定理の等式の右辺）が等しいという主張であると解釈することが出来る．

スタックの弦不変量は次章で説明するスタックに一般化されたモチーフ積分を用いてスキームの場合と同様に定義する．V がアフィン空間で線形作用 G の作用が線形であるとき，定義から比較的簡単に

$$\sharp_{\mathrm{st}}(\mathcal{X}) = \sum_{L} \frac{q^{d-v(L)}}{\sharp \operatorname{Aut}(L)}, \quad M_{\mathrm{st}}(\mathcal{X}) = \int_{\Delta_G} \mathbb{L}^{d-v}$$

が従い，定理 5 と定理 10 は

$$\sharp_{\mathrm{st}}(X) = \sharp_{\mathrm{st}}(\mathcal{X}), \quad M_{\mathrm{st}}(X) = M_{\mathrm{st}}(\mathcal{X})$$

という等式として定式化される．そして，最後の等式は次章で説明する**変数変換公式**から従う．

7 スタック上のモチーフ積分と変数変換公式

$\mathcal{O} = k[[t]]$ 上のスキーム X の弧とは形式円盤 $\operatorname{Spec} k[[t]]$ からの射

$$\operatorname{Spec} k[[t]] \to X$$

のことだった．そして，モチーフ積分は弧の空間上の積分理論だった．McKay 対応に応用するには，スタック $\mathcal{X}$ に対し形式円盤からの射を考えただけでは十分ではなく，前述の捻弧に相当するものを考える必要がある．

定義 11. **捻形式円盤**（twisted formal disk）を $\operatorname{Spec} k[[t]]$ のある有限群 G に関する G 被覆 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} k[[t]]$ に付随する商スタック $[\operatorname{Spec} R/G]$ のことであると定義する．ただし，$\operatorname{Spec} R$ は連結で正規であるとする．

つまり，R はある G-Galois 拡大 $L/k((t))$ の整数環 $\mathcal{O}_L$ となる．

定義 12. $\mathcal{O}$ 上スタック $\mathcal{X}$ の**捻弧**（twisted arc）をある捻形式円盤 $\mathcal{E}$ からの表現可能射 $\mathcal{E} \to \mathcal{X}$ のことだと定義する．

Deligne-Mumford スタックの射が表現可能であるための必要十分条件は，付随する点の自己同型群の準同形が全て単射となることである．捻弧のなす空間（スタック）を $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ と記すことにする．$\mathcal{X}$ がスキームや代数空間であれば，捻弧は全て通常の弧であり，$\mathcal{J}_\infty \mathcal{X} = J_\infty \mathcal{X}$ となる．

$\mathcal{O}$ 上スタックの射 $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ があると捻弧空間の間の写像

$$f_\infty \colon \mathcal{J}_\infty \mathcal{Y} \to \mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$$

が誘導される．また $\mathcal{J}_\infty \mathcal{Y}$ 上の f に関するヤコビ位数関数

$$\mathrm{j}_f \colon \mathcal{J}_\infty \mathcal{Y} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\},$$

そして $\mathcal{J}_\infty\mathcal{Y}$, $\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ のそれぞれの上にシフト関数

$$\mathfrak{s}_\mathcal{Y}\colon \mathcal{J}_\infty\mathcal{Y} \to \mathbb{Q},$$
$$\mathfrak{s}_\mathcal{X}\colon \mathcal{J}_\infty\mathcal{X} \to \mathbb{Q}$$

が定義される．シフト関数は上述の関数 v に相当するものを非線形作用にまで一般化したものである．適当な条件の下で，$\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ 上の可測関数 h に対し，以下の等式が成り立つというのが**変数変換公式**（change of variables formula）である．

定義 13 ([10])**.**

$$\int_{\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}} \mathbb{L}^{h+\mathfrak{s}_\mathcal{X}}\, d\mu_\mathcal{X} = \int_{\mathcal{J}_\infty\mathcal{Y}} \mathbb{L}^{h\circ f_\infty - \mathrm{j}_f + \mathfrak{s}_\mathcal{Y}}\, d\mu_\mathcal{Y}$$

捻弧空間 $\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ の構成，シフト関数 $\mathfrak{s}_\mathcal{X}$ の定義，変数変換公式の証明の全ては**解捻スタック**（untwisting stack）を用いてなされる．捻形式円盤 $\mathcal{E}$ に関する $\mathcal{X}$ の解捻スタックは $\mathcal{E}$ から $\mathcal{X}$ への表現可能射をパラメタ付ける Hom スタック

$$\mathrm{Utg}_\mathcal{E}(\mathcal{X}) := \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{rep}}_\mathcal{O}(\mathcal{E}, \mathcal{X})$$

として定義される．$\mathcal{X}$ が線型作用に付随する商スタック $[V/G]$ のとき，解捻スタックは前述の解捻空間 $V^{|L|}$ に相当する．捻形式円盤 $\mathcal{E}$ を固定すると，次の 1 対 1 対応を得る．

$$\{\,\text{捻弧}\ \mathcal{E} \to \mathcal{X}\} \longleftrightarrow \{\,\text{弧}\ \mathrm{Spec}\, k[[t]] \to \mathrm{Utg}_\mathcal{E}(\mathcal{X})\}$$

この対応を通し，捻弧の研究を通常の弧のそれに帰着する．実際には捻形式円盤はモジュライを持つので，捻形式円盤の普遍族に対して解捻スタックを構成する必要がある．また，そのために形式スキーム $\mathrm{Spf}\, k[[t]]$ 上の形式スタックを考える必要がでてくる．非捻弧を考える限り，弧のターゲットをスタックにしても，従来のスキームに対するモチーフ積分の理論は基本的にそのまま一般化できる．シフト関数 $\mathfrak{s}_\mathcal{X}$ は捻弧と対応する解捻スタックの非捻弧を考えたときにでてくるヤコビ位数関数の差として定義できる．従って，解捻スタックの非捻弧に対する変数変換公式を元のスタックの捻弧に対する公式に書き換えるときに，補正項であるシフト関数が現れる．

8 今後の研究課題

最後に，今後考えるべき問題・研究課題をいくつか挙げる．

問題 14. McKay 対応の等式の両辺のうち，どちらか片方でも計算できる例をもっと見つける．特に，非線形作用で何が起こっているか計算で解明できると面白い．

等式の片側が計算できれば，もう一方について非自明な結果を得る．例えば，右辺を計算することで左辺の特異多様体の不変量が分かり特異点の情報を得ることが出来る．逆に，例えば特異点解消を計算することで左辺を計算できれば，右辺の量（局所体の拡大の重み付き数え上げ，もしくは，そのモチーフ版）の公式を得る．

本稿では線形作用を中心に説明したが，非線形作用の場合でも McKay 対応は定式化される．しかし，より複雑になり計算できている例はほとんどない．

問題 15. 混標数における野性スタック上のモチーフ積分理論の構築とモチーフ的野性 McKay 対応の証明.

やはり，数論研究者が一番興味があるのは $\mathbb{Z}_p$ など，混標数の環上の理論だろう．この場合，Δ_G などのモジュライ空間の構成がまだ出来ていない．それ以外は，概ね等標数の場合と同じ議論が成立すると思われる．

問題 16. 数体，大域体上の McKay 対応の研究.

導入で述べたように，数体上の McKay 対応を考えることで Manin 予想と Malle 予想の関係が見えてくるが，まだヒューリスティックな議論のレベルに留まっている．これを，厳密な数学にしていくのは今後の課題だ.

問題 17. 他の野性分岐（wild ramification，暴分岐とも）との関連を調べる.

野性 McKay 対応では高次元の分岐を扱っているが，数論幾何では至る所で野性分岐が問題となる．野性分岐に関して，様々な研究がなされ理論も作られている．野性 McKay 対応や野性スタック上のモチーフ積分と他の野性分岐の理論を関連付けられたら面白い.

参考文献

[1] Victor V. Batyrev. Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(1):5–33, 1999.

[2] Manjul Bhargava. Mass formulae for extensions of local fields, and conjectures on the density of number field discriminants. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (17):Art. ID rnm052, 20, 2007.

[3] Jan Denef and François Loeser. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. *Invent. Math.*, 135(1):201–232, 1999.

[4] Jan Denef and François Loeser. Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence. *Compositio Math.*, 131(3):267–290, 2002.

[5] Jun-ichi Igusa. *An introduction to the theory of local zeta functions*, volume 14 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Cambridge, MA, 2000.

[6] Kiran S. Kedlaya. Mass formulas for local Galois representations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (17):Art. ID rnm021, 26, 2007. With an appendix by Daniel Gulotta.

[7] Julien Sebag. Intégration motivique sur les schémas formels. *Bull. Soc. Math. France*, 132(1):1–54, 2004.

[8] Jean-Pierre Serre. Une “formule de masse” pour les extensions totalement ramifiées de degré donné d’un corps local. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 286(22):A1031–A1036, 1978.

[9] Takehiko Yasuda. Manin’s conjecture vs. Malle’s conjecture. arXiv:1505.04555.

[10] Takehiko Yasuda. Motivic integration over wild Deligne-Mumford stacks. arXiv:1908.02932.

[11] Takehiko Yasuda. The wild McKay correspondence and p-adic measures. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 19(12):3709–3734, 2017.

[12] 安田 健彦. モチーフ積分による野性マッカイ対応. **数学**, 70(2):159–183, 2018.