p巡回McKay対応

安田健彦　（大阪大学）

2012年12月14日

この記事は基本的に論文[4]の内容の解説である．詳細は論文を参照のこと．

1　標数0のMcKay対応

この章では標数0の代数的閉体k上で考える．非特異代数多様体Mに有限群Gが忠実に作用している状況を考える．$X := M/G$を商多様体とし，$Y \to X$をクレパント特異点解消とする．このとき，一般に$McKay$**対応**とは，多様体Yの不変量とG多様体Mの不変量が等しいことを言う（ことが多い）．その中でも以下の結果は著者の知る限り，一般次元での最初の結果だ．Reidにより予想され，Batyrev[1]により証明された．

定理 1. $G \subset SL_d(k)$を有限部分群，$X = \mathbb{A}_k^d/G$を商多様体，$f : Y \to X$をクレパント特異点解消（つまり，相対標準因子K_fが消える）とする．このとき，Yの位相的$Euler$標数はGの元の共役類の数に等しい．

$$e_{top}(Y) = \sharp Conj(G)$$

これは次の定理により精密化できる.（これも，本質的にはBatyrevにより同じ論文で示されている.）

定理 2. 同じ仮定で，

$$[Y] = \sum_{g \in Conj(G)} \mathbb{L}^{age(g)}.$$

ここで等式は，代数多様体の圏の$Grothendieck$環$K_0(Var_k)$の適当な拡大の中で考え，$\mathbb{L}$はアフィン直線の類$[\mathbb{A}_k^1]$を表す．

この等式の両辺に，位相的Euler標数実現e_{top}を適用すると左辺は$e_{top}(Y)$になる．一方，$e_{top}(\mathbb{L}) = 1$なので，右辺は$\sharp Conj(G)$に等しく，定理1が従う．

2 モチーフ積分によるアプローチ

上記のBatyrevの結果に対し，Denef-Loeser[2]によるモチーフ積分を使ったアプローチがある．ここでは，その概要を，著者によるDeligne-Mumfordスタック上のモチーフ積分[3]の言葉で説明する．まず，$J_\infty X$を代数多様体Xのアーク空間とする．つまり，

$$J_\infty X = \{Spec\, k[[t]] \to X\}.$$

（ただし，この論説では簡単のためにスキームとその閉点の集合を同一視する.）この空間にはモチーフ測度が入り，可測関数

$$F : J_\infty X \supset C \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

に対し，積分

$$\int_C \mathbb{L}^F d\mu_X$$

が定まる．さらにXが$\mathbb{Q}$-Gorensteinの場合，標準的な可測関数F_Xが定まり，弦理論的[1]モチーフが

$$M_{st}(X) = \int_{J_\infty X} \mathbb{L}^{F_X} d\mu_X \tag{1}$$

と定義される．元々，弦理論的不変量はBatyrevにより特異点解消のデータを使い定義されたのだったが，このようにモチーフ積分を使うことで，特異点解消を使わずに標準的に定義することが出来る．後の章では正標数の場合について述べるが，そこでは特異点解消の存在が知られていないため，このような定義方法を採用するのが適切である．

さて，$f : Y \to X$を特異点解消とすると，変数変換公式より

$$M_{st}(X) = \int_{J_\infty Y} \mathbb{L}^{-F_{K_f}} d\mu_Y$$

[1]Batyrevはミラー対称性の研究のために弦理論的不変量を導入し，このような名前を付けた．さらに，この不変量は，アーク空間上の積分として定義可能なので，その意味でも弦理論的ということができなくもない．

となり，弦理論的モチーフは特異点解消のアーク空間上のモチーフ積分として表される．さらに，K_f が単純正規交差なら，この積分は明示的に計算できる．さらに，$K_f = 0$ つまり f がクレパントなら，

$$M_{st}(X) = \int_{J_\infty Y} 1 d\mu_Y = [Y]$$

となる．

ここで，X が商多様体 M/G であるとしよう．$\mathcal{X}$ を商スタック $[M/G]$ を表すとすると，これは非特異 Deligne-Mumford スタックになり，自然な射 $\mathcal{X} \to X$ は有限双有理射になる．つまり，$\mathcal{X} \to X$ はスタックの圏での特異点解消とみなせる．ここで，適切にモチーフ積分をスタックに一般化しておくと，変数変換公式を使い (1) を $\mathcal{X}$ の一般化されたアークの空間上のモチーフ積分に書き直すことができ，それは簡単に計算できる．（元の積分を直接計算するのは X のジェット・スキームの構造がよく分からないので難しい.）

定義 3. $\mathcal{X}$ の**捩れアーク**を

$$[Spec\, k[[t^{1/l}]]/\mu_l] \to \mathcal{X}$$

という形の表現可能射と定義する.（ここで μ_l は 1 の l 乗根のなす群を表す．表現可能とは，誘導される有限群の準同型が単射であることと同値.）$\mathcal{X}$ の捩れアーク全体の空間を $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ を書く.

この定義で自然数 l は固定しないが，表現可能という条件より $\sharp G$ の約数のみを考えればよい．空間 $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ は G の元の共役類の数だけ連結成分をもち，各成分も簡単に記述できる．射 $\mathcal{X} \to X$ に対する変数変換公式から

$$M_{st}(X) = \int_{\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}} \mathbb{L}^{s_{\mathcal{X}}} d\mu_{\mathcal{X}}$$

となる．右辺は $\mathcal{J}_\infty \mathcal{X}$ 上のモチーフ積分で $s_{\mathcal{X}}$ は各連結成分上で一定となる関数．さらに，これは

$$\sum_{g \in Conj(G)} \mathbb{L}^{age(g)}$$

に等しいことが，簡単に分かる．これより，定理 2 が従う.

3　標数 p で p 巡回群の場合

ここまでは標数 0 の基礎体上で話を進めてきたが，標数が群の位数を割りきらない場合にまで問題なく一般化できる．逆に，標数が群の位数を割り切る時を野生的と良い，一般に（この McKay 対応に限らず）問題が難しくなる．McKay 対応については，野生的な場合はほとんど調べられていなかったので，まず一番簡単な場合つまり，群の位数と標数が一致する場合を調べたのが今回の結果だ．

3.1　主結果

k を標数 $p > 0$ の完全体とし，G を位数 p の巡回群，$V = \mathbb{A}_k^d$ を G 表現，つまり G 線形作用を与えられているとする．主結果を述べるために，まず V の不変量 $D_V \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を以下のように定義する．V は

$$V = \bigoplus_{\lambda=1}^{l} V_{d_\lambda},\ (1 \leq d_\lambda \leq p,\ \sum d_\lambda = d)$$

と一意的に分解する．ここで V_{d_λ} は唯一の d_λ 次元直既約 G 表現．このとき，

$$D_V := \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{(d_{\lambda-1} - 1)d_\lambda}{2}$$

と定義する．

$X = V/G$ とする．このとき，同様に弦理論的モチーフ $M_{st}(\mathrm{X})$ を $J_\infty X$ 上のモチーフ積分として定義する．標数 0 の場合と違い，$M_{st}(X) = \infty$ となる（積分が発散する）ことがある．

定義 4. X は**弦理論的ログ端末** $\Leftrightarrow M_{st}(X) \neq \infty$

もし X が弦理論的ログ端末なら通常の意味でログ端末である．もし特異点解消 $f : Y \to X$ で K_f が単純交差となるものがあれば，逆も成り立つ．

また，次の事実は簡単に確かめられる．

事実 5. 次が成り立つ．

1. V は自明（つまり G は V に自明に作用する）$\Leftrightarrow D_V = 0$

2. V は非自明とする．このとき，$codim(V^G \subset V) = 1 \Leftrightarrow X$ は非特異 $\Leftrightarrow D_V = 1$

さて，主結果を述べよう．

定理 6. $D_V \geq 2$ とする．($D_V = 1$ の場合については *[4]* を参照のこと．)

1. X は弦理論的ログ端末 $\Leftrightarrow D_V \geq p$.

2. クレパント特異点解消 $f : Y \to X$ が存在すると仮定する．このとき，

(a) $D_V = p$.

(b) Y の（l 進コホモロジーで定義した）位相的 *Euler* 標数は p. *(*$p = \sharp G$ なので，定理 *1* はこの場合にも成り立つ．*)*

(c) k が有限体，f は k 上で定義されているとする．さらに $x \in X$ を原点の像，$E_0 = f^{-1}(x) \subset Y$ をその逆像とする．このとき，任意の有限拡大 $\mathbb{F}_q/k$ に対し，

$$\sharp E_0(\mathbb{F}_q) = 1 + \frac{p-1}{p} \sum_{j>0,\, p \nmid j} \frac{N_{q,j}}{q^{sht_V(j)}}.$$

ここで，$N_{q,j}$ は $\mathbb{F}_q((t))$ の分岐ジャンプが j の次数 p ガロア拡大の数，

$$sht_V(j) := \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{i=1}^{d_\lambda - 1} \left\lfloor \frac{ij}{p} \right\rfloor.$$

最後の結果は，商特異点の弦理論的不変量，そしてその特異点解消の幾何と局所体の拡大の数え上げが深く関連している（または一致している）という著者の予想[2]の特別な場合と見なせる．

3.2 証明の概略

標数 0 と同じ方針での証明を試みる．簡単のために k は代数閉体とする．$\mathcal{X} := [V/G]$ とおく．まず捩れアークを以前と同様に定義する．

[2] work in progress

定義 7. $\mathcal{X}$ の**捩れアーク**とは $Spec\, k[[t]]$ のある G 拡大 E に対し

$$[E/G] \to \mathcal{X}$$

という形の表現可能射．$\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の捩れアーク全体の空間とする．

標数 0 と大きく違う点は，標数 0 では E の取り方が有限通りしかなかったのに対し，標数 p では無限通りの取り方がある．それだけでなく，E は族として現れ，パラメタ空間は無限次元になる．しかし，$\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ の構造は Artin-Schreier 理論などから詳細に分かり，この空間上にモチーフ測度を定義することができる．従って，モチーフ積分を考えることができる．そこで，射 $\mathcal{X} \to X$ に対し変数変換公式を使い，

$$M_{st}(X) = \int_{\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}} \mathbb{L}^{w_\mathcal{X}} d\mu_\mathcal{X}$$

と書ける．$w_\mathcal{X}$ は $\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ 上に標準的に定義される**重み関数**である．$\mathcal{J}_\infty\mathcal{X}$ の構造と，$w_\mathcal{X}$ を明示的に計算することで，右辺は比較的に計算できる．定理 6 はこれから従う．

参考文献

[1] Victor V. Batyrev. Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(1):5–33, 1999.

[2] Jan Denef and François Loeser. Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence. *Compositio Math.*, 131(3):267–290, 2002.

[3] Takehiko Yasuda. Motivic integration over Deligne-Mumford stacks. *Adv. Math.*, 207(2):707–761, 2006.

[4] Takehiko Yasuda. The p-cyclic McKay correspondence via motivic integration. http://arxiv.org/abs/1208.0132, 2012.