モティヴィック積分入門

安田　健彦*

1　はじめに

Batyrev[1] は双有理同値な Calabi-Yau 多様体は等しい Betti 数をもつことを証明した．証明は，基礎体を移行して p 進積分と Weil 予想を使うという，非常に面白いが少々不自然なものであった．Kontsevich[2] は p 進積分の類似であるモティヴィック積分を考案し，基礎体を移行することなく Batyrev の結果の精密化を証明することに成功した．本稿は双有理幾何学を研究するための強力な道具である，このモティヴィック積分を解説した城崎新人セミナーでの発表をまとめたものである．

2　代数多様体の圏の Grothendieck 環

ある基礎体 k を固定する．代数多様体の圏からある環 R への写像

$$e : \{\text{代数多様体}\} \to R$$

が次の二つの性質を満たすとき**一般 Euler 標数**という．

1. $e(X \times Y) = e(X)e(Y)$
2. 閉部分多様体 $Y \subseteq X$ に対し $e(X) = e(X \setminus Y) + e(Y)$

これはオイラー数の性質を抽象化したものである．

例 1. k が有限体のとき，代数多様体 X に対し有理点の個数 $\sharp X(k)$ を対応させる写像は一般 *Euler* 標数．

例 2. k が複素数体のとき，代数多様体 X の ***E* 多項式**（*Hodge-Deligne* 多項式ともいう）を次のように定義する．

$$E(X; u, v) := \sum_{i,p,q} (-1)^i h^{pq}(H^i_c(X, \mathbb{C})) u^p v^q \in \mathbb{Z}[u, v].$$

このとき写像 $X \mapsto E(X; u, v)$ は一般 *Euler* 標数．

*京都大学数理解析研究所

普遍的な一般 Euler 標数を構成しよう．代数多様体 X の同型類を $[X]$ で表す．**代数多様体の圏の Grothendieck 環**$K_0(\mathcal{V}ar)$ とは，代数多様体の同型類全体で生成される自由アーベル群

$$\bigoplus_{[X]} \mathbb{Z}[X]$$

を次の関係で割ったもの．$Y \subseteq X$ が閉部分多様体のとき，$[X] = [X \setminus Y] + [Y]$．積を $[X][Y] := [X \times_k Y]$ で定めると，$K_0(\mathcal{V}ar)$ は環になる．構成法から明らかなように，写像

$$[\cdot] : \{\text{ 代数多様体 }\} \to K_0(\mathcal{V}ar)$$

は普遍的な一般Euler標数となる．すなわち全ての一般Euler標数は $K_0(\mathcal{V}ar)$ を経由する．

3 $K_0(\mathcal{V}ar)$ に値をとる測度と積分（ならし運転）

以後は簡単のために基礎体 k は代数閉体であると仮定する．代数多様体の点として閉点のみを考えることにする．

モティヴィック積分の分かりにくい点のひとつは，関数や積分の値として代数多様体の様なものが表れることであろう．実際のモティヴィック積分は代数多様体のアーク空間上で考えるが，まず感覚をつかむために，代数多様体上の積分を考えよう．

定義 1. 代数多様体 X の部分集合 A は，有限個の（*Zariski* 位相に関して）局所閉部分集合 A_i が存在し $A = \bigsqcup A_i$ となるとき，**構成可能**であるという．

構成可能部分集合 A が上のように $A = \bigsqcup A_i$ と書けるとき，元 $[A] \in K_0(\mathcal{V}ar)$ を $\sum [A_i]$ で定義する．この定義は A_i の取り方に依らない．代数多様体 X の構成可能部分集合全体の集合を $C(X)$ と書くことにする．$C(X)$ は有限加法族になる．すなわち有限和と補集合をとる操作で閉じている．写像

$$[\cdot] : C(X) \to K_0(\mathcal{V}ar)$$

を考えよう．この写像は（値として実数ではなく $K_0(\mathcal{V}ar)$ の元をとることを除けば）有限加法的測度になっている．

定義 2. X を代数多様体と $F : X \to K_0(\mathcal{V}ar)$ を写像とする．像 $F(X)$ が有限集合で，すべてのファイバー $F^{-1}(a)$ が構成可能部分集合であるとき F を**構成可能関数**とよぶ．

構成可能関数 $F: X \to K_0(\mathcal{V}ar)$ の測度 $[\cdot]$ に関する積分を次のように定義する．

$$\int F = \int F d[\cdot] := \sum_{a \in K_0(var)} [F^{-1}(a)]a.$$

例 3. X を非特異代数多様体，$Y \subseteq X$ を余次元 r の閉部分代数多様体とする．X 上の構成可能関数 F を次のように定義する．

$$F(x) = \begin{cases} 1 & (x \in X \setminus Y) \\ [\mathbb{P}^{r-1}] & (x \in Y). \end{cases}$$

$\tilde{X}$ を X の Y に沿った爆発とし，E を例外因子とする．すると自然な射 $E \to Y$ は局所的に自明な $\mathbb{P}^{r-1}$ 束なので，

$$[E] = [Y][\mathbb{P}^{r-1}] \in K_0(\mathcal{V}ar)$$

が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned} \int F d[\cdot] &= [X \setminus Y] + [Y][\mathbb{P}^{r-1}] \\ &= [X \setminus Y] + [E] \\ &= [\tilde{X}]. \end{aligned}$$

4 アーク空間上の積分

X を d 次元非特異代数多様体とする．X の（Zariski）接ベクトルはスキームの射

$$\operatorname{Spec} k[t]/(t^2) \to X$$

である．接ベクトル全体の集合 TX は自然な $2d$ 次元代数多様体の構造を持ち，自然な射 $TX \to X$ は局所自明な $\mathbb{A}^d$ 束となる．

非負整数 n に対し，射

$$\operatorname{Spec} k[t]/(t^{n+1}) \to X$$

を n ジェットという．X の n ジェット全体 J_nX はまた代数多様体となる．$n = 0, 1$ の場合，$J_0X = X$，$J_1X = TX$ となる．各 n について自然な射影 $\pi_n : J_{n+1}X \to J_nX$ が存在して，局所自明な $\mathbb{A}^d$ 束になっている．

X のアークとは射

$$\operatorname{Spec} k[[t]] \to X$$

のことをいう．アーク全体 $J_\infty X$ は代数多様体ではないがスキームとなり，射影極限 $\varprojlim J_nX$ と同一視される．

$K_0(\mathcal{V}ar)$ の中の $\mathbb{A}^1$ のクラスを $\mathbb{L}$ で記す．$\mathcal{M}$ を $K_0(\mathcal{V}ar)$ の $\mathbb{L}$ による局所化 $K_0(\mathcal{V}ar)[\mathbb{L}^{-1}]$ とする．いま $A \in C(J_nX)$ に対し，等式

$$[\pi_n^{-1}(A)] = [A]\mathbb{L}^d$$

が成り立つ．従って次の図式は可換になる．

$$\begin{tikzcd} C(J_nX) \arrow[rr, "\pi_n^{-1}"] \arrow[dr, "{[\cdot]\mathbb{L}^{-nd}}"'] & & C(J_{n+1}X) \arrow[dl, "{[\cdot]\mathbb{L}^{-(n+1)d}}"] \\ & \mathcal{M} & . \end{tikzcd}$$

アーク空間 $J_\infty X$ の上の**モティヴィック測度** μ_X は大雑把に言うと J_nX の測度 $[\cdot]\mathbb{L}^{-nd}$ の極限である．μ_X は $\mathcal{M}$ のある完備化 $\hat{\mathcal{M}}$ に値をとる．これは無限和を考える必要が出てくるからである．特別な場合として

$$\mu_X(J_\infty X) = [J_nX]\mathbb{L}^{-nd} = [X] \in \hat{\mathcal{M}}$$

が成り立つ．

可測関数と呼ばれる適当な条件を満たす写像 $F : J_\infty X \to \hat{\mathcal{M}}$ の μ_X に関する積分

$$\int F d\mu_X \in \hat{\mathcal{M}}$$

が (収束すれば) 定義される．例えば

$$\int 1 d\mu_X = \mu_X(J_\infty X) = [X]$$

となる．

非自明な可測関数としては大体次のようなものを考える．$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ をイデアル層，$\gamma : \operatorname{Spec} k[[t]] \to X$ をアークとする．$\gamma^{-1}\mathcal{I} = (t^n)$ とするとき，$\mathcal{I}$ の γ に沿った位数を

$$\operatorname{ord} \mathcal{I}(\gamma) := n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cap \{\infty\}$$

とする．ただし $(0) = (t^\infty)$ とみる．写像

$$\mathbb{L}^{-\operatorname{ord} \mathcal{I}} : J_\infty X \to \hat{\mathcal{M}}$$

は可測関数となる．

5　双有理射に対する変換公式

$f: Y \to X$ を非特異代数多様体の固有双有理射とする．

事実 1. 自然な写像 $f_\infty : J_\infty Y \to J_\infty X$ はほとんど全単射．すなわち $J_\infty Y$ と $J_\infty X$ のそれぞれ測度が零となる部分集合を除いたところで 1 対 1 対応となる．

これは射の固有性の付値判定法の帰結である．$J_\infty X$ と $J_\infty Y$ の上の積分を比較するのが次の変換公式である．

定理 1. $F : J_\infty X \to \hat{\mathcal{M}}$ を可測関数，$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$ を f の *Jacobi* イデアル．このとき次の等式が成り立つ．

$$\int F d\mu_X = \int (F \circ f_\infty)\mathbb{L}^{-\mathrm{ord}\,\mathcal{J}} d\mu_Y.$$

$\mathcal{J}$ は相対的標準因子 $K_{Y/X} := K_Y - f^* K_X$ を定義するイデアルに等しい．上の公式は実際には X が特異点を持つ場合でも正しいが，この場合 $\mathcal{J}$ は $K_{Y/X}$ を定義するイデアルではない．

この定理を適用すれば，最初に述べた Batyrev の結果の一般化，精密化を簡単に証明できる．

系 1. $Z \to X$，$Z \to Y$ を非特異射影的代数多様体の双有理射とする．$K_{Z/X} = K_{Z/Y}$ を仮定する．このとき，X と Y の *Hodge* 数は等しい．

証明．これを証明するには，$E(X; u, v) = E(Y; u, v)$ を示せば十分である．従って，$[X] = [Y] \in \hat{\mathcal{M}}$ を示せばよい．$\mathcal{J}$ を $K_{Z/X} = K_{Z/Y}$ を定義するイデアルとする．このとき定理より，

$$[X] = \int 1 d\mu_X = \int \mathbb{L}^{\mathrm{ord}\,\mathcal{J}} d\mu_Z = \int 1 d\mu_Y = [Y].$$

□

参考文献

[1] V. Batyrev. Birational Calabi-Yau n-folds have equal Betti numbers. In *New trends in algebraic geometry*. Klaus Hulek et al. (editors), CUP, pages 1–11, (1999).

[2] M. Kontsevich. Motivic integration. Lecture at Orsay, (1995).