野生McKay対応の展望

安田　健彦　(大阪大学)

本講演では講演者が数年前から行っている野生McKay対応（McKay対応の正標数への一般化）の研究（部分的にWoodとの共同研究）について概説し，さらに将来の展望について述べる．

1. McKay対応：スタックの双有理幾何の視点から

kを体とし，$SL_d(k)$の有限部分群Gに対し，商多様体$X := \mathbb{A}^d_k/G$はクレパント特異点解消$Y \to X$を持つとする．McKay対応とは「代数多様体のある不変量$\alpha(-)$について，$\alpha(Y)$は$G \subset SL_d(k)$から表現論的に決まる量に等しい」というタイプの結果を意味することが多い．$[\mathbb{A}^d_k/G]$を商スタックとし，αを適切にスタックに一般化すると，

$$\alpha(Y) = \alpha([\mathbb{A}^d_k/G])$$

という等式で表されることが期待される．これは「K同値な空間は等しい不変量を持つ」という一般的な原理の特別な場合と見なせる．

双有理幾何的的に空間を一般化していくと，**ログ・スタック**，つまりスタックZと$\mathbb{Q}$因子Dの対(Z, D)に行き着く．さらに，不変量を局所化して，究極的に以下のことが期待される：K同値なログ・スタック(Z, D)と(Z', D')，そして互いに対応する閉集合$W \subset Z$と$W' \subset Z'$に対して，

$$\alpha(Z, D)_W = \alpha(Z', D')_{W'} \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，$\alpha(-)_W$はαのWに沿った局所化を表す．

2. 弦理論的モチーフ（標数0）

本講演では不変量αとして弦理論的モチーフを考える．まず，標数0で分かっていたことを復習する．簡単のために基礎体kは代数閉体とする．Batyrev[1]は弦理論的E関数と軌道体E関数という2つの不変量を用いてある種のMcKay対応を示した．２つの不変量は講演者[9]により**弦理論的モチーフ**$M_{\mathrm{st}}(-)$に統一され，(1)の形の結果を得た．

定理 1 (Z, D)と(Z', D')はK同値なログ・スタックで川又ログ端末特異点のみを持つものとする．閉集合$W \subset Z$と$W' \subset Z'$は互いに対応しているとすると，

$$M_{\mathrm{st}}(Z, D)_W = M_{\mathrm{st}}(Z', D')_{W'}.$$

定理の特別な場合としてBatyrev[1]とDenef-Loser[3]による下の結果を得る．

系 2 $G \subset SL_d(k)$を有限部分群，$f : Y \to \mathbb{A}^d_k/G$をクレパント特異点解消とする．$\mathbb{A}^d_k/G$と$[\mathbb{A}^d_k/G]$での原点の像をともに0で表す．$\mathrm{Conj}(G)$を$G$の共役類集合とする．このとき，

$$[f^{-1}(0)] = M_{\mathrm{st}}(Y)_{f^{-1}(0)} = M_{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^d_k/G)_0 = M_{\mathrm{st}}([\mathbb{A}^d_k/G])_0 = \sum_{[g] \in \mathrm{Conj}(G)} \mathbb{L}^{w(g)}.$$

(両辺は$K_0(\mathrm{Var}_k)$の適当な拡張の元，$\mathbb{L}$はアフィン直線の類，$w(g)$は$g \in SL_d(k)$から定まる非負整数とする.)

本研究は科研費 (課題番号:22740020) の助成を受けたものである．

3. モチーフ積分（標数0）

弦理論的モチーフ $M_{\mathrm{st}}(Z,D)_W$ は Z のツイステッド・アーク空間上のモチーフ積分として表されることが期待される．Z が代数多様体であるか非特異スタックの場合には，このような表示が出来ることが分かっている．Z が特異スタックの場合には，現時点では特異点解消を用いた定義しかない．

定理1の状況で， Z と Z' のツイステッド・アークはほとんど1対1に対応する．この対応を通して，$M_{\mathrm{st}}(Z,D)_W$ の積分表示が $M_{\mathrm{st}}(Z',D')_{W'}$ の積分表示に変換されること示すというのが，定理の証明の概略である．アークは一種の「曲線」で，積分はそれらの広い意味での「数え上げ」なので,「Z と Z' の一般の曲線は1対1に対応するので，曲線の重み付き数え上げは，重みをきちんと対応させると等しい」という，より一般に成り立ちそうな原理の一種であるとみなせる．

Z が商スタック $[M/G]$ の場合には，Z のツイステッド・アークは $\operatorname{Spec} k[[t]]$ の G 被覆 E からの G 同変射 $E \to Z$ に対応する．G 被覆（の同型類）は有限個しかないので，

$$M_{\mathrm{st}}(Z,D)_W = \sum_{E:\,\operatorname{Spec} k[[t]]\text{ の }G\text{ 被覆}} (E\text{ の }M_{\mathrm{st}}(Z,D)_W\text{ への寄与}) \tag{2}$$

という分解が成り立つ．また，$\operatorname{Spec} k[[t]]$ の G 被覆は G の共役類と対応し，系2に現れる $\mathbb{L}^{w(g)}$ は g に対応する被覆 E の $M_{\mathrm{st}}([\mathbb{A}^d_k/G])_0$ への寄与に他ならない．E の寄与を E の重みとみなすと，(2) の右辺は G 被覆の重み付き数え上げとみなせる．系2からは，

$$Y\text{ の Euler 数} = \sharp\mathrm{Conj}(G) = \sharp\{\operatorname{Spec} k[[t]]\text{ の }G\text{ 被覆}\}$$

が導かれ，実際に被覆の（重み無し）数え上げが現れる．

4. 野生化

では，正標数ではどうだろうか．一般に代数多様体への有限群作用において，群の位数が標数と素な場合は標数0と大体同じ事が成り立つ．逆に，位数が標数で割り切れる場合を**野生**的といい，非常に解析が難しくなることが知られている．しかし，上述のモチーフ積分を使った議論は，少し難しくはなるが，最終的に非常に上手くいきそうなのだ．

もちろん新しい現象も現れる．正標数では，$\operatorname{Spec} k[[t]]$ の G 被覆が無限個，連続的な族として現れ，さらにモジュライ空間が無限次元になる．したがって，等式 (2) は有限和ではなくモチーフ積分を用いた式

$$M_{\mathrm{st}}(Z,D)_W = \int_{\{E:\,\operatorname{Spec} k[[t]]\text{ の }G\text{ 被覆}\}} (E\text{ の }M_{\mathrm{st}}(Z,D)_W\text{ への寄与})$$

に変更されなければならない．これに伴い，系2は以下のように変更されることが予想される．

予想 3 ([8, 6]) 有限部分群 $G \subset SL_d(k)$ を考え，$X := \mathbb{A}^d_k/G$ とおく．G は反射を含まない，つまり $\mathbb{A}^d_k \to X$ は余次元1でエタールとする．このとき，適当な関数 $E \mapsto w(E)$ に対し，

$$M_{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^d_k/G)_0 = \int_{\{E:\,\operatorname{Spec} k[[t]]\text{ の }G\text{ 被覆}\}} \mathbb{L}^{w(E)}$$

が成り立つ．さらに，クレパント特異点解消 $f : Y \to X$ が存在すれば，上式の両辺は $[f^{-1}(0)]$ に等しい．さらに，k が有限体 $\mathbb{F}_q$ で $G_{k((t))}$ が $k((t))$ の絶対 Galois 群を表すとすると，

$$\sharp(f^{-1}(0))(k) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{\text{連続準同形}\rho : G_{k((t))} \to G} q^{w(\rho)} \tag{3}$$

が成り立つ．ここで，$w(\rho)$ は ρ に対応する G 被覆 E に対する $w(E)$ に等しい．

G が素位数巡回群の場合は予想は成り立つ [7]．また，基礎体 k と冪級数環 $k[[t]]$ をともに完全離散付値環 R で剰余体 k が完全体であるもの（例えば $\mathbb{Z}_p$）に置き換えた場合にまで，予想を自然に一般化できる．

5. Bhargava の量公式と点の Hibert スキーム

Bhargava[2] は与えられた局所体 K と自然数 n に対し，K の n 次拡大を数え上げる公式を得た．Kedlaya[5] はこれを等式 (3) の右辺のような局所ガロア表現の数え上げとして解釈した．一方で，非常によく似た公式が $\mathbb{A}_k^2$ の n 点 Hilbert スキームからも現れる [4]．

G が n 次対称群 S_n で埋め込み $S_n \subset SL_{2n}(k)$ が標準置換表現 2 つの直和により与えられる場合，商多様体 $\mathbb{A}_k^{2n}/S_n$ のクレパント特異点解消として，$\mathbb{A}_k^2$ の n 点 Hilbert スキームが取れる．この状況で，予想 3 の等式 (3) が成り立つことを，上記の公式などを利用して Wood と講演者 [6] は示した．この結果は，野生 McKay 対応が数論と特異点の幾何を結びつける非常に興味深いものであることを示している．また証明のために，予想に現れる関数 w と Artin 導手の関係を明らかにした．この関係は，野生分岐（暴分岐）理論との関わりを示している．

6. 今後の課題と展望

野生 McKay 対応の研究は始まったばかりで，やるべき事が多く残されている．多くの人がこの研究に参入してくれることを期待している．下に今後の課題・展望をまとめる．

6.1. 野生 Deligne-Mumford スタック上のモチーフ積分の完成

予想 3 は野生 Deligne-Mumford スタック上のモチーフ積分の理論が完成すれば，その系として得られるはずのものである．理論の完成が急がれる．

6.2. 弦理論的不変量の明示的計算と特異点解消の反例

予想 3 によると，特異点の弦理論的不変量が数論的に計算できることになる．具体例において弦理論的不変量が病的な値になれば，特異点解消の反例が見つかる可能性がある．

6.3. 野生分岐理論との関係

野生分岐（暴分岐）は数論・数論幾何において重要な研究対象である．野生 McKay 対応では，野生分岐を必然的に取り扱うことになるが，他の野生分岐理論とどのように関係するのだろうか．興味深い問題である．

6.4. 大域化

局所体（冪級数体や p 進体）を大域体で置き換えるとどうなるだろうか．§3 で説明したような曲線の数え上げの議論は，技術的には非常に難しいにしても，基本的な考え方は機能するように思える．そうすると，大域体のガロア拡大の数え上げと，特異点解消上の有理点や整数点の数え上げが結びつくかもしれない．

6.5. クレパント特異点解消の存在と構成

いつ野生商特異点にクレパント特異点解消が存在するかについて，我々の知識は非常に乏しい．例えば，3次元に限って詳細に調べるのも面白い問題だと思う．また，モジュライ空間としてクレパント特異点解消を構成するのは別の興味深い研究だ．予想3が正しければ，ログ特異点解消を計算することで， 局所ガロア表現の数え上げを計算できるだろう．

6.6. 非可換代数幾何的アプローチ

McKay 対応への非可換代数幾何的アプローチ（非可換環や導来圏を使ったもの）も盛んに研究されているが，野生的状況はほとんど手つかずのようだ．素朴に標数0の議論を移植しようとしてもすぐに破綻する．新しいアイデアが待たれる．

参考文献

[1] Victor V. Batyrev. Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, Vol. 1, No. 1, pp. 5–33, 1999.

[2] Manjul Bhargava. Mass formulae for extensions of local fields, and conjectures on the density of number field discriminants. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, No. 17, pp. Art. ID rnm052, 20, 2007.

[3] Jan Denef and François Loeser. Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence. *Compositio Math.*, Vol. 131, No. 3, pp. 267–290, 2002.

[4] Geir Ellingsrud and Stein Arild Strømme. On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane. *Invent. Math.*, Vol. 87, No. 2, pp. 343–352, 1987.

[5] Kiran S. Kedlaya. Mass formulas for local Galois representations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, No. 17, pp. Art. ID rnm021, 26, 2007. With an appendix by Daniel Gulotta.

[6] Melanie Matchett Wood and Takehiko Yasuda. Mass formulas for local Galois representations and quotient singularities I: A comparison of counting functions. arXiv:1309:2879.

[7] Takehiko Yasuda. The p-cyclic McKay correspondence via motivic integration. arXiv:1208.0132, to appear in *Compositio Mathematica*.

[8] Takehiko Yasuda. Toward motivic integration over wild Deligne-Mumford stacks. arXiv:1302.2982, to appear in the proceedings of “Higher Dimensional Algebraic Geometry - in honour of Professor Yujiro Kawamata’s sixtieth birthday”.

[9] Takehiko Yasuda. Motivic integration over Deligne-Mumford stacks. *Adv. Math.*, Vol. 207, No. 2, pp. 707–761, 2006.