ディオファントス幾何における特異点

安田 健彦（大阪大学）

2026 年 3 月 26 日

企画特別公演、日本数学会2026年度年会、東京理科大学

講演のプラン

1. 特異ディオファントス幾何のモットー
2. 平面曲線の特異点と最大公約数
3. 特異ヴォイタ予想
4. 特異マニン予想
5. スタックの有理点とマーレ予想
6. 野性的スタック

時間が許せば

特異ディオファントス幾何のモットー

ディオファントス幾何

- ディオファントス問題：代数方程式の整数解や有理数解
- 幾何的アプローチ：代数多様体 X の整数点集合 $X(\mathbb{Z})$ や有理点集合 $X(\mathbb{Q})$ を見る

ディオファントス幾何のモットー

代数多様体の幾何（特に双有理幾何）がディオファントス問題を統制する

例

- ボンビエリ・ラング予想：一般型多様体（標準因子が巨大）は有理点が非稠密
- コリオ・テレーヌ予想 $\Rightarrow$ ファノ多様体（反標準因子が豊富）は、体を有限次拡大すれば有理点が稠密

特異ディオファントス幾何のモットー

ディオファントス幾何で多くの場合、非特異な多様体を考える。もしくは、非特異多様体に帰着してなるべく特異点を避ける。

問題

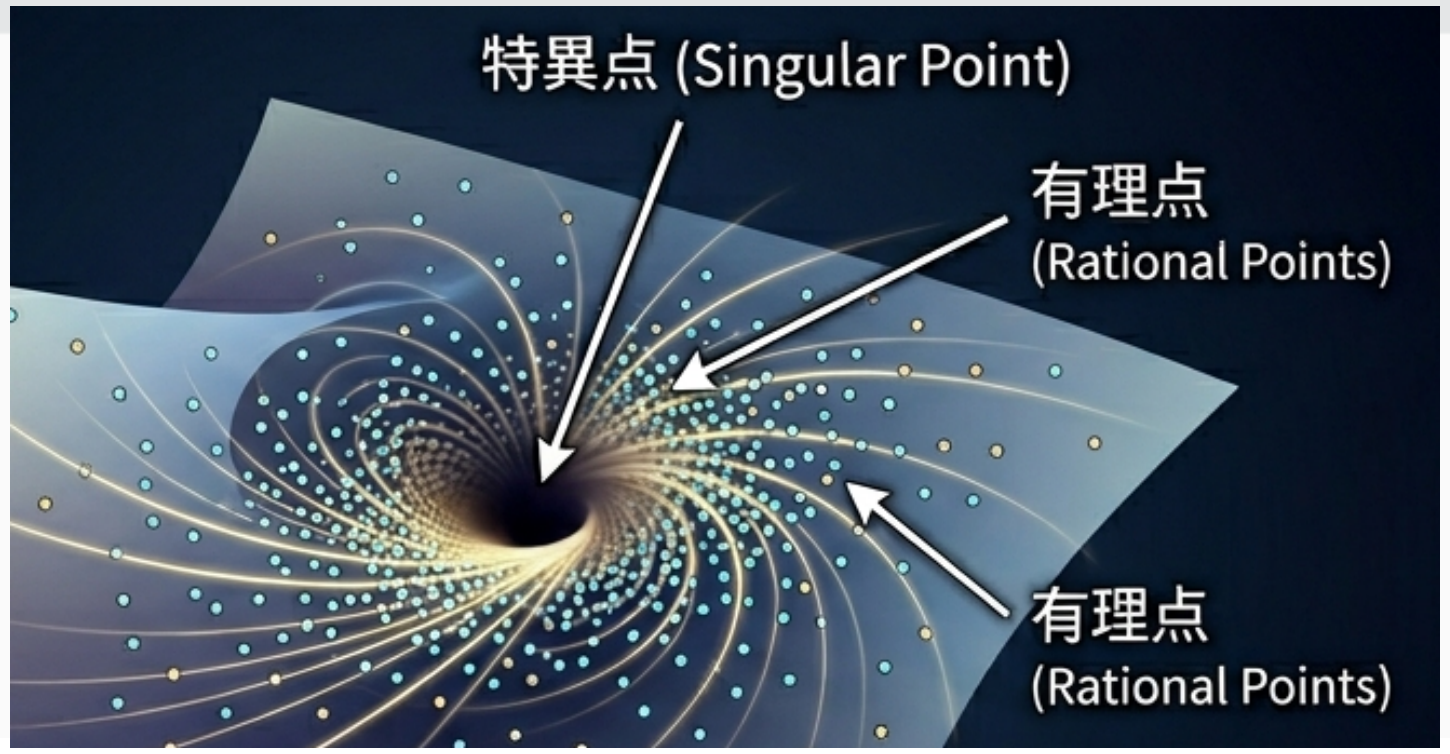
代数多様体の特異点はディオファントス問題にどのような影響を与えるか？

特異ディオファントス幾何のモットー

悪い特異点を持つ多様体ほど、より多くの有理点や整数点を持つ。

さらに、悪い特異点の近くに、より多くの有理点がある。

→　特異点は数論的ブラックホール！？



画像はGeminiで生成

平面曲線の特異点と最大公約数

平面曲線の特異点と最大公約数：トイ・ケース

定理(Y- arXiv, ’16)

$C \subset \mathbb{A}^2$：次数 d、原点での重複度 m の平面代数曲線

この曲線の全ての整数点 $(x, y) \in C(\mathbb{Z})$ に対し、以下が成り立つ。

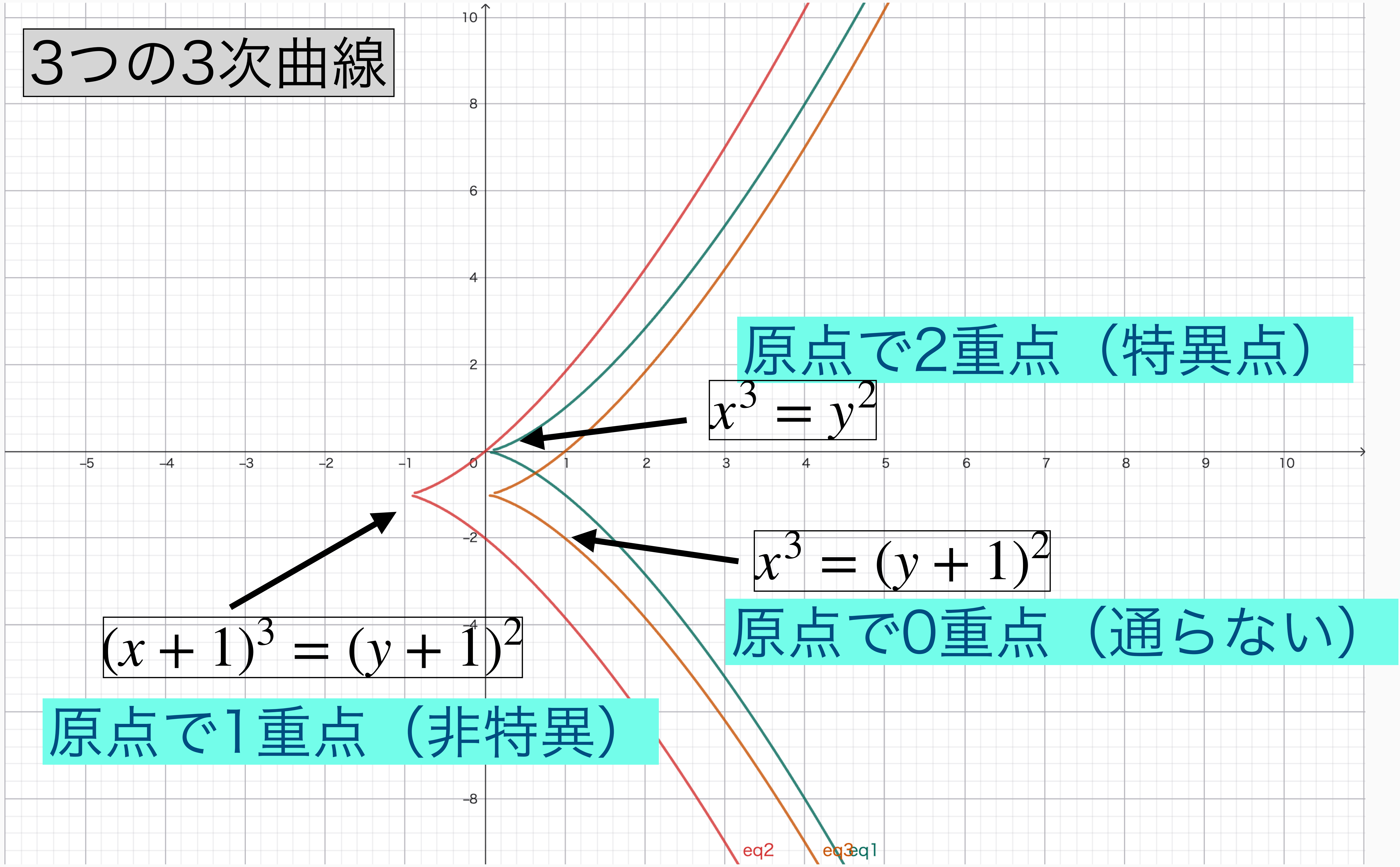
$$A_1 \cdot \max\{|x|, |y|\}^{m/d-\epsilon} \leq \gcd(x, y) \leq A_2 \cdot \max\{|x|, |y|\}^{m/d+\epsilon}$$

($\epsilon > 0$ は任意、A_1, A_2 は曲線と ϵ から決まる定数。)

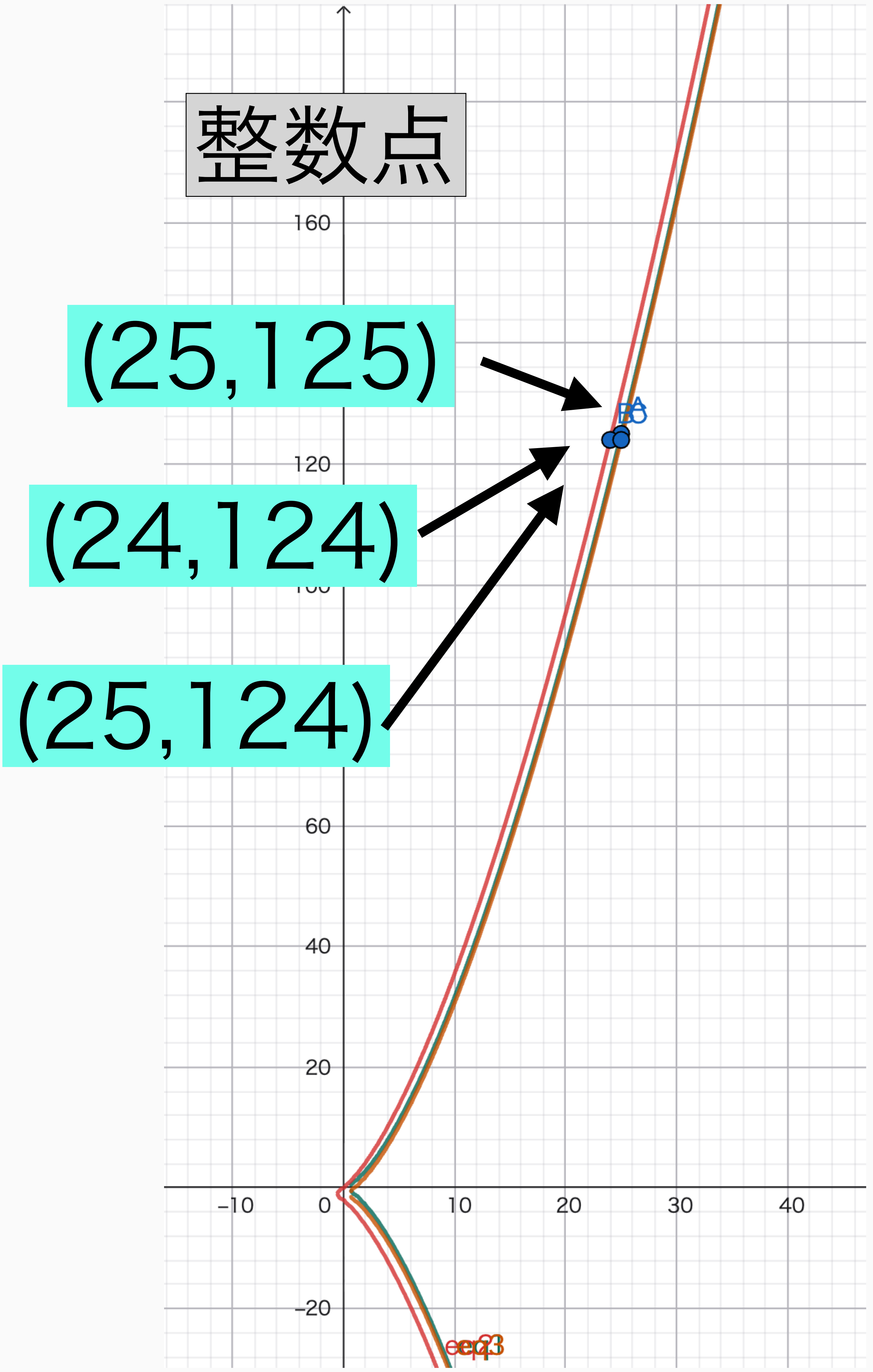
解説

- 高さ関数の基本性質から従う。
- 最大公約数は原点への非アルキメデス的（p 進的）近さを表している。
- 原点での特異点が悪いほど、整数点は原点に近い傾向。

例

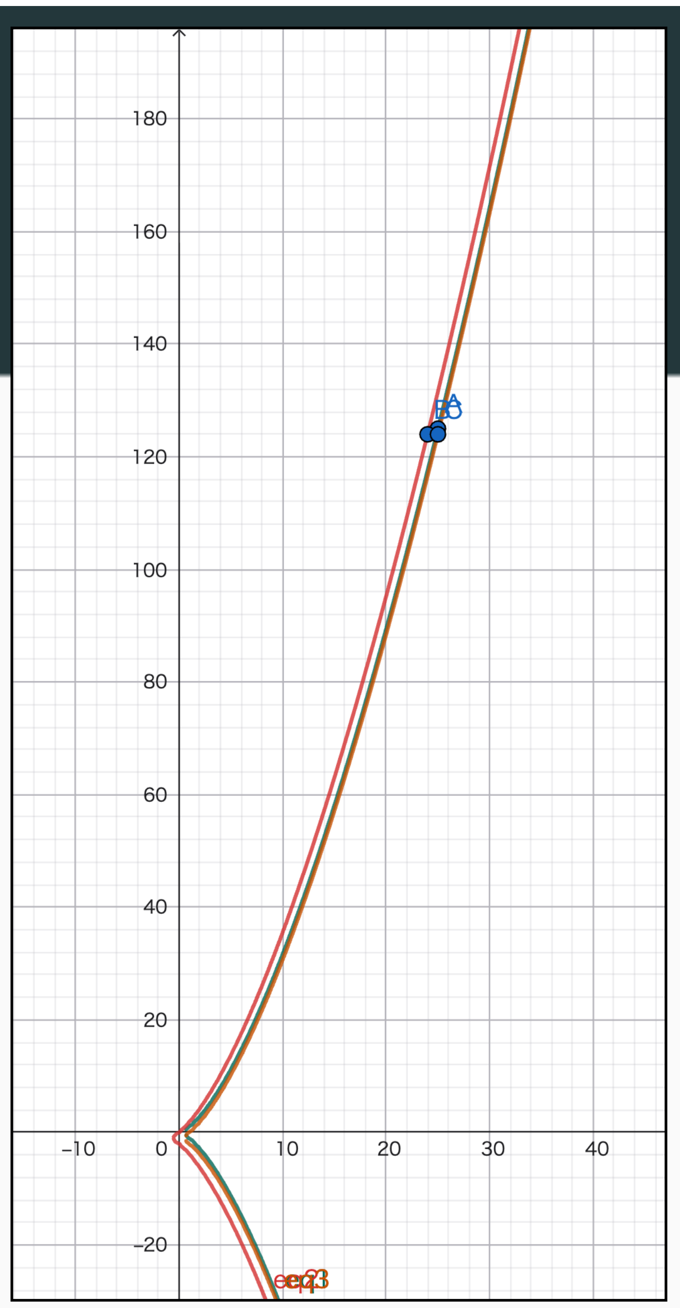


3つの3次曲線
原点で2重点（特異点）
$x^3 = y^2$
$x^3 = (y+1)^2$
原点で0重点（通らない）
$(x+1)^3 = (y+1)^2$
原点で1重点（非特異）
eq2
eq3
eq1



整数点
(25,125)
(24,124)
(25,124)

例



- 曲線 $x^3 = y^2$（重複度 2）の整数点 $(25, 125) = (5^2, 5^3)$：
  - ▶ 最大公約数は $5^2 = 125^{2/3}$
- 曲線 $(x+1)^3 = (y+1)^2$（重複度 1）の整数点 $(24, 124) = (5^2 - 1, 5^3 - 1)$：
  - ▶ 最大公約数は $4\ (\fallingdotseq 124^{1/3})$
- 曲線 $x^3 = (y+1)^2$（重複度 0）の整数点 $(25, 124) = (5^2, 5^3 - 1)$：
  - ▶ 最大公約数は $1 = 124^{0/3}$

特異点の悪さ

特異点の悪さ

原点への近さ

高さ関数のまとめ

- 閉部分多様体（閉部分スキーム）$Z \subset X$ に対し、高さ関数が定まる。

$$H_Z\,(\text{乗法的}),\ h_Z\,(\text{加法的}) : X(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R}$$

- 二つの関係：$h_Z = \log H_Z$
- 交点数の類似。数論的複雑さを測る。
- 素点への分解（局所交点数の類似）：
  - $H_Z = \prod_{p \in \{\text{素数}\} \cup \{\infty\}} H_{Z,p}$
  - $h_Z = \sum_{p \in \{\text{素数}\} \cup \{\infty\}} h_{Z,p}$
  - $H_{Z,p}$ や $h_{Z,p}$ は Z **への** p **進的近さを表す。**（大きいほど近い。）
- 素数 $p < \infty$ の寄与をまとめると：
  - $H_Z = H_{Z,\mathrm{fin}} \cdot H_{Z,\infty}$
  - $h_Z = h_{Z,\mathrm{fin}} + h_{Z,\infty}$

特異ヴォイタ予想

ヴォイタ予想

ヴォイタ予想 (Vojta '87)

X：非特異射影代数多様体、D：単純正規交差因子、A：豊富因子、$\epsilon > 0$。
あるザリスキ開集合内の有理点に対し以下の不等式が成立。

$$h_{K_X} + h_{D,\infty} \leq \epsilon h_A + O(1)$$

K_Xは標準因子

（1 次元）ヴォイタ予想 $\Rightarrow$ ロスの定理、ジーゲルの定理、モーデル・ファルティングスの定理

（一般次元）ヴォイタ予想 $\Rightarrow$ ボンビエリ・ラング予想

双有理幾何学者の視点

多様体と因子の対 (X, D) を考える！ 対の特異点も考える！！

特異点のクラス

- 特異点を持つ代数多様体 X（や対 (X, D)）を考える。
- 4 つの特異点のクラス：

$$\{\text{端末 T}\} \subset \{\text{標準 C}\} \subset \{\text{対数端末 LT}\} \subset \{\text{対数標準 LC}\}$$

- 特異点解消 $f \colon Y \to X$ における標準因子の差 $K_{Y/X} := K_Y - f^*K_X$ の係数（**食い違い係数**）を見る。

$$(\text{係数}) \begin{cases} > 0 & \text{(T)} \\ \geq 0 & \text{(C)} \\ > -1 & \text{(LT)} \\ \geq -1 & \text{(LC)} \end{cases}$$

特異ヴォイタ予想

・ヴォイタ予想：$h_{K_X} + h_{D,\infty} \leq \epsilon h_A + O(1)$

・特異点：{端末 T} ⊂{標準 C}⊂ {対数端末 LT} ⊂{対数標準 LC}

特異ヴォイタ予想 (Vojta '12, Y- '18)

特異点の寄与。有理点への制約を弱める。

・あるザリスキ開集合内の有理点に対し以下の不等式が成立。

$$h_{K_{(X,D)}} - h_{\mathrm{NonC,fin}} - h_{\mathrm{NonLC},\infty} \leq \epsilon h_A + O(1)$$

($K_{(X,D)} = K_X + D$ は対の標準因子、

NonC（NonLC）は特異点が標準（対数標準）でない所)

標準因子の高さは、
特異点の寄与を差し引けば、
豊富因子の高さに比べ小さい。

特異点が悪いほど制約（不等式）は弱い ⇒ 有理点が存在する余地が増える

例

- フェルマー型曲面：$F = \{x^n + y^n + z^n + w^n = 0\} \subset \mathbb{P}^3 \quad (n \geq 5)$
- μ_n 作用：$\zeta \cdot (x : y : z : w) := (\zeta x : \zeta y : z : w)$
- 商多様体 $X = F/\mu_n$ は
    - 有理的（$\mathbb{P}^2$ と双有理同値）
    - K_X は豊富
    - 標準的でない（有限個の）特異点を持つ
- $A = K_X$ とすると、特異ヴォイタ予想は以下の式になる。

$$(1 - \epsilon)h_A \leq h_{\mathrm{NonC,fin}} + O(1)$$

- 有理点は特異点に（非アルキメデス的に）近いこと表す。特異点の寄与がなければ矛盾。

特異マニン予想

マニン予想

- ヴォイタ予想：有理点への制約 $\Rightarrow$「有理点は少ない」というタイプの結論
- マニン予想：Fano 多様体（や有理連結多様体）は有理点たくさん持つことが多い。$\longrightarrow$ Q: どれぐらい多い？

マニン予想 (Manin '89)

- X：Fano 多様体 X（非特異、射影的、$-K_X$ が豊富）
- 稠密な有理点集合を持つと仮定。
- 適当な例外集合 $T \subset X(\mathbb{Q})$ の外で、$-K_X$ に関する**高さがある値以下の有理点の個数の増大度**は：

幾何が有理点の多さを統制

$$N(B) := \#\{x \in X(\mathbb{Q}) \setminus T \mid H_{-K_X}(x) \leq B\} \sim C\, B\, (\log B)^{\rho(X)-1}$$

(C は正の定数, $\rho(X)$ はピカール数（幾何的不変量！))

特異マニン予想

- 特異点：{端末 T} ⊂{標準 C} ⊂ {対数端末 LT}⊂ {対数標準 LC}

特異マニン予想 (Batyrev-Tschinkel ’98, Y- ’14)

- X：**対数端末特異点**のみを持ち、$-K_X$ が豊富（LT Fano）
- **標準（C）特異点のみ：**

端末（マイルド）になる障害
=特異点の悪さ

$$N(B) \sim C\,B\,(\log B)^{\rho(X)+\gamma(X)-1} \qquad (\gamma(X)\text{: クレパント因子の個数})$$

- **標準（C）より悪い特異点：**

$$N(B) \sim C\,B^{a}\,(\log B)^{b-1} \qquad (a > 1)$$

より大きな増大度

ここでも、**特異点が悪いほど有理点が多い**という現象が見られる。

スタックの有理点とマーレ予想

スタック

- {代数多様体} ⊂ {スキーム} ⊂ {(Deligne-Mumford) スタック}
- オービフォールド（軌道体）の代数幾何版
- 各点に有限群が付随している。

商特異点と関連（McKay対応）。
スタック構造自体がある種の特異点とみなせる。

例

n 点付き種数 g の半安定曲線のモジュライ・スタック $\overline{\mathcal{M}_{g,n}}$

動機

マニン予想をスタックに一般化して、より多くの種類のものを数えたい。
(できれば、双有理幾何的な定式化で、特異点の話とも整合的に)

高さ

困難

そもそも、スタックに対する良い高さ関数が最近までなかった。直線束（因子）に付随する高さ関数はノースコット性を満たさず、数え上げに使えない。

最近、得られた二種類の高さ関数：

- Ellenberg–Satriano–Zureick-Brown ’23：ベクトル束から定まる高さ関数（Wood-Yasuda の表現から決まる不変量の一般化）
- Darda–Yasuda ’24：被養育直線束（raised line bundle）から決まる高さ関数

アイデア：有理点を整数点に拡張する「拡張」するための障害を高さに反映。

スタック版マニン予想

スタック版マニン予想 (Darda-Yasuda '24)

$\mathcal{X}$：ファノ・スタック、c：適切な養育関数

スタック性（≒特異性）の寄与

$$\#\{x \in \mathcal{X}(\mathbb{Q}) \setminus T \mid H_{-K_{\mathcal{X}},c}(x) \leq B\} \sim C\,B\,(\log B)^{\rho(\mathcal{X})+j_c(\mathcal{X})-1}$$

($j_c(\mathcal{X})$ は c ジュニア・セクターの個数)

補足：

- $\mathcal{X}$ は有限個の**セクター**を持つ。**セクター**は $\mathcal{X}$ のスタック性（≒特異性）を幾何的に取り出したもの。
- セクターの集合上に年齢関数 age が定まる。養育関数 c もセクターの集合上の関数。養育関数が適切 $\Leftrightarrow \mathrm{age} + c \geq 1$.（養育後の年齢が 1 以上。）
- c ジュニア・セクターは $\mathrm{age} + c = 1$ となるセクター（養育後の年齢が 1）。

スタック版マニン予想（つづき）

スタック版マニン予想

$$\#\{x \in \mathcal{X}(\mathbb{Q}) \setminus T \mid H_{-K_{\mathcal{X}},c}(x) \leq B\} \sim C\,B\,(\log B)^{\rho(\mathcal{X})+j_c(\mathcal{X})-1}$$

- ファノ多様体に対しては、通常のマニン予想になる。
- 分類スタック BG については、（数体のガロア拡大数え上げに関する）マーレ予想になる。
- 適当な仮定の下で、ジュニア・セクターの個数 $j_c(\mathcal{X})$ と粗モジュライ空間 $\overline{\mathcal{X}}$ 上のクレパント因子の個数 $\gamma(\overline{\mathcal{X}})$ は一致（マッカイ対応）。
  (cf. 特異マニン予想：$N(B) \sim C\,B\,(\log B)^{\rho(X)+\gamma(X)-1}$)

分類スタック

例

有限群 G の分類スタック $\mathrm{B}G$

- 0 次元、非特異、連結
- 自明作用に付随する商スタックとして表せる。$[\operatorname{Spec}\mathbb{Q}/G]$
- $\mathrm{B}G$ の有理点は $\mathbb{Q}$ 上の G 代数（体とは限らないガロア拡大）に対応
  - $\mathrm{B}G(\mathbb{Q}) = \{\mathbb{Q}$ 上の G 代数$\} = \{\mathbb{Q}$ 上の G ガロア拡大$\}$
- つまり：$\mathrm{B}\,G$ の有理点を数える $\fallingdotseq$ G ガロア拡大 $K/\mathbb{Q}$ を数える

分岐と高さ

- 分類スタック $\mathrm{B}\,G$ では直線束は高さ関数に寄与しない。養育関数 c から高さ関数 H_c が定まる。
- 各素数 p での分岐の様子から定まる：

$$H_c(K/\mathbb{Q}) = \prod_{p:\text{素数}} p^{c(K_p/\mathbb{Q}_p)}$$

- 被覆 $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ の「特異点」である分岐を c で重み付けして測っている。

スタック版（バティレフ–）マニン予想のメリット

- Klüners によるマーレ予想の反例に、希薄集合による解釈を与える。
- 付加構造付き楕円曲線の数え上げの、統一的・幾何的解釈を与える。（Darda–Han arXiv ’26）

野性的スタック

野性化

- 標数 $p > 0$ の場合も、関数体 K 上の有理点 $\mathcal{X}(K)$ を数える問題を考えられる
- ただし、ある点で $\#\mathrm{Aut}(x)$ が p で割れるとき **野性的（wild）** になり解析が難しくなる
- **野性的分岐（暴分岐）** を扱う事になる。

野性的な場合に生じる困難

- 分岐の型が、**無限種類**に増える。さらに、連続的に変化し、モジュライ空間が無限次元になる。
- そのため、セクターの集合（有限集合）では情報が不足
- **解決法**：養育関数の定義域を、セクターの集合から、

$$\mathcal{J}_\infty \mathcal{X} \text{ (捻れアークの空間)}$$

という **無限次元空間**へアップグレードする必要がある

特異点をもつスタックも捉えられる

できた事

Darda-Y- arXiv ’25

- 正標数のスタックにたいするバティレフ・マニン型予想の定式化。
- その特殊ケースとして、関数体上の **野性的ガロア拡大**に対するマーレ型予想の定式化。
- アーベル p 群と適当な仮定を満たす養育関数の場合に予想を証明。
- $p = 3$ では $\overline{\mathcal{M}_{1,1}}$ が野性的だが、楕円曲線のファルティングス高さをスタックの有理点の高さと解釈できる。

まとめ

1. 悪い特異点を持つほど、有理点・整数点が多い。（特異ディオファントス幾何のモットー）
2. 新しい特異性（スタック性）を導入し、特異ディオファントス幾何の適用範囲を拡張。⇒　ガロア拡大の数え上げも捉えられる。
3. 野性的ケースにも拡張できる。（ブルーオーシャンです。）