モチーフ積分とMcKay対応

安田健彦（東北大学）

これは2019年3月21日に東京大学で行った第24回代数学若手研究会での講演をまとめたものだ．既に同様のテーマのYasudaによる論説（雑誌「数学」第70巻2号）があるので，詳細はそちらを見ていただきたい．この報告では，実際の講義に沿ってよりコンパクトに要約した．

第I部
モチーフ積分

1 Batyrevの定理

モチーフ積分の出発点となったのは以下のBatyrevによる定理だった．

定理 1. $\mathbb{C}$ 上の双有理同値なCalabi-Yau多様体は等しいBetti数を持つ．（ここで，Calabi-Yau多様体とは非特異固有代数多様体で標準因子が自明なもののことを指す．）

Batyrevはこれを正標数還元，p 進積分，Weil予想を用いて証明した．もう少し詳しく説明すると，要点は以下のようになる．

1. まず，第三の多様体 Z と固有双有理射 $f\colon Z \to X, g\colon Z \to Y$ を取る．
2. 正標数還元のテクニックを用いて，これら $\mathbb{C}$ 上の多様体と射から，p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の有限拡大 $\mathcal{O}$ 上の滑らか固有スキーム $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ とその間の双有理射を作る．無限個の p についてこのようなものが作れる．
3. 標準層 $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}}$ を用いて $\mathcal{O}$ 点の集合 $\mathcal{X}(\mathcal{O})$ に標準的な測度を入れることが出来る．$\mathcal{O}$ の剰余体を $\mathbb{F}_q$ とすると，この測度に関する体積 $Vol(\mathcal{X}(\mathcal{O}))$ は $\sharp\mathcal{X}(\mathbb{F}_q)$．（ただし，測度の正規化の仕方により，定数倍の差が出てくる．）$\mathcal{Y}$ についても同様である．
4. $\mathcal{Z}(\mathcal{O}) \to \mathcal{X}(\mathcal{O})$ は測度零の部分集合を除いて全単射で有り，これを通して $\mathcal{X}(\mathcal{O})$ 上の測度を $\mathcal{Z}(\mathcal{O})$ の測度に変換すると $\omega_{\mathcal{Z}/\mathcal{O}}$ の部分層 $f^*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}}$ で決まる測度になる．$f^*\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}} = g^*\omega_{\mathcal{Y}/\mathcal{O}}$ なので，$Vol(\mathcal{X}(\mathcal{O})) = Vol(\mathcal{Y}(\mathcal{O}))$ となり，$\sharp\mathcal{X}(\mathbb{F}_q) = \sharp\mathcal{Y}(\mathbb{F}_q)$ となる．
5. Weil予想から，有理点の個数の情報からBetti数が決まるので定理が成り立つ．

2 モチーフ積分

モチーフ積分では，p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の類似として形式的冪級数環 $k[\![t]\!]$ を考え，$\mathbb{Z}_p$ 点の代わりに形式的円盤 $\mathrm{Spec}\, k[\![t]\!]$ から与えられた代数多様体 X への射 $\mathrm{Spec}\, k[\![t]\!] \to X$ を考える．このような射をアークと呼び，アーク全体の集合を $J_\infty X$ と書き，X のアーク空間と呼ぶ．この空間の上で積分をするのがモチーフ積分の理論だが，通常の積分と大きく異なる点は，測度や積分の値が実数ではなく，代数多様体の圏のGrothendieck環を局所化，完備化したもの値をとる点である．

3　ジェット・スキーム

簡単のために，以下代数的閉体 k 上で話を進める．代数多様体 X が正の次元を持つときそのアーク空間は無限次元空間となる．アーク空間に測度を定義するには有限次元のジェット・スキームを用いる．

非負整数 n に対し，X の n ジェットとは射 $\operatorname{Spec} k[t]/(t^{n+1}) \to X$ のことである．n ジェット全体

$$J_nX = \{\operatorname{Spec} k[t]/(t^{n+1}) \to X\}$$

には自然なスキーム構造が入る．これを X の n ジェット・スキームと呼ぶ．これは k 上有限型のスキームである．$n = 0$ のときは，$J_0X = X$ となり，$n = 1$ では J_1X は接束 TX となる．

$n \geq m$ のとき，自然な全射 $k[t]/(t^{n+1}) \to k[t]/(t^{m+1})$ が閉埋め込み $\operatorname{Spec} k[t]/(t^{m+1}) \to \operatorname{Spec} k[t]/(t^{n+1})$ を定め，射 $J_nX \to J_mX$ を誘導する．X が非特異で d 次元の場合，この射は Zariski 局所自明な $\mathbb{A}^{(n-m)d}$ 束となる．この事実が，アーク空間上に測度を定めるときに鍵となる．

4　Grothendieck 環

代数多様体の Grothendieck 環 $K_0(\mathbf{Var}_k)$ を代数多様体の同型類 $[X]$ で生成される自由アーベル群

$$\bigoplus_{[X]} \mathbb{Z}[X]$$

を次の鋏関係式で割った商群と定義する．$Y \subset X$ が閉部分多様体のとき，

$$[X] = [X \setminus Y] + [Y].$$

この群に積を $[X] \cdot [Y] := [X \times_k Y]$ により定める．これにより，$K_0(\mathbf{Var}_k)$ は環になる．

この環を局所化したのち，完備化する．まず，$\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1_k]$ で局所化した環 $\mathcal{M} := K_0(\mathbf{Var}_k)[\mathbb{L}^{-1}]$ を考える．$F_m \subset \mathcal{M}$ を元 $[X]\mathbb{L}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ で $\dim X + n \leq -m$ となるもの全体で生成される部分群とする．これは部分群による降下フィルトレーションを定める．完備化 $\hat{\mathcal{M}}$ を

$$\hat{\mathcal{M}} := \varprojlim \mathcal{M}/F_m$$

で定義する．フィルトレーションの性質 $F_mF_n \subset F_{m+n}$ より，$\hat{\mathcal{M}}$ は自然な環構造を持つことが分かる．

5　モチーフ測度

アーク空間 $J_\infty X$ にはモチーフ測度という $\hat{\mathcal{M}}$ に値を取る測度が定まる．簡単のために，X が非特異の場合に限って，説明するが，特異点を持つ場合にも測度を定義することができる．

自然な写像 $J_\infty X \to J_nX$ を π_n で表す．ジェット・スキーム J_nX の構成可能部分集合 C により，$\pi_n^{-1}(C)$ という形に書けるアーク空間の部分集合をシリンダーという．このようなシリンダーに対し，その測度を

$$\mu_X(\pi_n^{-1}(C)) := [C]\mathbb{L}^{-nd}$$

と定義する．ここで，$[C]$ は C を有限個の局所閉集合 $C_i \subset J_nX$ により $C = \bigsqcup_i C_i$ と表し，$[C] := \sum_i [C_i]$ により定義する．これは，鋏関係により well-defined である．また，上の測度はシリンダーを $\pi_n^{-1}(C)$ という形に表す表し方に依存しない．

この定義により，$J_\infty X$ のシリンダー全体の集合上に測度 μ_X が定義された．この測度は，さらに可測部分集合全体にまで拡張できる．可測部分集合とはシリンダーの列で近似できるもののことである．

測度が定義されると，積分を考えることができる．可測関数 $F\colon J_\infty X \to \mathbb{Z}$ に対し，

$$\int_{J_\infty X} \mathbb{L}^F \, d\mu_X := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_X(F^{-1}(n))\mathbb{L}^n \in \hat{\mathcal{M}} \cup \{\infty\}.$$

と定義する．特に X が非特異で，$F \equiv 0$ のとき，

$$\int_{J_\infty X} \mathbb{L}^0 \, d\mu_X = \int_{J_\infty X} 1 \, d\mu_X = \mu_X(J_\infty X) = [X]$$

となり，X の不変量 $[X]$ の積分表示が得られた．

6　変数変換公式

代数多様体の射 $f\colon Y \to X$ に対し，アーク空間やジェット・スキームの射 $f_\infty\colon J_\infty Y \to J_\infty X$, $f_n\colon J_n Y \to J_n X$ が誘導される．f が固有双有理射の場合，付値判定法により f_∞ はほとんど全単射（測度零の部分集合を除き全単射）となる．変数変換公式は $J_\infty X$ 上の積分を $J_\infty Y$ 上の積分に変換したり，その逆向きの変換を記述する公式である．

定理 2 (変数変換公式)**.** Y は非特異とする．$J_\infty X$ 上の可測関数 F に対し，

$$\int_{J_\infty X} \mathbb{L}^F \, d\mu_X = \int_{J_\infty Y} \mathbb{L}^{F\circ f_\infty - \mathrm{ord}\,\mathrm{Jac}_f} \, d\mu_Y.$$

上の定理において Jac_f は射 f の Jacobian イデアル層を表し，$\Omega_{Y/X}$ の 0 次 Fitting イデアルとして定義される．X も非特異の場合は，相対標準因子 $K_{Y/X}$ の定義イデアルにも一致する．

変数変換公式から次の系を得る．

系 3. X, Y を K 同値（つまり，固有双有理射 $Z \to X$ と $Z \to Y$ が存在し $K_{Z/X} = K_{Z/Y}$ となる）な非特異代数多様体とすると，$\hat{\mathcal{M}}$ において $[X] = [Y]$.

7　実現

代数多様体の不変量

$$[\cdot]\colon \mathbf{Var}_k \to K_0(\mathbf{Var}_k),\ X \mapsto [X]$$

は加法性と乗法性を持つ．加法性とは，閉部分多様体 $Y \subset X$ に対し，$[X] = [Y] + [X \setminus Y]$ が成り立つこと，つまり鋏関係が成り立つことを意味し，乗法性とは $[X \times Y] = [X][Y]$ が成り立つことを意味する．一般に，環 R に値を取る代数多様体の不変量

$$e\colon \mathbf{Var}_k \to R$$

で加法性を乗法性を満たすものを一般 Euler 標数という．構成より $[\cdot]$ は普遍的な一般 Euler 標数である．つまり，一般 Euler 標数 e に対し $a\colon K_0(\mathbf{Var}_k) \to R$ が一意的に存在し，$a \circ [\cdot] = e$ となる．言い換えると，一般 Euler 標数を与えることと，環準同形 $K_0(\mathbf{Var}_k) \to R$ を与えることは同値となる．このような環準同形を実現という．実現を通して，$K_0(\mathbf{Var}_k)$ やその拡張 $\mathcal{M}, \hat{\mathcal{M}}$ からいろいろな情報を取り出すことができる．以下，一般 Euler 標数の代表的な例を挙げる．

1. k が有限体のときの有理点の個数 $\sharp X(k)$.

2. $k=\mathbb{C}$ のときの，位相的 Euler 標数 $e_{top}(X)$.

3. $k=\mathbb{C}$ のときの，Hodge-Deligne 多項式（E 多項式）.

4. $k=\mathbb{C}$ のときの，混合 Hodge 構造の Grothendieck 環における，$\sum_i(-1)^i[H_c^i(X,\mathbb{Q})]\in K_0(MHS)$.

5. 任意の体上で，Poincare 多項式.

最後の三つの実現は完備化にまで拡張できる．これを用いて次の系を得る．

系 4. X,Y を K 同値な非特異固有代数多様体とすると，各 i に対し Hodge 構造の同形 $H^i(X,\mathbb{Q})\cong H^i(Y,\mathbb{Q})$ が成り立つ．

これは前述の Batyrev の定理の Kontsevich による拡張，精密化である．

8 弦不変量

上述の非特異多様体に対する結果をマイルドな特異点を持つ多様体に拡張しよう．代数多様体 X は正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点を持つとし，$r>0$ を Gorenstein インデックス，つまり，rK_X が Cartier になるものとする．このとき，$J_\infty X$ 上に $\frac{1}{r}\mathbb{Z}$ 値関数 F_X が定まり，X の弦モチーフ $M_{\mathrm{st}}(X)$ を

$$M_{\mathrm{st}}(X):=\int_{J_\infty X}\mathbb{L}^{F_X}\,d\mu_X$$

により定義する．ただし，F_X が $\frac{1}{r}\mathbb{Z}$ に値を取るために，Grothendieck 環に $\mathbb{L}$ の r 乗根 $\mathbb{L}^{1/r}$ を形式的に追加する必要がある．また，この積分が収束することと X が KLT 特異点を持つことは同値である．KLT 特異点を持たない場合は，$M_{\mathrm{st}}(X)=\infty$ とする．

$f\colon Y\to X$ を特異点解消，$K_{Y/X}$ を相対標準因子とすると，

$$M_{\mathrm{st}}(X)=\int_{J_\infty Y}\mathbb{L}^{-\operatorname{ord}K_{Y/X}}\,d\mu_X$$

が成り立つ．$\operatorname{ord}K_{Y/X}$ は $K_{Y/X}$ に付随する位数関数である．関数 F_X は変数変換公式を適用すると，この等式が得られるように選ばれている．特に f がクレパント特異点解消，つまり $K_{Y/X}=0$ のとき，

$$M_{\mathrm{st}}(X)=\int_{J_\infty Y}1\,d\mu_X=[Y]$$

となる．系 3は以下のように一般化される．

系 5. X,Y を K 同値（つまり，固有双有理射 $Z\to X$ と $Z\to Y$ が存在し $K_{Z/X}=K_{Z/Y}$ となる）な正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体とすると，$M_{\mathrm{st}}(X)=M_{\mathrm{st}}(Y)$.

第 II 部

McKay 対応

9 オリジナルの McKay 対応

元々の McKay 対応は $SL_2(\mathbb{C})$ の有限部分群に関するものだった．有限部分群を G とする．G はアフィン平面 $\mathbb{C}^2$ に自然に作用する．商多様体 $\mathbb{C}^2/G$ はよく知られた ADE 型の特異点を持つ．最小

特異点解消の例外曲線の交わり方をグラフで表すと ADE 型 Dynkin 図形が得られる．同じ Dynkin 図形が代数幾何ではなく表現論を使っても得られるというのが McKay 対応の始まりだった．そこでは，グラフの頂点は非自明既約 G 表現と対応する．既約表現の個数と G の共役類の個数が等しいという事実を使うと，特に次の結果を得る．

命題 6. $\mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消の位相的 Euler 標数は G の共役類の個数と等しい．

10 高次元化

$\mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消はクレパント特異点解消にもなっていることに注意すると，上の命題は次のように一般化される．

命題 7 (Batyrev)**.** G を $SL_d(\mathbb{C})$ の有限部分群とする．$\mathbb{C}^d/G$ がクレパント特異点解消 Y を持つとする．このとき，Y の位相的 Euler 標数は G の共役類の個数と等しい．

これをさらに精密化し，クレパント特異点解消が存在しない場合にまで一般化することができる：

定理 8 (Batyrev, Denef–Loeser)**.** G を $SL_d(\mathbb{C})$ の有限部分群とする．

$$M_{\mathrm{st}}(\mathbb{C}^d/G) = \sum_{g \in \mathrm{Conj}(G)} \mathbb{L}^{d-\mathrm{age}(g)} \in \hat{\mathcal{M}}_{/}$$

ただし，$\hat{\mathcal{M}}_{/}$ は $\hat{\mathcal{M}}$ の変種，$\mathrm{Conj}(G)$ は共役類の集合，age は固有値から決まる非負整数である．

$M_{\mathrm{st}}(X)$ やその変種は X の特異点の情報を持っている．上の定理の変種を用いると，商特異点がいつ末端特異点，標準特異点になるかについての age を用いた判定法（Reid–Shepherd-Barron-Tai 判定法）の精密化を得ることができる．

11 野性化

上では $\mathbb{C}$ 上の McKay 対応について説明した．G の位数が基礎体の標数と互いに素であるという条件を課すと（従順ケース），任意の体上で同様の結果が同様の証明により得られる（ただし，基礎体が 1 の冪根を十分に含んでいない場合は少し注意が必要である）．G の位数が基礎体の標数と互いに素でない場合（野性ケース）に一般化するために，共役類の集合 $\mathrm{Conj}(G)$ を解釈し直すことから始める．オリジナルの McKay 対応では，共役類と G の既約表現が対応したのだったが，モチーフ積分の観点からは次の対応を考えるのが自然である．

$$\mathrm{Conj}(G) \leftrightarrow \{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}((t)) \text{ の } G \text{ 被覆 }\}$$

つまり，$\mathrm{Conj}(G)$ を $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}((t))$ のの G 被覆のモジュライ空間とみなす．これを踏まえ，野性ケースの McKay 対応は以下のように定式化される．

予想 9 (Yasuda)**.** k を完全体とし，G を $GL_d(k)$ の擬反射を持たない有限部分群とする．

$$M_{\mathrm{st}}(\mathbb{A}^d_k/g) = \int_{\Delta_G} \mathbb{L}^{d-v}.$$

ここで，Δ_G は $\mathrm{Spec}\,k((t))$ のの G 被覆のモジュライ空間，v はその上の $\frac{1}{\sharp G}\mathbb{Z}$ に値を取る関数とする．

G の位数が k の標数と等しい巡回群の場合は証明されている．この場合は Artin–Schreier 理論を用いると，モジュライ空間 Δ_G は無限次元アフィン空間となることが分かる．一般の有限群の場合，モジュライ空間 Δ_G が適切な意味で存在し，右辺の積分が実際に定義できることは Tonini-Yasuda が準備中の論文において示され，予想の等式は Yasuda が執筆中の論文において証明される予定である．

前章で言及した Reid–Shepherd-Barron-Tai 判定法の精密化への応用と同様に，G の位数が k の標数と等しい巡回群の場合，上の定理やその変種を用いて次の結果を得ることが出来る．k の標数を p とし，$G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする．表現 $G \hookrightarrow GL_d(k)$（の同型類）は G の生成元の Jordan 標準形で決まる．唯一の固有値は 1 なので，Jordan 細胞の対角成分は 1 で，位数 p であることから，細胞のサイズは高々p である．Jordan 細胞のサイズを $d_1, \ldots, d_l$ とし，$D := \sum_i d_i(d_i - 1)/2$ とおく．

系 10. G が擬反射を持たないと仮定する（これは $D \geq 1$ や $\mathbb{A}_k^d/G \not\cong \mathbb{A}_k^d$ と同値）．このとき，$\mathbb{A}_k^d/G$ が末端（標準，対数的標準）特異点を持つことの必要十分条件は $D \geq p+1$（$\geq p, \geq p-1$）である．（$\mathbb{A}_k^d/G$ は分解的なので，標準特異点を持つことと KLT 特異点を持つことは同値であることに注意する．）