代数多様体の分類とディオファントス幾何

安田健彦

2016 年 9 月 12 日

目次

第 1 章　代数多様体の基礎 **4**
1.1　代数幾何とは 4
1.2　アフィン代数多様体 5
1.3　座標環 8
1.4　アフィン代数多様体の関数体 9
1.5　射影代数多様体と擬射影代数多様体 10
1.6　射影コンパクト化 12
1.7　射 13
1.8　既約代数多様体の関数体 14
1.9　埋め込みと積 15
1.10 有理点 16
1.11 次元 17
1.12 非特異性 18
1.13 微分形式 19

第 2 章　因子 **20**
2.1　定義 20
2.2　線形同値 20
2.3　因子の引き戻し 21
2.4　カルティエ因子 22
2.5　標準因子 23
2.6　線形系 24
2.7　豊富因子 25
2.8　随伴公式 26

第 3 章　交叉理論 **27**
3.1　サイクルとチャウ群 27
3.2　交叉積 27
3.3　曲線と因子の錐 29
3.4　リーマン・ロッホ型の定理 ☻ 30

第 4 章　代数曲線 **33**
4.1　曲線上の因子と種数 33
4.2　リーマン・ロッホの定理 34
4.3　リーマン面 34
4.4　$g = 0$ 34
4.5　ブラウアー・セヴェリ多様体（参考：Artin [1982]）☻ 35
4.6　平面曲線 36
4.7　$g = 1$ 36

4.8 $g \geq 2$ 37

第 5 章 双有理幾何 **38**
5.1 有理写像 38
5.2 双有理幾何 40
5.3 標準因子公式 41
5.4 多重種数 42
5.5 小平次元と巨大因子 42
5.6 ファノ多様体 43
5.7 定理 5.6.6 の証明：曲げ折り法 44
5.8 ファイバー空間と分類 49
5.9 一般型多様体 51

第 6 章 有理点の高さ **53**
6.1 有理数体の場合 53
6.2 一般の代数体の場合 54
6.3 因子類に付随する高さ関数 58
6.4 バティレフ・マニン予想 60

第 7 章 特異点 **63**
7.1 背景 63
7.2 正規特異点 64
7.3 $\mathbb{Q}$ ゴレンシュタイン特異点と $\mathbb{Q}$ 分解的特異点 66
7.4 食い違い係数 68

第 8 章 アーベル多様体 **71**
8.1 基礎事項 71
8.2 ネロン・テイト高さ 71
8.3 モーデル・ヴェイユの定理 71

はじめに

このノートは 2016 年度（平成 28 年度）前期に大阪大学で行う代数幾何学特論の講義ノートである．講義の中心テーマは代数多様体の分類問題に設定した．また，2 次的なテーマとしてディオファントス問題にも言及する予定である．

講義やこのノートを準備するのに参考にした主な文献を以下に挙げる．講義内容に興味を持ちより詳細を知りたい人は，これらの文献に当たって欲しい．代数多様体の基礎に関しては Hartshorne [1977] を参考にした．好き嫌いはあるが，この本は代数幾何の一番標準的な教科書だろう．本講義では，スキーム理論を扱わない（少し補足事項として言及することはあるかもしれないが）ことにしたが，スキーム理論がよくまとまっている本である．また，Reid [1988] はより初等的な代数幾何の教科書で，動機付けを与える幾つかの例で参考にした．本の最後に代数幾何の歴史が簡単にまとめてあり，これも参考になった．

代数多様体の分類理論に関して雑誌数学の様々な良質の論説 [1] があり，それらも参考にした．

ディオファントス問題に関しては Hindry and Silverman [2000], Bombieri and Gubler [2006] を参考にした．

あまり見直していないので，間違いを多く含んでいると思う．（特に本講義の受講生は）見つけたら教えていただけるとありがたい．

発展的内容については ☻ のマークを付けて明示する．このマークがある部分では，より広い知識を仮定する．ここでは，しばしば代数多様体はスキームとみなし，層も自由に使うことにする．

特に断らない限り，体や環は可換で 1 を含むものとする．

[1] 古いものは以下のウェブサイトで見ることができる．
http://mathsoc.jp/publication/dbase/sugaku/article006.html

第1章　代数多様体の基礎

1.1　代数幾何とは

代数幾何とは，簡単に言うと代数方程式の解集合の幾何である．つまり，m 個の n 変数多項式で与えられる方程式

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_m(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

をみたす点集合の「形」を調べるのである．多項式は有限個の変数から和，積，スカラー倍を有限回繰り返して作られる．つまり，代数的に構成される．従って，代数幾何では，代数，特に可換環論と密接に関連している．

一般に，関数のクラスを決めて，そのクラスの関数を用いて多様体やその間の射を定めることで，幾何の分野が一つ定まる．連続関数なら位相幾何，微分可能関数なら微分幾何，複素正則関数なら複素幾何という具合だ．代数幾何に対応する関数のクラスは**多項式関数**になる．

代数幾何の一つの著しい特徴は，方程式の解を様々な「数」の集合の中で考えられることだ．例えば，多項式 f_i が整数係数を持つとき，そのような数の集合として $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{F}_p$ などがまず挙げられる．同じ方程式から様々な代数多様体を定義でき，それらの関係を調べることができ，特に整数論ではこれが重要になる．$\mathbb{C}$ をとると，複素代数多様体が現れ，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{Z}$ に対しては**ディオファントス問題**を考えることになる．ディオファントス問題とは方程式の有理数解や整数解を論じる問題のことである．一番有名な例は

$$x^n + y^n = z^n \quad (n \geq 3)$$

に非自明な整数解が存在しないことを主張するフェルマーの最終定理（Wiles–Taylor の定理）である．

代数多様体の**分類問題**は代数幾何の中心的テーマの一つでありつづけている．大雑把に言うと，代数多様体の離散的な不変量（有限個の整数の組など）により代数多様体を大別し，各々の幾何学的性質を記述することが目標である．1 次元の（非特異射影）代数多様体は種数 g という非負整数で大別される．代数多様体の性質により，$g = 0$，$g = 1$，$g \geq 2$ の三つの場合に分けることができる．2 次元ではイタリア学派や小平による分類理論がある．さらに一般次元での試みとして小平次元による分類（飯高プログラム）や極小モデル理論（森理論とも）などがある．2 次元以上では双有理同値の考え方が入ってくる．代数多様体が一つあれば，爆発という操作でいくらでも新しい代数多様体が得られるので，そのような操作で不変な性質調べるのが**双有理幾何**である．

ある方程式のディオファントス問題は同じ方程式が定義する例えば複素多様体の幾何学的性質と密接に関連している．このような視点からディオファントス問題を調べる分野を**ディオファントス幾何**という．代数曲線の方程式の場合では，種数 1 以下だと無限個の有理数解を持ち得て，実際に十分大きな代数体 k まで広げると無限個の解を持つ．一方種数 2 以上だと有限個しか有理数解を持たない（モーデル予想，ファルティングスの定理）．この結果を高次元の場合に一般化する予想としてバティレフ・マニン予想がある．これは，上述の分類問題と密接に関連していて，小平次元の類似である小平エネルギーを用いて定式化される．

1.2　アフィン代数多様体

代数幾何の基本的研究対象である代数多様体を定義していこう．ここにあまり時間を割きたくないので，実際には擬射影代数多様体のみを扱う．一般の代数多様体はアフィン代数多様体を貼り合わせて得られるが，貼り合わせをきちんと扱うのはそれなりに面倒だが，擬射影代数多様体では最初から張り合わされていて都合が良い．また，チャウの補題から擬射影代数多様体はある意味で十分に一般的であり，この場合に制限しても，それほど一般性を失わない．

また，現代では代数多様体をスキームの特別なクラスと定義することが多いが，短時間でスキームを定義するのは難しいので，本講義では古典的な定義を採用する．ただ，研究論文などはスキームを使って書かれていることが多く，意欲的な学生にはスキーム論も（いずれ）勉強することを勧める．

この章では代数閉体 K を固定する．また k を K の部分体とする．例えば K として $\mathbb{C}$ や $\bar{\mathbb{Q}}$（$\mathbb{Q}$ の代数的閉包），k として $\mathbb{Q}$ を想定すれば良い．

まずアフィン代数多様体を定義する．アフィン代数多様体は一般の代数多様体の構成要素となる．

定義 1.2.1. n **次元アフィン空間**とは

$$\mathbb{A}^n = K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K\}$$

のことである．基礎体 K を明示する場合はこれを $\mathbb{A}^n_K$ と書く．

K 係数 n 変数多項式環 $K[x_1, \ldots, x_n]$ を考えよう．multi-index notation を採用し，この環を $K[x]$ とも書く．

定義 1.2.2. 部分集合 $S \subset K[x] = K[x_1, \ldots, x_n]$ に対し，

$$V(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in S,\ f(x) = 0\} = \bigcap_{f \in S} V(f)$$

を S の**（共通）零点集合**と呼ぶ．ある S に対し $V(S)$ と表せる $\mathbb{A}^n$ の部分集合を**（$\mathbb{A}^n$ 内の）アフィン代数多様体**という．

注意 1.2.3. 代数多様体と呼ぶとき，文献によって既約性や非特異性などを仮定することがあるので注意が必要．本講義でも後にこのような仮定を課す．

補題 1.2.4. $\langle S \rangle \subset K[x]$ を S が生成するイデアルとする．（つまり，

$$\langle S \rangle = \{\sum_{i=1}^{l} f_i g_i \mid i \in \mathbb{N},\ f_i \in K[x],\ g_i \in S\}$$

である．）このとき

$$V(S) = V(\langle S \rangle)$$

が成り立つ．

証明. 一般に $S \subset S'$ のとき，$V(S) \supset V(S')$ となる．$S \subset \langle S \rangle$ なので，$V(S) \supset V(\langle S \rangle)$ が成り立つ．逆を示すために任意の $x \in V(S)$ を取り $V(\langle S \rangle)$ を示す．任意の $F \in \langle S \rangle$ を上のように $F = \sum_i f_i g_i$，$g_i \in S$ と表す．$g_i(x) = 0$ なので，

$$F(x) = \sum_i f_i(x) g_i(x) = 0.$$

従って，定義より $x \in V(\langle S \rangle)$ となる．　□

上の補題からアフィン代数多様体はイデアルに対して定まり，その生成元集合の取り方に依存しないことが分かる．

つぎの可換環論からの事実を思いだそう．（可換環の標準的な文献として Atiyah and Macdonald [1969], Matsumura [1989], Eisenbud [1995] を挙げておく．）

事実 1.2.5. $K[x]$ はネーター環である．

つまり，$K[x]$ の任意のイデアルは有限生成であり，任意のイデアルの昇鎖

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots$$

は十分大きな n に対し，$I_n = I_{n+1} = \cdots$ となる．従って，任意の $S \subset K[x]$ に対し，有限個の多項式 $f_i \in S$ により $\langle S \rangle = \langle f_1, \ldots, f_l \rangle$ となり，

$$V(S) = V(f_1 \ldots, f_l) := \{x \mid f_1(x) = \cdots = f_l(x) = 0\}$$

となる．特に，**アフィン代数多様体は連立代数方程式の解集合である**と言うことが出来る．

定義 1.2.6. アフィン代数多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ は，部分体 $k \subset K$ と $S \subset k[x]$ に対し $V = V(S)$ となるとき，k **上定義されている**という．V は k **アフィン代数多様体**であるともいう．

中間体 $k \subset k' \subset K$ に対し，V が k 上定義されていれば，もちろん k' 上も定義されている．

注意 1.2.7. 以後，代数多様体の射や部分多様体など様々な概念が「k 上定義」されたり，概念の k 上版などが登場する．これらは，特にディオファントス問題を扱うときに必要となる．

注意 1.2.8. ☻ スキームの言葉で書かれている文献も多いので，古典的な代数多様体の定義とスキームを使ったものとの間で相互に翻訳する必要が出てくる．k 上定義されたスキームとは，$\operatorname{Spec} k$ への射を備えたスキーム X である（射 $X \to \operatorname{Spec} k$ の事であるとも言える）．このとき，古典的な場合のように k を含む代数的閉体 K をあらかじめ考える必要は無い．体の拡大 k'/k に対し，k 上定義されたスキーム X からファイバー積

$$X_{k'} = X \otimes_k k' := X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k'$$

により，k' 上定義されたスキーム $X_{k'}$ を得る．

k を含む代数的閉体 K を固定しよう．古典的な意味で k 上定義された代数多様体 X に対し，k スキーム X' の（同型類）が一意的に定まる．点集合としての X は k スキームの射 $\operatorname{Spec} K \to X$ の集合を $X(K)$ と同一視できる．

問題 1.2.9. 次を示せ．

1. 部分集合 $S, S' \subset K[x]$ に対し $S \cdot S' := \{fg \mid f \in S,\, g \in S'\}$ とすると，

$$V(S) \cup V(S') = V(S \cdot S').$$

2. 部分集合 $S_i \subset K[x]$, $i \in I$（I は有限集合とは限らない）に対し，

$$\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i).$$

この問題より，次の命題が従う．

命題 1.2.10. $\{V(S) \mid S \subset K[x]\}$ は $\mathbb{A}^n$ の閉集合系を成す．

定義 1.2.11. この閉集合系が定める $\mathbb{A}^n$ の位相を $\mathbb{A}^n$ の**ザリスキ位相**という．アフィン代数多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ に誘導される位相を V の**ザリスキ位相**という．

以下，アフィン代数多様体に入る位相は特に断らない限りザリスキ位相とする．アフィン代数多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ の閉集合とは，V に含まれる（同じ $\mathbb{A}^n$ 内の）アフィン代数多様体に他ならない．

定義 1.2.12. 閉集合のことを**閉部分多様体**とも呼ぶ.（単に部分集合とみるか，それ自体をまた代数多様体とみなすかによって呼び分ける習慣があるが，厳密には意味に違いは無い.）また開集合 $U \subset V$ を V の**開部分多様体**ともいう．

例 1.2.13. $\mathbb{A}^1$ の閉集合は $\mathbb{A}^1$ 自身と（空集合を含む）有限部分集合である．この例が示すように，空で無いザリスキ開集合は巨大である．一般に，既約代数多様体の空でない開集合は稠密である．また，代数多様体は一般にザリスキ位相に関してハウスドルフではない．

定義 1.2.14. アフィン代数多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ と多項式 $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ について，

$$D(f) := \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$$

という形の集合を V **の基本開集合**という．

問題 1.2.15. 基本開集合はザリスキ位相の基本開集合系をなす事を示せ．

問題 1.2.16. アフィン代数多様体はザリスキ位相に関してコンパクトである事を示せ．

注意 1.2.17. $V = V(S) \subset \mathbb{A}^n$ の基本開集合 $D(f)$ は 1 次元高いアフィン空間 $\mathbb{A}^{n+1}$ 内のアフィン代数多様体と見なせる．実際，$\mathbb{A}^{n+1}$ の座標を $x_1, \ldots, x_n, y$ とし，

$$V' = V(S, f \cdot y - 1) \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

とおくと，自然な全単射

$$\begin{aligned} V &\to V' \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)^{-1}) \end{aligned}$$

が存在する．

定義 1.2.18. アフィン代数多様体 W は真の閉部分集合 $V_1, V_2 \subsetneq W$ により $W = V_1 \cup V_2$ と表せないとき**既約**であるという．

一般のアフィン代数多様体は

$$W = \bigcup_{i=1}^{l} V_i \quad (V_i \text{は既約})$$

と有限個の既約閉部分多様体の和集合として表せる．さらに $i \neq j$ のとき $V_i \not\subseteq V_j$ となるような無駄のない表示を選ぶことができ，それは一意的に定まる．

定義 1.2.19. 無駄のない表示に現れる既約閉部分多様体を W の**既約成分**という．また，この表示を W の**既約分解**という．

一般の代数多様体についても，上述の既約性に関する概念は同様に定義される．既約分解により，一般の代数多様体の研究を既約代数多様体の場合に帰着し，主に既約性を仮定して研究することが多い．

例 1.2.20. $V(xy) \subset \mathbb{A}^2$ は $V(xy) = V(x) \cup V(y)$ と既約分解される．

注意 1.2.21 (k 上定義される開・閉集合と k 上の既約性). V が k 上定義されるとき，k 上定義される閉集合や閉部分多様体，k 上定義される（基本）開集合などの概念が自然に定義される．V が k 上定義されていても，その既約成分 V_i も k 上定義されているとは限らない．k 上定義された閉集合のみを考えることで k **上既約**の概念が定義され（これと対比して，上で定義したものを K 上既約，幾何学的に既約などという.），k **上の既約分解**も定義される．

例 1.2.22. $K = \mathbb{C}$ として，アフィン代数多様体

$$V = V(x^2+1) = \{i\} \cup \{-i\} \subset \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$$

を考える．V は（$\mathbb{C}$ 上）既約ではないが，$\mathbb{R}$ 上や $\mathbb{Q}$ 上では既約である．V の（$\mathbb{C}$ 上の）既約成分は $\{i\}$ と $\{-i\}$ の 2 つだが，$\mathbb{R}$ 上や $\mathbb{Q}$ 上の既約成分は V 自身の 1 つだけである．

注意 1.2.23. ☻ スキームの言葉ではこの例は以下のようになる．任意の中間体 $\mathbb{Q} \subset k \subset \mathbb{C}$ に対し，V に対応する k スキームは

$$X_k = \operatorname{Spec} k[x]/\left\langle x^2+1 \right\rangle$$

である．$i \in k$ のとき，

$$k[x]/\left\langle x^2+1 \right\rangle \cong k[x]/\left\langle x-i \right\rangle \times k[x]/\left\langle x+i \right\rangle \cong k \times k$$

と環が体の積に分解することに対応して

$$X_k = \operatorname{Spec} k \sqcup \operatorname{Spec} k$$

となる．$i \notin k$ のときは，$k[x]/\left\langle x^2+1 \right\rangle$ は体であり，スキーム X_k は一点集合である.（しかし，X の $\mathbb{C}$ 点集合 $X(\mathbb{C})$ は 2 点からなる．$X(\mathbb{C})$ は X の部分集合では無い！）中間体 $k \subset k' \subset \mathbb{C}$ に対し，

$$k'[x]/\left\langle x^2+1 \right\rangle = \left(k[x]/\left\langle x^2+1 \right\rangle\right) \otimes_k k'$$

である事に対応して，

$$X_{k'} = X_k \otimes_k k'$$

となる（cf. 注意 1.2.8）.

1.3　座標環

多項式 $f \in K[x]$ は $\mathbb{A}^n$ の関数 $f\colon \mathbb{A}^n \to K$ とみなせる．

定義 1.3.1. アフィン代数多様体 $X \subset \mathbb{A}^n$ に対し，その**定義イデアル**を

$$I(X) := \{f \in K[x] \mid f|_X \equiv 0\}$$

と定義する．つまり，X 上では恒等的に消える多項式関数の集合である．

I は $\mathbb{A}^n$ 内のアフィン代数多様体に $K[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルを対応させ，以前に定義した V は逆向きの対応を与える．根基イデアルに制限するとこれは，1 対 1 対応となる．

定義 1.3.2. 可換環 R のイデアル J の**根基** $\sqrt{J}$ は

$$\sqrt{J} := \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N},\ f^n \in J\}$$

により定義される．

簡単に確かめられるようにイデアルの根基は再びイデアルとなる．また，

$$\sqrt{\sqrt{J}} = \sqrt{J}$$

が成り立つ．

定義 1.3.3. $J = \sqrt{J}$ となるイデアル J を**根基イデアル**と呼ぶ．

定理 1.3.4. *1.* （ヒルベルトの零点定理）イデアル $J \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ に対し，

$$I(V(J)) = \sqrt{J}$$

が成り立つ．

2. 2 つの写像

$$\{\mathbb{A}^n \text{内のアフィン代数多様体}\} \underset{I}{\overset{V}{\leftrightarrows}} \{K[x_1, \ldots, x_n] \text{ の根基イデアル}\}$$

はお互いの逆写像である．

定義 1.3.5. アフィン代数多様体 $X \subset \mathbb{A}^n$ に対し，商環 $R(X) := K[x]/I(X)$ を X の**座標環**と呼ぶ．

座標環の元 $f \in R(X)$ は X 上の関数とみなせる．実際，f の代表元 $\tilde{f} \in K[x]$ をとり，この多項式関数の X への制限 $\tilde{f}|_X$ は代表元の取り方に依らない．

問題 1.3.6. X が既約であることと $R(X)$ が整域であることは同値であることを示せ．ただし，環 R が整域とは，環 R の元 f, g が $fg = 0$ を満たすならば，$f = 0$ か $g = 0$ が成り立つことを言う．

X が部分体 k 上定義される場合には k **上の座標環**

$$R_k(X) := k[x]/I_k(X) \quad (I_k(X) := I(X) \cap k[x])$$

が定義される．$R(X)$ と $R_k(X)$ は

$$R(X) = R_k(X) \otimes_k K$$

という関係にある（cf. 注意 1.2.8，1.2.23）．

1.4　アフィン代数多様体の関数体

一般に，整域 R に対し，分数体 $Q(R) = \{f/g \mid f, g \in R,\, g \neq 0$ が定まる．2 つの分数式 f/g と f'/g' は $fg' = f'g$ となるとき，等しい元を定める．

定義 1.4.1. X を既約アフィン代数多様体とする．座標環 $R(X)$ の分数体を X の**関数体**と呼び $K(X)$ と記す．$K(X)$ の元を X 上の**有理関数**という．

元 $f \in R(X)$ に対し，基本開集合 $D(f) = \{f \neq 0\} \subset X$ 上では g/f^n, $n \in \mathbb{N}$ という形の関数が well-defined である．つまり環の**局所化**

$$R(X)_f := \{g/f^n \mid g \in R(X),\, n \in \mathbb{N}\} \subset K(X)$$

は $D(f)$ 上の関数の集合とみなせる．

定義 1.4.2. この環 $R(X)_f$ を $D(f)$ の座標環と呼び，その元を $D(f)$ 上の正則関数と呼ぶ．

注意 1.4.3. X が既約でなくても局所化 $R(X)_f$ が定義され $D(f)$ の座標環となる．しかし，この場合局所化の定義が少しだけ複雑になる．可換環論の教科書を参照のこと．また，分数体ではなく**全分数環**が定義される．

問題 1.4.4. $R(X)_f$ は注意 1.2.17 のように $D(f)$ をアフィン代数多様体とみなしたときの座標環と一致することを示せ．

このように $K(X)$ の任意の元 f は，X の空でない開集合 U 上の関数 $f : U \to K$ を定める．

定義 1.4.5. このような，U のうち最大のものを $\mathrm{dom}(f)$ と書き f の**定義域**という．

有理関数を

$$f : X \dashrightarrow K$$

と書く．破線は X 全体で定義されるとは限らないことを表している．

注意 1.4.6. $R(X)$ と局所化 $R(X)_f$ の分数体は同じ（自然に同型）である．この事実は擬射影代数多様体の関数体を定義するときに必要となる．

注意 1.4.7. X が k 上既約な代数多様体のとき，k 上の座標環 $R_k(X)$ の商体として k **上の関数体** $k(X)$ が定義される．

1.5　射影代数多様体と擬射影代数多様体

様々な状況ではアフィン代数多様体に無限遠点を付け加えて，射影代数多様体と呼ばれる閉じた（コンパクトな）空間にした方が都合が良い．

定義 1.5.1. n **次元射影空間** $\mathbb{P}^n$ を

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n &= \{K^{n+1}\text{の 1 次元線形部分空間}\} \\ &= \left(K^{n+1} \setminus \{0\}\right)/K^*\end{aligned}$$

により定義する．ここで，$/K^*$ は $K^* = K \setminus \{0\}$ のスカラー倍で移り合うベクトルを同一視して得られる商集合を意味し，下の等式は自然な 1 対 1 対応により同一視することを意味する．

$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ が定める $\mathbb{P}^n$ の点を $(x_0 : \cdots : x_n)$ と書く．$x_0, x_1, \ldots, x_n$ をこの点の**斉次座標**と呼ぶ．

点に対し斉次座標は一意には定まらず，K^* の元による積の分だけ自由度がある．

定義 1.5.2. **斉次多項式**とは全ての（係数が零でない）項の次数が等しい多項式のことである．

例 1.5.3. 例えば

$$f(x, y, z) = x^3 + 3x^2y - 5z^3 + xyz$$

は 3 次の斉次多項式である．

$f(x_0, \ldots, x_n)$ が m 次斉次多項式であることと

$$f(cx_0, \ldots, cx_n) = c^m f(x_0, \ldots, x_n), \quad (c \in K)$$

が成り立つことは同値である．$f \in K[x] = K[x_0, \ldots, x_n]$ が斉次多項式のとき，f は $\mathbb{P}^n$ 上の関数ではないが f が $\mathbb{P}^n$ の各点で零かどうかは意味を持つ．つまり $(a_0 : \cdots : a_n) = (b_0 : \cdots : b_n) \in \mathbb{P}^n$ に対し，

$$f(a_0, \ldots, a_n) = 0 \Leftrightarrow f(b_0, \ldots, b_n) = 0.$$

定義 1.5.4. $x = (a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ に対し，$f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ のとき $f(x) = 0$ と書き，x は f の零点であるという．f の零点の集合を $V(f)$ と書く．また $S \subset K[x]$ を斉次多項式の集合とすると

$$V(S) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid \forall f \in S,\, f(x) = 0\}$$

と定義する.（記号の乱用により，アフィン代数多様体のときと同じ記号 V を用いる．区別したいときには，a や p などの添え字を加えることにする.）ある S について $V(S)$ と表される $\mathbb{P}^n$ の部分集合を**射影代数多様体**と呼ぶ.

定義 1.5.5. 斉次多項式により生成される多項式環のイデアル $I \subset K[x]$ を**斉次イデアル**と呼ぶ．斉次イデアル $I \subset K[x_0, \ldots, x_n]$ に対し，

$$V(I) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid \forall f \in I,\, f(x) = 0\}$$

と定義する．$f(x) = 0$ とは，x の任意の斉次座標 $x_0, \ldots, x_n$ に対し，$f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ であることを意味するものとする.

斉次多項式の集合 S に対し，明らかに

$$V(S) = V(\langle S \rangle)$$

が成り立つ.

定義 1.5.6. 射影代数多様体 $V \subset \mathbb{P}^n$ の定義イデアル $I(V)$ を

$$\{f \in K[x_0, \ldots, x_n] \mid \forall p \in V,\, f(p) = 0\}$$

により定義する．$f(p) = 0$ の意味は上と同様とする.

問題 1.5.7. 射影代数多様体の定義イデアルは斉次で根基であることを示せ.

アフィンの場合と同様に，V と I による次の 1 対 1 対応がある：

$$\{\text{ 空でない } \mathbb{P}^n \text{ 内の射影代数多様体 }\} \leftrightarrow \{\langle x_0, \ldots, x_n \rangle \text{ に含まれる根基斉次イデアル }\}$$

注意 1.5.8. イデアル $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ とイデアル $K[x] = \langle 1 \rangle$ の零点集合はともに空集合となる為に，「$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ に含まれる」という条件が必要となる.

定義 1.5.9. 部分体 $k \subset K$ に対し，部分集合 $S \subset k[x] \subset K[x]$ に対し $V(S)$ と表される射影代数多様体は k **上定義されている**という.

定義 1.5.10. $\mathbb{P}^n$ 内の射影代数多様体全体は閉集合系を成す．対応する $\mathbb{P}^n$ の位相を**ザリスキ位相**と呼ぶ．射影代数多様体 $V \subset \mathbb{P}^n$ の**ザリスキ位相**は $\mathbb{P}^n$ のザリスキ位相から誘導されるものと定義する.

射影代数多様体の開集合を擬射影代数多様体と呼ぶ．擬射影代数多様体にも位相が誘導され，これもザリスキ位相と呼ぶ.

今後，**代数多様体**といえば擬射影代数多様体を表すものとする [1].

代数多様体の位相は，特に断らなければザリスキ位相を考えるものとする．代数多様体 X の局所閉 [2] 集合 Y は再び（擬射影）代数多様体となり，Y を X の**部分（代数）多様体**と呼ぶ.

代数多様体 X が**既約**であるとは，真閉部分集合 $X_1, X_2 \subsetneq X$ で $X = X_1 \cup X_2$ となるものが存在しないことである.

[1] 通常の定義では，擬射影でない代数多様体も存在するが，擬射影的なものに制限しても，それほど一般性を失わない．つまり，多くの話は擬射影代数多様体の圏の中で展開できる.

[2] 局所閉集合とは開集合と閉集合の交わりとなる部分集合のこと.

k 上定義された閉集合に制限するとことで，k 上のザリスキ位相，k 開集合，k 部分多様体，k 上既約などの概念も同様に定義される．

注意 1.5.11. 代数多様体はザリスキ位相に関してコンパクトである．$K = \mathbb{C}$ のとき，代数多様体は $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ の通常の位相から誘導される位相も持つ．この位相は通常の位相，解析的位相などと呼ばれる．射影代数多様体はこの位相に関してコンパクトであるが，一般の代数多様体はそうではない．次章のコンパクト化という用語はこの事実に基づく．

1.6　射影コンパクト化

$\mathbb{P}^n$ は $\mathbb{A}^n$ に**無限遠点**を付け足して得られると見なすことができる．まず単射

$$\iota : \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \cdots : x_n)$$

がある．この写像の像は $V(x_0)$ の補集合 $D(x_0)$ である．(一般に，斉次多項式 f に対し $D(f) = \{f \neq 0\} = \mathbb{P}^n \setminus V(f)$ とおく.）しばしば $\mathbb{A}^n$ と $\iota(\mathbb{A}^n) = D(x_0)$ を同一視して，$\mathbb{A}^n$ を $\mathbb{P}^n$ の開部分集合とみなす．

$$V(x_0) = \{(0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n\}$$

は $\mathbb{P}^{n-1}$ と自然に同一視でき，

$$\mathbb{P}^n = D(x_0) \sqcup V(x_0) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$$

という $\mathbb{P}^n$ の分解を得る．$V(x_0)$ の点 $(0 : a_1 : \cdots : a_n)$ は $\mathbb{A}^n$ の直線

$$\{(ca_1, \ldots, ca_n) \mid c \in K\}$$

を無限に伸ばした先に加えられた 1 点（無限遠点）と解釈できる．

例 1.6.1. $K = \mathbb{C}$ のとき，$\mathbb{P}^1$ は $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ に 1 点 $\mathbb{P}^0$ を加えて得られる 1 点コンパクト化で球面 S^2 に（解析的位相に関して）同相である．

定義 1.6.2. アフィン代数多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ の**射影コンパクト化** $\overline{V}$ を $\iota(V)$ の閉包として得られる射影代数多様体と定義する．

$\overline{V} \cap \mathbb{A}^n = V$ となることが分かる．つまり，射影コンパクト化 $\overline{V}$ は V に適当な無限遠点を付け加えたものである．付け加えられる無限遠点は，V の点の極限となるものである．

射影コンパクト化の具体的な計算は多項式の斉次化を用いて成される．

定義 1.6.3. m 次多項式 $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ の**斉次化** $f^h \in K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ とは，f の各項に適当な x_0 のベキ x_0^l，$0 \leq l < m$ を掛けて得られる m 次斉次多項式である．イデアル $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ の**斉次化** $I^h \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ を

$$I^h := \langle f^h \mid f \in I \rangle$$

により定義する．

例 1.6.4. 例えば

$$f = x_1^3 + x_1 x_2 + 3$$

の斉次化は

$$f^h = x_1^3 + x_0 x_1 x_2 + 3x_0^3$$

である．

事実 1.6.5 (Cox et al. [2007, p. 390])**.** アフィン代数多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ の定義イデアルを I とするとき，

$$I(\overline{V}) = I^h.$$

注意 1.6.6. 一般に I の基底 $f_1, \ldots, f_l$ に対し，$f_1^h, \ldots, f_l^h$ は I^h の基底にはならない．しかし，$f_1, \ldots, f_l$ が I の（次数付き多項式順序に関する）グレブナー基底ならば，$f_1^h, \ldots, f_l^h$ は I^h の基底になる．特に，I が 1 つの元 $0 \neq f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ で生成されるとき，$I^h = \langle f^h \rangle$ となる．（この点に関して，講義で嘘を言ってしまったようだ.）

x_0 を他の変数 x_i で置き換えることで，$D(x_i)$ もアフィン空間と同一視できる．つまり各 $i = 0, \ldots, n$ に対し，埋め込み $\iota_i \colon \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ が存在する．

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} D(x_i)$$

であるので，$\mathbb{P}^n$ は $n+1$ 個の $\mathbb{A}^n$ と同形な開集合で覆われる．従って，射影代数多様体 $V \subset \mathbb{P}^n$ は $n+1$ 個のアフィン代数多様体 $V_i = V \cap D(x_i)$ を貼り合わせて得られる．

各アフィン代数多様体 V_i の基本開集合全体 $\mathcal{U}_i$ の和集合 $\mathcal{U} = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ は V のザリスキ位相の基本開集合系を成す．$\mathcal{U}$ の元を V の**基本開集合**[3] と呼ぶ．W を V の開集合（従って擬射影代数多様体）とすると，W は V の位相から誘導される位相を持ち，これを W の**ザリスキ位相**という．$W = \bigcup_i U_i$, $U_i \in \mathcal{U}$ という開被覆が存在する．これを**基本開被覆**[4] と呼ぶ.

1.7　射

定義 1.7.1. アフィン代数多様体 $Y \subset \mathbb{A}^n$, $X \subset \mathbb{A}^m$ に対し写像 $f \colon Y \to X$ が**射**（正則写像，多項式写像とも）であるとは，f を m 個の関数を用いて

$$(f_1, \ldots, f_m) \colon Y \to X \subset \mathbb{A}^m$$

と表したとき，$f_i \in R(Y)$ となることである．特に $X = \mathbb{A}^1 = K$ のとき，f を Y 上の**正則関数**と呼ぶ．Y から X への射の集合を $\mathrm{Hom}(Y, X)$ を書く．Y 上の正則関数の集合を $\mathcal{O}(Y)$ と書く．

射 $f \colon Y \to X$ による関数の**引き戻し写像**を

$$f^* \colon R(X) \to R(Y),\ g \mapsto g \circ f$$

で定義する．

引き戻し f^* は K 代数の準同形となる．逆に K 代数の準同形 $R(X) \to R(Y)$ は一意的に定まる射 $f \colon Y \to X$ の引き戻し写像になっている．

注意 1.7.2. 圏論的にいうと，アフィン代数多様体の圏は有限生成被約 K 代数の圏と反変同値である，といえる．

上の定義で，X, Y が $k \subset K$ 上定義され，$f_i \in R_k(Y)$ であるとき，f は k **上定義される**という．f は k **射**であるともいう．f が k 上定義されるときは $R_k(X) \to R_k(Y)$ は k 代数の準同形になる．

[3] この定義はあまり一般的ではないだろう．この定義は $\mathbb{P}^n$ の座標の取り方に依存するが，依存しない概念を考えても良い．より一般に，アフィン開集合という概念もある．いずれにしても，$\mathcal{U}$ が基本開集合系になるので，これらの定義の違いはそれほど問題にならないだろう．つまり，各点 $v \in V$ の開近傍でアフィン代数多様体になるものをとるというのが通常の使い方なので，基本開集合系を成していれば，どの概念を考えてもあまり違いはない．

[4] これは，アフィン開被覆と呼ばれるものの本講義での代替物である．

定義 1.7.3. 擬射影代数多様体の写像 $f\colon Y \to X$ が**射**であるとは，基本開集合による被覆 $Y = \bigcup Y_j$，$X = \bigcup X_i$ が存在し，各 Y_j の像はある X_i に含まれ，誘導されるアフィン代数多様体の写像 $f|_{Y_j}\colon Y_j \to X_i$ が射となることと定義する．X, Y が k 上定義され，X_i，Y_j，$f|_{Y_j}\colon Y_j \to X_i$ が全て k 上定義されるように選べるとき，f は k **上定義される**という．

代数多様体の射 $f\colon Y \to X$ が**同型射**であるとは，それが全単射で逆写像も射となることをいう．同型射 $f\colon Y \to X$ が存在するとき，Y と X は**（K 上）同型である**といい $Y \cong X$ と記す．Y, X が k 上定義され，k 上定義される同型射 $f\colon Y \to X$ があるとき，Y, X は k **同型**または k **上同型**であるといい，$Y \cong_k X$ と書く．

X と Y が k 同型なら同型だが逆は一般に成り立たない．

例 1.7.4. $X = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ とし，写像

$$f\colon \mathbb{A}^1 \to X,\ a \mapsto (a^2, a^3)$$

を考える．これは任意の体 k 上定義される射である．さらに全単射でもあるが同型射ではない．つまり逆写像が射ではない．$R(X) = K[x,y]/\langle y^2 - x^3 \rangle \cong K[t^2, t^3]$（1 変数多項式環 $K[t]$ の t^2, t^3 で生成される部分 K 代数）であり，引き戻し写像 $f^*\colon R(X) \to R(\mathbb{A}^1)$ は埋め込み写像 $K[t^2, t^3] \hookrightarrow K[t]$ と同一視される．最後の K 代数準同形が同型でないことから f が同型でないことが従う．

問題 1.7.5. 代数多様体の射 $g\colon Z \to Y$ と $f\colon Y \to X$ に対し，合成 $f \circ g\colon Z \to X$ も射であることを示せ．

これにより代数多様体とその射のなす圏が定まる．また k 代数多様体と k 射の圏も定義できる．

射影代数多様体の重要な性質として，次が成り立つ．

命題 1.7.6. Y が射影代数多様体のとき，射 $f\colon Y \to X$ は閉写像（閉集合の像は閉集合）である．特に $f(Y) \subset X$ は閉集合である．

注意 1.7.7. Hartshorne [1977, II, 2] にある概念を使うと（スキームの言葉で書かれているが），命題のような射 f は射影的射であり，射影的射は固有射であり，固有射は閉写像であるというふうにして命題を導くことができる．命題の証明がスキームを使わずに述べられている文献もあるはずだが，私にはすぐに見つけられなかった．知っている人は教えて下さい．

定義 1.7.8. 代数多様体 X の開集合 U が**アフィン開集合**であるとは，U がアフィン代数多様体と同型であることと定義する．

今後，言葉の乱用により，アフィン代数多様体と同形な代数多様体もアフィン代数多様体と呼ぶことにする．（例えば部分集合 $D(f) = \{f \neq 0\} \subset \mathbb{A}^n$ はこれまでの意味ではアフィン多様体ではないが，$\mathbb{A}^{n+1}$ の閉部分集合と同型になるのでアフィン代数多様体と呼ぶことにする．）

1.8　既約代数多様体の関数体

既約アフィン代数多様体 X に対し，座標環 $R(X)$ と関数体 $K(X)$ が定義されることを見た．

補題 1.8.1. 既約アフィン代数多様体 X に対し自然な同型

$$K(X) = \{(f, U) \mid \emptyset \neq U \subset X \text{ 開集合},\ f : U \to K \text{ 正則関数 }\}/\sim$$

がある．ここで，同値関係 $\sim$ は

$$(f, U) \sim (g, V) \Leftrightarrow f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$$

で定義し，商集合には関数の和と差により，自然な体の構造を入れる．

証明. 読者に任せる. □

定義 1.8.2. （アフィンとは限らない）既約代数多様体 X の関数体 $K(X)$ を

$$K(X) := \{(f, U) \mid \emptyset \neq U \subset X \text{ 開集合}, f : U \to K \text{ 正則関数 }\}/\sim$$

により定義する.

補題 1.8.3. 空でない開集合 $U \subset X$ に対し，自然な同型

$$K(U) \cong K(X)$$

がある.

証明. 明らか. □

1.9　埋め込みと積

定義 1.9.1. 代数多様体の射 $f\colon Y \to X$ が**埋め込み**（embedding or immersion）であるとは，像 $f(Y)$ が X の局所閉集合で射 $f\colon Y \to f(Y)$ が同型射であることである．さらに，像が**閉集合（開集合）**であるとき**閉埋め込み（開埋め込み）**という.

次の補題が直ちに従う.

補題 1.9.2. （閉，開）埋め込み写像の合成は（合成可能な場合は）再び（閉，開）埋め込み写像となる.

注意 1.9.3. 元々，擬射影代数多様体 X は射影空間 $\mathbb{P}^n$ の部分集合として定義され，付随する埋め込み写像 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ は上の意味で埋め込みである．しかし，X の射影空間への埋め込みはそれ以外にも無限にある．例えば，下のベロネーゼ埋め込み（d 重埋め込み）により，いくらでも大きい次元の射影空間に埋め込める．同型な代数多様体が共有するような（つまり射影空間への埋め込み方に依存しない）性質のみを研究対象とすることが多いが，具体的な計算や構成をするために適当な埋め込みを考えることもある.

例 1.9.4. 整数 $d > 0$ に対し，$N = \binom{n+d}{n}$ は n 変数の d 次単項式の個数である．これを $m_1, \ldots, m_N$ とする．**ベロネーゼ埋め込み（d 重埋め込み）**は

$$\beta_d\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{N-1},\ (x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (m_1(x) : \cdots : m_N(x))$$

で与えられる（問題：well-defined であることを確かめよ）．命題 1.7.6 より（埋め込みであることを認めれば）閉埋め込みである．この埋め込みにより $\mathbb{P}^{N-1}$ の超平面 $H = V(a_1X_1 + \cdots + a_NX_N)$ と $\mathbb{P}^n$ の交わり $H \cap \mathbb{P}^n$ は $\mathbb{P}^n$ の d 次超曲面 $V(a_1m_1 + \cdots + a_Nm_N)$ になる.

例 1.9.5. $m, n \in \mathbb{N}$ **に対し，セグレ埋め込み**

$$\sigma_{m,n}\colon \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{nm-1},\ ((x_i), (y_j)) \mapsto (x_iy_j)$$

が定義される（問題：well-defined であることを確かめよ）．ここで i は $\{1, \ldots, m\}$（m 個の元からなる集合なら何でも良い）の元を，j は $\{1, \ldots, n\}$ の元を走り，斉次座標を省略表示した．これは単射で，像は閉集合である.

定義 1.9.6. 代数多様体 $X \subset \mathbb{P}^{m-1}$, $Y \subset \mathbb{P}^{n-1}$ があると，積集合

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\} \subset \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$$

を $\sigma_{m,n}(X \times Y)$ と同一視して代数多様体とみなす.

1.10　有理点

定義 1.10.1. 部分体 $k \subset K$ に対し $\mathbb{A}^n$ の k **点集合**を

$$\mathbb{A}^n(k) := k^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in k\} \subset \mathbb{A}^n$$

と定義する．k 上定義されたアフィン代数多様体 $X \subset \mathbb{A}^n$ に対し，その k **点集合を**

$$X(k) := X \cap \mathbb{A}^n(k)$$

と定義し，その元を X の k **点**という．と定義する．X の k 点集合 $X(k)$ を $X \cap \mathbb{A}^n(k)$ と定義する．

例 1.10.2. $K = \mathbb{C}$，$f = x^n + y^n - 1$ とし，$X = V(f) \subset \mathbb{A}^2$ とする．X は $\mathbb{Q}$ 上定義されている．$n \geq 3$ のとき，フェルマー・ワイルズの定理によれば，

$$X(\mathbb{Q}) = \begin{cases} \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0) & (n : \text{偶数}) \\ (0, 1) & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

となり，特に有限集合である．($n \geq 4$ のときは，有限性はファルティングスの定理からも従う.）一方 X 自身は無限集合である．

$\mathbb{A}^n$ の k 点は k 代数準同形 $k[x_1, \ldots, x_n] \to k$ に対応する．このことから，アフィン代数多様体 X の k 点は k 代数準同形 $R(X_k) \to k$ に対応する．

定義 1.10.3. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の k **点集合**を

$$\mathbb{P}^n(k) := \{(a_0 : \cdots : a_n) \mid a_i \in k\} = (k^n \setminus \{0\})/k^* \subset \mathbb{P}^n$$

と定義し，k 上定義された擬射影代数多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ の k **点集合**を

$$X(k) := X \cap \mathbb{P}^n(k)$$

と定義する．

補題 1.10.4.

1. X が k 代数多様体で $Y \subset X$ が k のとき，

$$Y(k) = X(k) \cap Y.$$

2. k 代数多様体の k 射 $f \colon Y \to X$ に対し，

$$f(Y(k)) \subset X(k).$$

3. $f \colon Y \to X$ が k 代数多様体が k 同型は全単射

$$Y(k) \to X(k)$$

を誘導する．

証明. 略. □

例 1.10.5 (2 次（円錐）曲線)**.** ここまでに出てきた，様々な概念が登場する良い題材として 2 次曲線を考える．ここの記述は Reid [1988, Ch. 1, §1] を参考にした．

$\mathbb{R}^2$ 内の 2 次（円錐）曲線とは，2 次多項式の零点集合となる，いわゆる楕円，放物線，双曲線の 3 種類の曲線のことである．円錐の切り口として現れるので，このように呼ばれる．もう少し厳密に

は，これらは非退化な 2 次曲線で，これ以外にも退化した 2 次曲線（空集合，1 点，2 重直線，交わる 2 直線，平行な 2 直線）がある．

非退化なものに限ると，このように 3 種類の二次曲線に分類される．アフィン変換（線形変換と平行移動の合成）により，楕円は楕円に移り，また任意の 2 つの楕円はアフィン変換で移り合う．放物線，双曲線についても同様である．

無限遠点を加えて実射影平面 $\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ にすると，これら 3 種類の区別はなくなる．もう少し詳しく説明すると，まず $\mathbb{R}^3$ の線形自己同型が $\mathbb{RP}^2$ の自己同型を誘導する．誘導された自己同型を射影変換という．楕円，放物線，双曲線を射影コンパクト化した曲線（射影 2 次曲線）は射影変換で全て標準形

$$\{(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

に移る．これは，基本的に 2 次形式や対称行列の標準化の話から導かれる.（楕円，放物線，双曲線の別は，考える射影 2 次曲線が無限遠直線

$$l_\infty = \{(x : y : 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{RP}^1$$

と 0 点，1 点，2 点で交わるということで区別されるが，これは斉次座標系の取り方に依存する区別である．ちなみに，交わる 2 直線と平行な 2 直線も射影コンパクト化すると同じものになる.）

上で考えた $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{RP}^2$ の 2 次曲線は，$\mathbb{C}^2$ や $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 内の代数多様体 C の実点集合 $C(\mathbb{R})$ と見なせる．$\mathbb{C}$ 上では分類が更に簡単になる．同じく 2 次形式の標準化により，$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 内の 2 次曲線は $\mathbb{C}$ 上の射影変換により次のいずれかに移る：

非退化 $V(x^2 + y^2 + z^2)$

2 直線 $V(x^2 + y^2)$

2 重直線 $V(x^2)$

空集合や 1 点などが現れないことは，例えば次元をみることで分かる．非退化 2 次曲線は座標変換により

$$V(xy - z^2)$$

と表すことも出来る．射

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\to V(xy - z^2) \subset \mathbb{P}^2 \\ (s : t) &\mapsto (s^2 : y^2 : st) \end{aligned}$$

により，非退化 2 次曲線は $\mathbb{P}^1$ と（$\mathbb{C}$ 上）同型となる．

一方 $\mathbb{R}$ 上で考えると，事情は変わってくる．$C_1 = V(x^2 + y^2 - z^2)$ と $C_2 = V(x^2 + y^2 + z^2)$ は $\mathbb{C}$ 上同型だが，$\mathbb{R}$ 上同型ではない．これは，$C_1(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, $C_2(\mathbb{R}) = \emptyset$ であることから分かる．C_1 は $\mathbb{P}^1$ と $\mathbb{R}$ 上同型だが，C_2 はそうではない．

1.11　次元

事実 1.11.1. 既約代数多様体 X に対し，次の *2* つの数は等しい：

1. 関数体 $K(X)$ の K 上の超越次数.

2. 既約閉部分集合の列 $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$ の長さ n の最大値.

定義. この等しい数を X の**次元**と呼び $\dim X$ と記す.

また $K = \mathbb{C}$ のとき，X から特異点（後に定義）を除いた部分は複素多様体とみなせるが，その次元とも一致する.（実多様体としての次元はその 2 倍になる.）

例 1.11.2. $K(\mathbb{A}^n) = K(\mathbb{P}^n)$ は n 変数の有理関数体 $K(x_1, \ldots, x_n)$，つまり $K[x_1, \ldots, x_n]$ の分数体になるので，K 上の超越次数は n である．従って $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{P}^n = n$.

次の事実は次元の計算において基本となる：

事実 1.11.3. X を n 次元既約代数多様体とする.

1. X 上の正則関数 $f \neq 0$ に対し，零点集合 $V(f) = f^{-1}(0)$ の各既約成分の次元は $n-1$（余次元は 1）である.
2. X 上の正則関数 $f_1, \ldots, f_l$ に対し，その共通零点集合 $V(f_1, \ldots, f_l)$ の各既約成分の次元は $n-l$ 以上（余次元は高々l）である.（各既約成分の次元が $n-l$ に等しいとき $V(f_1, \ldots, f_l)$ は完全交叉であるという.）

下で定義される非特異性の概念を使うと，既約代数多様体 X の次元は非特異点での接空間の次元とも等しい.

1.12　非特異性

X を既約代数多様体とし，$x \in X$ に対し，

$$\mathcal{O}_{X,x} := \{f \in K(X) \mid f \text{ は } x \text{ で関数として定義される }\}$$
$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}$$

として定義する．$\mathcal{O}_{X,x}$ は $\mathfrak{m}_x$ を唯一の極大イデアルにもつ局所環である.（局所環とは極大イデアルをただ一つもつ環である.）$\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ は K と自然に同型で，商 $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ はその上の有限次元ベクトル空間となる.

定義 1.12.1. $T_x^*X := \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ と書き，これを**余接空間**と呼ぶ．その双対空間を T_xX と書き**接空間**[5]と呼ぶ．$\dim T_xX = \dim X$ のとき，X は x で**非特異**であるという．$x \in X$ は**非特異点**であるともいう．X が全ての点で非特異であるとき X は**非特異**であるという.

非特異だと微積分などの手法が使えるため，調べやすい．しかし，高次元代数多様体の分類では，「マイルド」な特異点を持つ代数多様体も考える必要が出てくる.

具体的に多項式で定義された代数多様体の非特異性はヤコビ判定法を用いて調べることができる.

定理 1.12.2 (ヤコビ判定法)**.** $X \subset \mathbb{A}^n$ を $n-c$ 次元の既約代数多様体とし，$I = I(X) = \langle f_1, \ldots, f_l \rangle$ とする．ヤコビ行列

$$J = (\partial f_i/\partial x_j)_{1 \leq i \leq l,\, 1 \leq j \leq n}$$

は J 多項式成分の行列だが，$J|_x$ は点 $x \in X$ で評価して得られる K 成分の行列を表すものとする．このとき，$x \in X$ が非特異点であることと，$\mathrm{rank} J|_x = c$ であることは同値である.（一般に $\mathrm{rank} J|_x \leq c$ が成り立つ.）

系 1.12.3. 上の仮定の下で，$\mathfrak{j} \subset K[x]$ を J のサイズ c の小行列式で生成されるイデアルとする．X の特異点集合 X_{sing} は

$$X_{sing} = V(I + J)$$

となる．特に X_{sing} は X の閉部分集合である（この主張はアフィンでない場合に直ちに一般化される）.

[5] ザリスキ接空間と呼ぶこともある．$\dim T_xX$ を**埋め込み次元**と呼び，何次元の非特異な多様体に埋め込めるかを表す.

問題 1.12.4. $V(x^2 - y^2 z) \subset \mathbb{A}^3$ の特異点集合を求めよ．

定義 1.12.5. X を n 次元非特異射影代数多様体とする．開集合 $U \subset X$ 上の正則関数 $f_1, \ldots, f_n$ が**局所座標系**であるとは各点 $x \in U$ に対し，（極大イデアル $\mathfrak{m}_x$ に入るように定数だけずらした）関数 $f_1 - f_1(x), \ldots, f_n - f_n(x) \in \mathfrak{m}_x$ の像が $T_x^* X = \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ の基底をなすことである．

これは，$f_1, \ldots, f_n$ が定まる写像 $f \colon U \to \mathbb{A}^n$ から定まる写像 $T_x X \to T_{f(x)} \mathbb{A}^n$ が同型であることと同値である．このとき，f は**エタール**であるという．

1.13　微分形式

X を n 次元既約代数多様体とする．

定義 1.13.1. 有理関数 $f, x_1, \ldots, x_n \in K(X)$ に対し，式

$$f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

を X の（n 次の）**有理微分形式**という．

$x_1, \ldots, x_n$ が代数的に独立でないときは，この微分形式は零であるとする．
代数的に独立な $x_1, \ldots, x_n$ を固定して，

$$V_{x_1, \ldots, x_n} = \{ f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \mid f \in K(X) \}$$

に $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ を基底とする 1 次元 $K(X)$ ベクトル空間の構造が自然に入る．$K(x_1, \ldots, x_n) \subset K(y_1, \ldots, y_n) \subset K(X)$ となるとき，x_i の y_j による偏微分が定義できる．$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ と $dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ の間に

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

という関係を定めることで，$V_{x_1, \ldots, x_n}$ と $V_{y_1, \ldots, y_n}$ を同一視する．
任意の 2 つの代数的に独立な組 $x_1, \ldots, x_n$ と $y_1, \ldots, y_n$ に対し，$K(z_1, \ldots, z_n) \subset K(x_1, \ldots, x_n)$, $K(y_1, \ldots, y_n)$ となる第 3 の組が存在し，それをとおして $V_{x_1, \ldots, x_n}$ と $V_{y_1, \ldots, y_n}$ を同一視できる．
これにより，有理微分形式全体は 1 次元 $K(X)$ ベクトル空間と見なせる．

第2章　因子

この章では，特に断らなければ X は n 次元非特異既約代数多様体とする．

2.1　定義

定義 2.1.1. X の**素因子**とは $n-1$ 次元の既約閉集合 $D \subset X$ の事である．X の**因子**とは $\sum_{i=1}^{r} a_i D_i$（$a_i \in \mathbb{Z}$, D_i は X の素因子）という形の素因子の形式的線形結合である．

因子は X の素因子全体に渡る和

$$\sum_{D:\text{素因子}} a_D D, \quad a_D \in \mathbb{Z}$$

でほとんど全ての D に対し $a_D = 0$ であるものと表すことも出来る．因子全体は加群を成す．それを $\mathrm{Div}(X)$ と記す．

注意 2.1.2. ここで定義した因子はヴェイユ因子と呼ばれることもある．カルティエ因子と呼ばれる概念もある．これらの概念は非特異代数多様体上では一致する（一対一対応がある）．

2.2　線形同値

事実 2.2.1. 各素因子 D に対して

$$\{f \in K(X) \mid \mathrm{dom}(f) \cap D \neq \emptyset\}$$

は離散付値環になる．

定義 2.2.2. 付随する $K(X)$ の離散付値を

$$\mathrm{ord}_D : K(X)^* \to \mathbb{Z}$$

と書く．$\mathrm{ord}_D f = n > 0$ のとき，f は D に沿って n **位の零点を持つ**と言い，$\mathrm{ord}_D f = -n < 0$ のとき，f は D に沿って n **位の極を持つ**という．

定義 2.2.3. $f \in K(X)^*$ に対し

$$\mathrm{div}(f) := \sum_D (\mathrm{ord}_D f) \cdot D \in \mathrm{Div}(X)$$

と定義する．ある $f \in K(X)^*$ により $\mathrm{div}(f)$ と表される因子を**主因子**という．2 つの因子 D と E は $D - E$ が主因子となるとき**線形同値**であるといい，$D \sim E$ と書く．

有限個の素因子を除き $\mathrm{ord}_D f = 0$ となるので，$\mathrm{div}(f)$ は実際に因子となる．

$$\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$$

が成り立ち，主因子全体 $\mathrm{Div}_p(X)$ は $\mathrm{Div}(X)$ の部分群となる．

定義 2.2.4. 商群 $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}_p(X)$ は因子の線形同値類の集合となり，これを**因子類群**とよび，$\mathrm{Cl}(X)$ と記す．

例 2.2.5. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の素因子は既約斉次多項式 f により $V(f)$ と表される．素因子 $V(f)$ **の次数**を $\deg V(f) := \deg f$ により定義する．$\mathbb{P}^n$ の因子 $E = \sum n_D \cdot D$ の次数を $\deg E := \sum n_D \cdot \deg D$ により定義する．

射影空間 $\mathbb{P}^n$ の有理関数は次数の等しい斉次式の商 f/g として表される．$f = \prod f_i^{n_i}$, $g = \prod g_j^{m_j}$ と既約斉次多項式に因数分解されるとき，

$$\mathrm{div}(f) = \sum_i n_i V(f_i) - \sum_j m_j V(g_j)$$

となる．これから，

$$\deg \mathrm{div}(f) = 0$$

が分かる．従って，$\mathbb{P}^n$ の二つの因子 E, E' が線形同値でれば，$\deg E = \deg E'$ が成り立つ．逆も簡単に示せる．

群準同形

$$\deg : \mathrm{Div}(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{Z}$$

は全射であり，核は主因子全体 $\mathrm{Div}_p(X)$ である．準同形定理より $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}$ となる．

同時一次式 f で定義される閉集合 $V(f) \subset \mathbb{P}^n$ を**超平面**という．$\mathrm{Cl}(X)$ は超平面の線形同値類 $[H]$ で生成される．この同値類を**超平面類**と呼び，記号の乱用でこれも H としばしば記す．

2.3　因子の引き戻し

定義 2.3.1. 既約代数多様体 X の因子 $D = \sum_E a_E E$ に対し，D の**台**を

$$\mathrm{Supp}(D) := \bigcup_{E : a_E \neq 0} E$$

と定義する．

因子の台は X の閉集合で，全てに既約成分が余次元 1 のものとなる．

既約代数多様体の射 $f\colon Y \to X$ と X の因子 D に対し，D の f による引き戻し f^*D を Y の因子として定義したい．また，$\mathrm{Supp}(f^*D) \subset f^{-1}(\mathrm{Supp}(D))$ であって欲しい．しかし，これは常に出来るわけではないが，次の 2 つの事実がなりたつ（参考：Fulton [1998]）：

事実 2.3.2. $f\colon Y \hookrightarrow X$ が開埋め込みのとき，因子群の準同形

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathrm{Div}(X) &\to \mathrm{Div}(Y) \\ \sum a_D D &\mapsto \sum a_D (D \cap Y) \end{aligned}$$

が存在し，因子類群の写像

$$f^*\colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(Y)$$

を誘導する．

事実 2.3.3. 既約代数多様体の射 $f\colon Y \to X$ に対し，X が非特異のとき，引き戻し写像

$$f^*\colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(Y)$$

が存在する．$\mathrm{Div}^f(X)$ を X の因子 D で $f(Y) \not\subseteq \mathrm{Supp}(D)$ を満たすもののなす $\mathrm{Div}(X)$ の部分群とする．このとき，写像

$$f^* \colon \mathrm{Div}^f(X) \to \mathrm{Div}(Y)$$

が存在し，

$$\mathrm{Supp}(f^*D) = f^{-1}(\mathrm{Supp}(D))$$

を満たす．さらに図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Div}^f(X) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \mathrm{Div}(Y) \arrow[d] \\ \mathrm{Cl}(X) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Cl}(Y) \end{tikzcd}$$

を可換にする．垂直方向の矢印は全射である（つまり，任意の X の因子は $\mathrm{Div}^f(X)$ に含まれる因子と線形同値である）．

注意 2.3.4. 最後の事実で X の非特異性は，カルティエ因子とヴェイユ因子が一致し，従って $\mathrm{Cl}(X)$ がピカール群と一致する事に用いた．

記法 2.3.5. $f \colon Y \to X$ が埋め込みのとき，因子 D や因子類 α の引き戻しを $D|_Y$ や $\alpha|_Y$ などと書き，Y への**制限**という．

2.4　カルティエ因子

定義 2.4.1. 局所的に主因子である因子を**カルティエ因子**という．つまり，X 上の因子 D が**カルティエ因子**であるとは，任意の点 $x \in X$ に近傍 U と有理関数 $f \in K(X)^* = K(U)^*$ が存在し，$D|_U = \mathrm{div}(f)$ が成り立つことである．カルティエ因子は $\mathrm{Div}(X)$ の部分群を成す．これを $\mathrm{Div}_c(X)$ と記す．

補題 2.4.2. D, D' が線形同値で D がカルティエ因子なら，D' もカルティエ因子である．

証明. $D' = D + \mathrm{div}(g)$ で D がある点の近傍で $\mathrm{div}(f)$ と表されるなら，D' は $\mathrm{div}(fg)$ と表されるのでカルティエである． □

定義 2.4.3. カルティエ因子の線形同値類が成す $\mathrm{Cl}(X)$ の部分群を $\mathrm{Cl}_c(X)$ と記す．

定理 2.4.4 (Hartshorne [1977, p. 141, Prop. 6.11])**.** 全ての点 $x \in X$ に対し，局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ が一意分解環のとき，全ての因子はカルティエ因子である．特に X が非特異なら，全ての因子はカルティエ因子である．

証明. 工事中 □

事実 2.4.5. 任意の既約代数多様体の射 $f : Y \to X$ はカルティエ因子類群の写像

$$f^* \colon \mathrm{Cl}_c(X) \to \mathrm{Cl}_c(X)$$

を誘導する．

2.5　標準因子

因子の中でも特に重要なのが**標準因子**で，代数多様体の分類理論を含む様々な場面で登場する．

X を**非特異**既約代数多様体とする．有理微分形式 $\omega \neq 0$ を一つ固定すると，標準因子は以下のように定義される．$X = \bigcup_i U_i$ を開被覆で，各 U_i 上に局所座標系 $x_{i1}, \ldots, x_{in}$ が存在するようなものとする．局所座標系は代数的に独立なので，有理関数 $f_i \in K(X)^*$ が一意的に存在し

$$\omega = f_i dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{in}$$

となる．U_i 上の因子 $D_i := \mathrm{div}(f|_{U_i})$ を考える．

補題 2.5.1. 各 i, j について，

$$D_i|_{U_i \cap U_j} = D_j|_{U_i \cap U_j}$$

が成り立つ．

証明. $U_i \cap U_j$ 上には二つの局所座標系，$x_{i1}, \ldots, x_{in}$ と $x_{j1}, \ldots, x_{jn}$ が存在する．

$$dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{in} = g_{ij} dx_{j1} \wedge \cdots \wedge dx_{jn}$$

と書くとき，$g_{ij}|_{U_i \cap U_j}$ は可逆な（つまり零点を持たない）正則関数である（問題：これを示せ）．従って，$f_j = g_{ij} f_i$ が成り立ち，

$$\begin{aligned} D_j|_{U_i \cap U_j} &= \mathrm{div}(f_j|_{U_i \cap U_j}) \\ &= \mathrm{div}(f_i|_{U_i \cap U_j}) + \mathrm{div}(g_{ij}|_{U_i \cap U_j}) \\ &= \mathrm{div}(f_i|_{U_i \cap U_j}) \\ &= D_i|_{U_i \cap U_j} \end{aligned}$$

となる．□

D_i を貼り合わせることで標準因子が構成される：

定義 2.5.2. 非特異既約代数多様体 X の因子 D で $D|_{U_i} = D_i$ となるものがただ一つ存在する．この因子を X の**標準因子**と呼び，$\mathrm{div}(\omega)$ や K_X などと記す．

別の有理部分形式 $0 \neq \omega' = f\omega$ を考えると，

$$\mathrm{div}(\omega') = \mathrm{div}(\omega) + \mathrm{div}(f)$$

になる．従って，標準因子の線形同値類は，有理微分形式の選び方に依らず，X から一意に定まる．

定義 2.5.3. この因子類を**標準因子類**と呼び，これも K_X と記す．

注意 2.5.4. 一般的に，標準因子と言うとき，それが因子と因子類のどちらを表すかは文脈による．

例 2.5.5. 射影直線 $\mathbb{P}^1$ の関数体は 1 変数有理関数体 $K(x)$ となる．$\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{A}^1$ に同型な開集合 U_0 と U_1 で覆い，U_0 は x_0 を U_1 は $x_1 = 1/x_0$ を局所座標系に持つようにできる．有理微分形式

$$\omega = dx_1 = d(1/x_0) = -\frac{1}{x_0^2} dx_0$$

を考える．上の記法に従うと，有理関数 f_1 は定数関数 1 であり $\mathrm{div}(\omega)|_{U_1} = 0$ となる．$f_0 = -1/x_0^2$ であり

$$\mathrm{div}(\omega)|_{U_0} = -2 \cdot (U_0\text{の原点})$$

となる．従って $K_{\mathbb{P}^1} = -2H$ となる．H は超平面類である．

問題 2.5.6. 一般に

$$K_{\mathbb{P}^n} \sim -(n+1)H$$

となることを示せ．

2.6　線形系

この部分章では既約代数多様体 X を固定して，話を進める．

定義 2.6.1. 因子 $E = \sum_D a_D \cdot D$ は全ての D に対し $a_D \geq 0$ のとき $E \geq 0$ と書き，E は**有効**であるという．$E - E' \geq 0$ のとき $E \geq E'$ と書く．

定義 2.6.2. 因子 D に対し

$$\Gamma(D) := \{f \in K(D)^* \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

とおく．

これは $K(D)$ の K 線形部分空間となる．$D \geq D'$ のとき $\Gamma(D) \supset \Gamma(D')$ が成り立つ．

定理 2.6.3. X が射影代数多様体のとき $\Gamma(D)$ は有限次元 K ベクトル空間である．

証明. ベクトル空間であることは簡単に分かる．有限次元であることの証明の概略を述べる．$X \subset \mathbb{P}^n$ とする．D が有効因子の場合のみ考えれば良い．このとき，適当な有効因子 E があり $D + E$ は超曲面 $Y \subset \mathbb{P}^n$ の X への制限と一致する．ベロネーゼ埋め込みで X をより大きな射影空間に埋め込むと超平面 $V(x_0)$ の制限となるとして良い．この場合，全射

$$R(D(x_0)) = K\left[\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right] \twoheadrightarrow R(X)$$

がある．$\Gamma(D)$ は $R(X)$ の部分空間となる．$\Gamma(D)$ の定義より，ある $l \in \mathbb{N}$ が存在して，$\Gamma(D)$ は $K[x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0]_{\leq l}$ の像に含まれる．よって有限次元. □

定義 2.6.4. $\Gamma(D)$ の次元を $\gamma(D)$ と記す.

注意 2.6.5. ☻ 層の言葉を使うと $\Gamma(D)$ は 0 次コホモロジー群

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

と同一視できる．上の定理は，射影代数多様体 X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し，$H^i(X, \mathcal{F})$ が有限次元 K ベクトル空間になるという結果の特別な場合である．

射影空間 $(\Gamma(D) \setminus \{0\})/K^* = \mathbb{P}^{\gamma(D)-1}$ は有理関数 f に因子 $\mathrm{div}(f) + D$ を対応させることで，集合

$$|D| := \{D \text{ と線形同値な有効因子 }\}$$

と同一視できる．

定義 2.6.6. この集合を D に付随する**完備線形系**と呼ぶ．**線形系**とは完備線形系の線形部分空間（$\Gamma(D)$ の線形部分空間 V から得られる $\overline{V} = (V \setminus \{0\})/K^*$ という形の部分集合）のことである．

このように一般の線形系も互いに線形同値な有効因子の集合に射影空間の構造が入ったものとなる．

定義 2.6.7. 線形系 L に対し

$$\mathrm{Bs}(L) := \bigcap_{D \in L} \mathrm{Supp}(D)$$

を L の**基底点集合**という．

$\mathrm{Bs}(L)$ は閉集合である．

定義 2.6.8. カルティエ因子 D と線形系 $L \subset |D|$ に対し写像

$$\begin{aligned}\phi_L \colon X \setminus \mathrm{Bs}(L) &\to L^\vee = \mathbb{P}^m \\ x &\mapsto \{E \in L \mid x \in \mathrm{Supp}(E)\}\end{aligned}$$

が定まる．

この写像を座標を用いて説明すると以下のようになる．$\tilde{L} \subset \Gamma(D)$ を対応する線形部分空間とし，基底 $f_0, \ldots, f_m \in \tilde{L}$ を取る．各点 $x \in X$ の近傍 U 上ではある有理関数 g により $D|_U = \mathrm{div}(g)$ となる．$\Gamma(D)$ の定義から $\mathrm{div}(f_i g)|_U \geq 0$ となる．つまり $f_i g$ は U 上の正則関数となる．さらに x が L の基底点でなければ，ある i について $f_i g(x) \neq 0$ となる．従って，

$$\phi_L(x) = (f_0 g(x) : \cdots : f_m g(x))$$

と定義する．

もちろん，この定義は g の選び方に依存しない．

定理 2.6.9. *Hartshorne [1977, p. 150]*X を非特異射影代数多様体とし，$L \subset |D|$ を基底点の無い線形系とすると，

$$\phi_L^*(H) \sim D$$

となる．逆に任意の射影空間への射 $f \colon X \to \mathbb{P}^m$ は m 次元の基底点のない線形系 $L \subset |f^*H|$ に付随する射 $f = \phi_L$ と一致する．

2.7　豊富因子

定義 2.7.1. 射影代数多様体 X のカルティエ因子 D が**非常に豊富**であるとは，完備線形系 $|D|$ が基底点を持たず，付随する射 $\phi_{|D|} \colon X \to \mathbb{P}^{\gamma(D)-1}$ が埋め込みとなることである．カルティエ因子 D が豊富であるとは，ある整数 $n > 0$ に対し，nD が非常に豊富となることである．

補題 2.7.2. 射影代数多様体 X のカルティエ因子 D について，D が非常に豊富であることの必要十分条件は，ある埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ が存在し $H|_X \sim D$ となることである．

証明. 必要条件である事は，明らか．十分条件であることを示す．一般の超平面 $H_0, \ldots, H_m \subset \mathbb{P}^m$ を取ると，$H_i|_X$ は $m+1$ 次元の部分区間 $\tilde{L} \subset \Gamma(H|_X)$ を与え，m 次元の線形系 $L \subset |H|_X|$ を定める．このとき，L は基底点をもたず，射 $\phi_L \colon X \to \mathbb{P}^m$ はもとの埋め込みに一致する．

完備線形系 $|H|_X|$ に付随する射 $\phi' \colon X \to \mathbb{P}^l$ を考えると，$\mathbb{P}^m$ は $\mathbb{P}^l$ の線形部分空間となり，ϕ' は ϕ と埋め込み $\mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^l$ の合成になる．従って，ϕ' も埋め込みで有り，$H|_X \sim D$ は非常に豊富である． □

命題. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の因子類 α について，次は同値である：

1. $\deg \alpha > 0$.
2. α は豊富.
3. α は非常に豊富.

証明. $1 \Rightarrow 3$. $\deg \alpha = d > 0$ の場合，d 重ベロねー次埋め込み $\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ に関して $\alpha = h|_{\mathbb{P}^n}$ である．h は $\mathbb{P}^m$ の超平面クラス．従って，非常に豊富である．

$3 \Rightarrow 1$. 明らか.

$3 \Rightarrow 2$. 自明.

$2 \Rightarrow 1$. ある $l > 0$ が存在し $l\alpha$ は非常に豊富である．従って $\deg \alpha = (\deg \alpha)/l > 0$. □

2.8　随伴公式

定理 2.8.1. $Y \subset X$ を既約非特異射影代数多様体とその既約で非特異な閉部分多様体とする．このとき

$$(K_X + Y)|_Y \sim K_Y$$

となる．

証明. ☻ 標準因子は可逆層 $\Omega_X^n = \bigwedge^n \Omega_X$ の有理切断に付随する因子である．$I \subset \mathcal{O}_X$ を $Y \subset X$ の定義イデアル層とすると，

$$0 \to I/I^2 \to \Omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \Omega_Y \to 0$$

という局所自由 $\mathcal{O}_Y$ 加群の短完全列がある．I/I^2 は余接層と呼ばれ，Y の X 中での余次元が 1 なので，I/I^2 の階数は 1 つまり，可逆層である．$I/I^2 \cong \mathcal{O}_X(-Y) \otimes \mathcal{O}_Y$ が成り立つ．これより

$$\left(\bigwedge^n \Omega_X \otimes \mathcal{O}_X(Y)\right) \otimes \mathcal{O}_Y \cong \bigwedge^{n-1} \Omega_Y$$

を得る．対応する因子を考え，定理を得る． □

例 2.8.2. $X = V(f) \subset \mathbb{P}^n$ を非特異超曲面とし次数が $\deg X = \deg f = d$ のものとする．$K_{\mathbb{P}^n} \sim -(n+1)H$ と随伴公式から

$$K_X = (d - n - 1)H$$

となる．従って，$d < n+1$ なら $-K_X$ は非常に豊富，$d = n+1$ なら $K_X \sim 0$，$d > n+1$ なら K_X は非常に豊富となる．

第3章　交叉理論

この節では X を n 次元既約非特異射影代数を 1 つ固定して話を進める．

3.1　サイクルとチャウ群

定義 3.1.1. $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，X 上の i **サイクル**とは，有限個の次元 i の既約閉集合 $Y_j \subset X$ の線形和

$$\sum_j a_j Y_j \quad (a_j \in \mathbb{Z})$$

のことである．

$i = n-1$ のとき，これは因子に他ならない．因子の場合と同様に，i サイクルを次元 i の既約閉集合 $Y \subset X$ 全体にわたる和として

$$\sum_Y a_Y Y$$

と表すこともある．このばあい，ほとんど全ての（有限個を除いて）a_Y は 0 である．

定義 3.1.2. i サイクル全体は自然にアーベル群をなす．それを，$Z_i(X)$ と書く．$i+1$ 次元の既約閉集合 $W \subset X$ と W 上の有理関数 $f \in K(W)^*$ に対し，W 上の因子 $\mathrm{div}(f)$ が定まり [1]，これを X 上の i サイクルとみなす．この形のサイクルで生成される $Z_i(X)$ の部分群を $R_i(X)$ と書き，付随する商群を

$$A_i(X) := Z_i(X)/R_i(X)$$

と記す．

$$A^{d-i}(X) := A_i(X)$$

とも書く．（上付き添え字は余次元を表す．）

3.2　交叉積

事実 3.2.1. 交叉積という双線形形式

$$A^i(X) \times A^j(X) \to A^{i+j}(X)$$
$$(Y, Y') \mapsto Y \cdot Y'$$

が存在し，これにより $A^*(X) := \bigoplus_{i=0}^d A^i(X)$ は可換環になる．これをチャウ環と呼ぶ．

Y と Y' がそれぞれ余次元 i と余次元 j の既約閉部分集合とし，$Y \cap Y'$ の書く既約成分の余次元が $i+j$ のとき，

$$Y \cdot Y' = \sum_{W \subset Y \cap Y'} i(W; Y, Y')W$$

という交叉重複度 $i(W; Y, Y') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を係数とする，既約成分 W に渡る和（の有理同値類）として書ける．

[1] W は特異かもしれないので，$\mathrm{div}(f)$ の定義をこの場合に一般化する必要がある．

定義 3.2.2. 0 サイクルの**次数**を

$$\begin{aligned} \deg\colon A_0(X) = A^d(X) &\to \mathbb{Z} \\ \left[\sum_{x\in X} a_x \cdot x\right] &\mapsto \sum_{x\in X} a_x \end{aligned}$$

により定義する．i サイクル $Z \in A_i(X) = A^{d-i}(X)$ と $d-i$ サイクル $Z' \in A_{d-i}(X) = A^i(X)$ の**交点数**を

$$\sharp Z \cdot Z' := \deg(Z \cdot Z') \in \mathbb{Z}$$

により定義する．しばしば，交点数も交叉積と同じ記号 $Z \cdot Z'$ で表し，記号がどちらの意味で使われているかは文脈から判断する．

定義 3.2.3. i サイクル Z が任意の $d-i$ サイクル Z' に対し，$\sharp Z \cdot Z' = 0$ となるとき，Z は**数値的に自明**であるという．$A_i(X) = A^{d-i}(X)$ を数値的に自明なものの成す部分群で割った商群を

$$A_i(X)_{num} = A^{d-i}(X)_{num}$$

と書く．

2 つのサイクルの差が数値的に自明なとき，それらは数値的に同値であるという．$A_i(X)_{num}$ は i サイクルの数値的同値類の成す群である．

事実 3.2.4. 構成から積

$$\begin{aligned} A_i(X)_{num} \times A^i(X)_{num} &\to \mathbb{Z} \\ (Z, Z') &\mapsto Z \cdot Z' \end{aligned}$$

が定まり（これも交叉積と呼ぶ），非退化双線形形式になる．$A_i(X)_{num}$ は有限生成自由アーベル群，つまり $\mathbb{Z}^r$ と同型である．階数 r は常に正である．（これは，豊富因子 D に対し $D^i \in A^i(X)$ は常に数値的に非自明であることから従う．）

定義 3.2.5. **偏極多様体**とは射影代数多様体 X とその上の豊富因子 H の組 (X, H) のことを意味する．

非常に豊富な因子は X の射影空間への埋め込みを定めることを思い出すと，偏極多様体とは「射影空間への埋め込みを 1 つ固定する」ことの一般化である．

定義 3.2.6. 非特異偏極多様体 (X, H) に対し，X 上のサイクルの**次数**を

$$\begin{aligned} \deg\colon A_i(X) &\to \mathbb{Z} \\ Y &\mapsto \sharp Y \cdot H^i \end{aligned}$$

により定める．

0 サイクル $Y = \sum a_x \cdot x$ の次数は H の取り方によらずに

$$\deg Y = \sum a_x$$

となること

3.3　曲線と因子の錐

定義 3.3.1. $N_1(X) := A_1(X)_{num} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，$N^1(X) := A^1(X)_{num} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおく．正の整数

$$\dim N_1$$

これらは有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間で，$A_1(X)_{num}$ や $A^1(X)_{num}$ を格子として含む．また，これらを $\mathbb{R}$ 係数の 1 サイクルや因子の数値的同値類の成す群とみなすこともできる．交叉積は非退化双線形形式

$$N_1(X) \times N^1(X) \to \mathbb{R}$$

を誘導する．従って $N_1(X)$ と $N^1(X)$ は互いの双対空間とみなせる．

定義 3.3.2. 正の整数

$$\rho(X) := \dim N_1(X) = \dim N^1(X) = \operatorname{rank} A_1(X)_{num} = \operatorname{rank} A^1(X)_{num}$$

を X の**ピカール数**という．

定義 3.3.3. X 上の**曲線の錐** $NE(X)$ を有効 1 サイクル（有効因子と同様に定義する）の数値的同値類で生成される凸錐として定義する：

$$\mathrm{NE}(X) := \sum_{C \subset X} \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$$

ここで $C \subset X$ は 1 次元既約閉集合全体を走る．その閉包を $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ を記し，**曲線の閉錐**と呼ぶ．

定義 3.3.4. X の有効因子の同値類が生成する $N^1(X)$ 内の凸錐を $\mathrm{Eff}(X)$ と書き，**有効（因子）錐**と呼ぶ．その閉包を $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ と書き，**擬有効錐**と呼ぶ．豊富因子で生成される凸錐を $\mathrm{Amp}(X)$ と書き，**豊富錐**と呼ぶ．その閉包 $\overline{\mathrm{Amp}}(X)$ を**ネフ（*nef = numerically effective*）錐**と呼ぶ．$\mathbb{R}$ 因子 D がネフとは任意の有効 1 サイクル C に対し，$\sharp D \cdot C \geq 0$ となることである．$\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ の内部を $\mathrm{Big}(X)$ と記し，巨大錐と呼ぶ．

次の包含関係がある：

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{Amp}}(X) \arrow[rr, hook] & & \overline{\mathrm{Eff}}(X) \\
\mathrm{Amp}(X) \arrow[u, hook, "\circ"', "-"] \arrow[r, hook] & \mathrm{Big}(X) \arrow[r, hook] \arrow[ur, hook, "\circ", "-"'] & \mathrm{Eff}(X) \arrow[u, hook, "-"']
\end{tikzcd}$$

また記号 $-$ の付いた矢印は，始域の閉包が終域になり，$\circ$ の付いた矢印は，始域が終域の内部になっている．

ネフ錐はネフ因子の成す錐である，ことが次の命題から従う．

命題 3.3.5 (クライマンの豊富性の数値的判定法)**.** 因子 D が豊富である事の必要十分条件は，任意の有効 *1* サイクル C に対し $\sharp D \cdot C > 0$ となることである．従って，$\overline{\mathrm{NE}}(X)$ と $\overline{\mathrm{Amp}}(X)$ は互いの双対錐である．

また，巨大因子の特徴付けから，次の事も分かる．

補題 3.3.6. 因子 D が巨大である事と，数値的同値類 $[D]$ が $\mathrm{Big}(X)$ に含まれることは同値である．

3.4　リーマン・ロッホ型の定理 ☻

コホモロジー群の次元を計算することは代数幾何学的問題を解く上で基本的に重要なことである．たとえば，$h^0 - 1$ は線形系の次元を与える．個別の h^p たちはきわめて複雑な振る舞いをして制御は困難だが，不思議なことにそれらの交代和をとると，特性類とよばれるコホモロジー群を使った簡単な式で表せてしまうのである．川又 [1997, p. 106]

定義 3.4.1. n 次元代数多様体 X の上の局所自由層 $\mathcal{F}$ に対し，i **次チャーン類** $c_i(\mathcal{F}) \in A^i(X)$（$i = 0, 1, \ldots, n$）と**全チャーン類**

$$c(\mathcal{F}) := \sum_{i=0}^{n} c_i(\mathcal{F}) \in A^*(X)$$

が次の性質を満たすように一意的に定義できる：

1. $c_0(\mathcal{F}) = 1$;
2. 平坦射 $f\colon Y \to X$ に対し，
$$f^* c(\mathcal{F}) = c(f^*\mathcal{F})$$
（ただし，X が非特異なら平坦でない射でも成り立つ）;
3. 局所自由層の短完全列
$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$
に対し
$$c(\mathcal{F}) = c(\mathcal{F}')c(\mathcal{F}'')$$
が成り立つ;
4. 因子 D に付随する可逆層 $\mathcal{O}(D)$ に対し，
$$c_1(\mathcal{O}(D)) = [D] \in A^1(X);$$
5. $\mathcal{F}$ の階数が r とすると，
$$c_i(\mathcal{F}) = 0 \quad (i > r);$$
6. $c_1(\mathcal{F}) = c_1(\det \mathcal{F})$,

注意 3.4.2 (Fulton [1998, pp. 244–245]). $\mathcal{F}$ の階数を r とする．最高次チャーン類 $c_r(\mathcal{F})$ は次のような幾何学的意味を持つ．X がコーエン・マコーレー，特に非特異ならば，切断 $0 \neq s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ に対し，その零点集合 $Z(s)$ には自然なサイクルの構造が入る．このとき，

$$c_r(\mathcal{F}) = [Z(s)] \in A^r(X)$$

が成り立つ．

定義 3.4.3. 代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 $\mathcal{F}$ に対し，**チャーン標数**と**トッド標数**

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}),\, \mathrm{td}(\mathcal{F}) \in A^*(X)_{\mathbb{Q}} := A^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

が次のような定まるチャーン類 $c_i = c_i(\mathcal{F})$ の多項式として与えられる：これは，チャーン類を形式的に

$$c(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{r} (1 + a_j)$$

と表したとき,

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) := \sum_{j=1}^{r} e^{a_i},$$
$$\mathrm{td}(\mathcal{F}) := \prod_{j=1}^{r} \frac{a_j}{1-e^{-a_j}}$$

により定まる.

この定義の意味をもう少し説明する．各チャーン類は

$$c_0 = 1,\ c_1 = \sum_{j=1}^{r} a_j,\ c_2 = \sum_{i<j} a_i a_j,\ \cdots$$

と a_j の基本対称式になる．一方,

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

を用いて,

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) = 1 + \sum_j a_j + \sum_j \frac{1}{2} a_j^2 + \cdots$$

の各次数の斉次部分は a_j の対称式なので，基本対称式，つまりチャーン類の多項式として表される．トッド標数も

$$\frac{x}{1-e^x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4$$

を用いて同様に計算する．3 次以下の項を具体的に書くと,

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \cdots,$$
$$\mathrm{td}(\mathcal{F}) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 + \cdots$$

となる.

定理 3.4.4 (ヒルツェブルフ・リーマン・ロッホの定理)**.** n 次元非特異射影代数多様体 X 上の局所自由層 $\mathcal{F}$ に対し,

$$\chi(\mathcal{F}) := \sum_i (-1)^i h^i(\mathcal{F}) = \deg(\mathrm{ch}(\mathcal{F}) \cdot \mathrm{td}(T_X))_n$$

が成り立つ．ここで，$(-)_n$ は n 次部分，つまり $A^n(X) = A_0(X)$ の成分を表す.

注意 3.4.5 (グロタンディーク・リーマン・ロッホの定理)．より一般に，非特異代数多様体の固有射 $f\colon Y \to X$ に対し,

$$\mathrm{ch}(f_*\alpha) \cdot \mathrm{td}(T_X) = f_*(\mathrm{ch}(\alpha) \cdot \mathrm{td}(T_Y)) \quad (\alpha \in K(Y))$$

が成り立つ．X が 1 点の場合がヒルツェブルフ・リーマン・ロッホの定理である.

系 3.4.6 (曲線のリーマン・ロッホの定理)**.** C を *1* 次元の非特異射影代数多様体とする．g をその種数とする．局所自由層可逆層 $\mathcal{F}$ に対し,

$$\chi(\mathcal{F}) = \deg(\det \mathcal{F}) + r(1-g)$$

が成り立つ．特に可逆層 $\mathcal{L}$ に対し,

$$\chi(\mathcal{L}) = \deg \mathcal{L} + 1 - g$$

が成り立つ.

証明. C が 1 次元なので,

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) = r + c_1(\mathcal{F}),\ \mathrm{td}(T_X) = 1 + \frac{1}{2}c_1(-K_C) = 1 + (1-g)[1pt]$$

となる．従って,

$$\chi(\mathcal{F}) = \deg\left(r(1-g)[1pt] + c_1(\mathcal{F})\right) = \deg c_1(\mathcal{F}) + r(1-g).$$

$\deg c_1(\mathcal{F}) = \deg(\det \mathcal{F})$ より系が従う. □

系 3.4.7 (曲面のリーマン・ロッホの定理)**.** *2 次元非特異射影代数多様体 X とその上の因子 D に対し*

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \frac{1}{2}(D^2 - D\cdot K_X) + \chi(\mathcal{O}_X)$$

が成り立つ.

証明. この状況では

$$\mathrm{ch}(\mathcal{O}(D)) = 1 + [D] + \frac{1}{2}[D]^2,\ \mathrm{td}(T_X) = 1 - \frac{1}{2}[K_X] + \frac{1}{12}([K_X]^2 + c_2(T_X))$$

が成り立つ．従って,

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \frac{1}{2}[D]^2 - \frac{1}{2}D\cdot K_X + \frac{1}{12}(K_X^2 + \deg c_2(T_X)).$$

特に $D = 0$ のとき,

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(K_X^2 + \deg c_2(T_X)).$$

最後の 2 つの式から系が従う. □

第4章　代数曲線

この章では**代数曲線**とは代数閉体 K 上の 1 次元の既約非特異射影代数多様体とする．

4.1　曲線上の因子と種数

代数曲線 C の素因子は点に他ならず，因子は

$$D = \sum_{p \in C} a_p \cdot p$$

という形に書ける．

定義 4.1.1. D の**次数**を

$$\deg D := \sum a_p$$

と定義する．

補題 4.1.2. 主因子の次数は零．

証明. $X \subset \mathbb{P}^n$ とし，有理関数 $f \in K(X)$ を考える．$\mathbb{P}^n$ 上の有理関数 $\tilde{f} \in K(\mathbb{P}^n)$ が存在し $\tilde{f}|_X = f$ となり，$\mathrm{div}(\tilde{f})|_Y = \mathrm{div}(f)$ となる．ここで，$\deg(\mathrm{div}(\tilde{f})) = 0$ なので，交叉理論より $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ となる． □

この事実より次数は $\mathrm{Pic}(C)$ の元に対しても定義される．有効因子の次数は明らかに非負なので，$\Gamma(D)$ の定義より次の命題を得る．

命題 4.1.3. 次数が負の因子 D に対しては $\Gamma(D) = 0$ となる．

C 上の非常に豊富な因子の次数は明らかに正である．従って，豊富な因子の次数も正である．実は逆も正しい．

定理 4.1.4 (Hartshorne [1977, p. 308])**.** 代数曲線の因子 D に対し,「$\deg D > 0$」と「D は豊富」は同値.

定義 4.1.5. 代数曲線 C の**種数**を

$$g = g_C := \gamma(K_C)$$

と定義する．

種数は非負整数であり，各非負整数に対してその整数を次数に持つ代数曲線が存在する．

4.2　リーマン・ロッホの定理

定理 4.2.1 (リーマン・ロッホの定理 Hartshorne [1977, p. 295])**.** 次の等式が成り立つ：

$$\gamma(D) - \gamma(K_C - D) = \deg(D) + 1 - g$$

証明. ☻ 因子に対する γ を用いて，系 3.4.6 の最後の主張を書き直したものになっている. □

系 4.2.2. K_C の次数は $2g-2$ である.

証明. リーマン・ロッホの定理を $D = K_C$ に適用し，

$$\deg(K_C) = \gamma(K_C) - \gamma(0) - 1 + g$$

を得る．$\gamma(0) = 1$，$\gamma(K_C) = g$ より系が従う. □

系 4.2.3.

1. $g = 0$ であることの必要十分条件は $-K_C$ が豊富であることである.
2. $g = 1$ であることの必要十分条件は $K_C \sim 0$ となることである.
3. $g \geq 2$ であることの必要純分条件はのとき K_C は豊富であることである.

証明. $\deg K_C = 2g-2$ なので，$g = 0$ と $\deg K_C > 0$ が同値である．曲線上の因子について，次数が正である事と豊富である事は同値だったので，主張 1 が従う．主張 3 も同様である．$K_C \sim 0$ なら $g = 1$ は明らか．$g = 1$ とすると，$\deg K_C = 0$ である．次数が 0 で $\gamma(\alpha) = 1$ となる因子類 α は自明なものしかないので，主張 2 が従う. □

4.3　リーマン面

$K = \mathbb{C}$ のとき，代数曲面 C は自然に 1 次元のコンパクト複素多様体，つまりコンパクトリーマン面になる．種数 g はリーマン面の「穴」の数に等しい．たとえば，種数 0 のリーマン面は S^2 に同相で，種数 1 のリーマン面はトーラス $S^1 \times S^1$（つまりドーナツ面）に同相である.

幾何学的性質は，種数 g が 0 か 1 か 2 以上かによって大きく異なる．まずコンパクトリーマン面の普遍被覆は $g = 0$ のとき S^2，$g = 1$ のとき $\mathbb{C}$，$g \geq 2$ のとき上半平面 $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ になる.

4.4　$g = 0$

命題 4.4.1. 任意の種数零の代数曲線 C は（K 上）射影直線 $\mathbb{P}^1$ に同型である.

証明. C の任意の 2 点 P, Q に対し，リーマン・ロッホの定理より

$$\gamma(P - Q) = 1.$$

ちなみに，$K_C - (P - Q)$ は負の次数を持つので $\gamma = 0$ である．これより，$P - Q$ は次数例の唯一の有効因子，つまり零因子と線形同値である.

$$P - Q \sim 0$$

$P - Q = \mathrm{div}(f)$ となる C 上の有理関数 f が存在し，射 $f\colon C \to \mathbb{P}^1$ で $f^*(0) = P$, $f^*(\infty) = Q$ となるものが存在する．このとき射 f の次数は 1 であり，f は同形射である. □

注意 4.4.2. C が部分体 $k \subset K$ 上定義されている（定義式の係数が全て k に含まれる）とき，C が k 点を（少なくとも一つ）持てば $\mathbb{P}^1$ に k 上同型（局所的に k 係数多項式で定義される同型射がある）であり，従って k 点は無限にある．k 点が存在しない場合も実際にある．

2 次曲線 $C = V(x^2 + y^2 + z^2) \subset \mathbb{P}^2$ は種数零である．これは $\mathbb{Q}$ 点を持たない．従って，この C は $\mathbb{Q}$ 上では $\mathbb{P}^1$ と同型ではない．しかし，$\mathbb{C}$ 上では同型である．

4.5　ブラウアー・セヴェリ多様体（参考：Artin [1982]）☻

一般に体 k 上定義された代数多様体で $K = \bar{k}$ 上で $\mathbb{P}^n$ と同形になるものを**ブラウアー・セヴェリ多様体**と呼ぶ．これは $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ とするとき，コホモロジー群

$$H^1(G, PGL_n)$$

により分類される．短完全列

$$1 \to \mathbb{G}_m \to GL_n \to PGL_n \to 1$$

に付随する接続準同形により，これは k のブラウアー群 $Br(k) = H^2(G, K^*)$ の部分群と見なせる．（同じコホモロジー群は階数 n^2 の中心単純 k 代数の同地類も分類する.）ブラウアー・セヴェリ多様体 P とスキームの G 被覆 $P' := P_K \to P$ とエタール層 $\mathbb{G}_m$ に対し，ホッホシルト・セールのスペクトル系列より，

$$0 \to H^1(G, H^1(P'_{et}, \mathbb{G}_m)) \to H^1(P_{et}, \mathbb{G}_m) \to H^0(G, H^1(P'_{et}, \mathbb{G}_m)) \to H^2(G, H^0(P'_{et}, \mathbb{G}_m))$$

という完全列が得られる．最初の項はヒルベルトの定理 90 より消える．次の項は P の k 上のピカール群 $\mathrm{Pic}(P_k)$ である．その次は

$$H^1(P'_{et}, \mathbb{G}_m)^G = H^1(P'_{et}, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}.$$

そして，最後の項は $Br(k)$ である．結局

$$0 \to \mathrm{Pic}(P_k) \to \mathbb{Z} \to Br(k)$$

という完全列を得る．$1 \in \mathbb{Z}$ の $Br(k)$ での像は P に対応する元である．$m \in \mathbb{Z}$ が $\mathrm{Pic}(P_k)$ の像に入ることと mH が k 上定義されることは同値である．mH が k 上定義されるとき，mH の完備線形系により閉埋め込み射

$$P \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+m-1}{m}-1}$$

を得る．$-nH$ は標準因子で有り k 上定義される．従って nH も k 上定義される．従って $n-1$ 次元ブラウアー・セヴェリ多様体は常に $\binom{2n-1}{n}$ 次元の射影空間に k 上埋め込める．$n = 2$ のとき，つまり 1 次元ブラウアー・セヴェリ多様体は射影平面 $\mathbb{P}^2$ に（2 次曲線として）埋め込める．

命題 4.5.1. ブラウアー・セヴェリ多様体 P に対し，P が自明（射影空間と k 上同形）であることと，P が k 点を少なくとも *1* つ持つことは同値である．

証明. 射影空間と同形なら明らかに k 点を持つ．逆に P が k 点を持つとき，双対 $P^\vee$ の超平面 H は k 上定義される．従って $P^\vee$ は自明である．従って，$P = (P^\vee)^\vee$ も自明である．　□

4.6　平面曲線

$\mathbb{P}^2$ に埋め込まれている代数曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ を**平面曲線**という．これは，既約斉次多項式により $C = V(f)$ とかけ，C の**次数**を f の次数と定義する．

$$\deg C := \deg f.$$

定理 4.6.1. C の次数を d とすると種数は

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

で与えられる．

証明. 随伴公式より $d = 1, 2$ のとき K_C は次数が負となり $g = l(K_C) = 0$ である．$d = 3$ のときは $K_C \sim 0$ で $g = l(K_C) = 1$ となる．どちらの場合も定理が成り立つ．$d \geq 2$ の場合は K_C は非常に豊富で

$$K_C = (d-3)H|_C$$

となる．ベズの定理（定理 4.6.2）より，$\deg H|_C = d$ となり，$\deg K_C = d(d-3)$ となる．これと系 4.2.2 から定理が従う． □

定理 4.6.2 (ベズの定理)**.** $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ を既約射影代数多様体とし，$\dim X + \dim Y = n$ とする．さらに $\dim X \cap Y = 0$ と仮定する．このとき，重複度を込めて交点をかぞえると $\deg X \cdot \deg Y$ に等しい：

$$\sharp_{\text{重複度込み}}(X \cap Y) = \deg X \cdot \deg Y$$

（次数 deg の定義の仕方は複数有り，例えばヒルベルト多項式を使えば良い *Hartshorne [1977, p. 52], Fulton [1998, p. 144]*. 超曲面の次数は定義多項式の次数に等しく，線形部分空間の次数は *1* である.）

4.7　$g = 1$

k を代数体（$\mathbb{Q}$ の有限次拡大）を固定し，$k \subset K$ として話を進める．

定義 4.7.1. 種数 1 の代数曲線は有理点を少なくとも一つ持つとき**楕円曲線**と呼ばれる．

補題 4.7.2. 楕円曲線 C の相異なる *2* 点 P, Q は因子として線形同値ではない.

証明. 証明. リーマン・ロッホの定理より

$$\gamma(P - Q) \leq \deg(P - Q) + 1 - g = 0.$$

従って，$P - Q \not\sim 0$. □

補題 4.7.3. 任意の *3* 点 $P_0, P_1, P_2 \in C$ に対し，一意的に $P_3 \in C$ が定まり，

$$P_1 + P_2 - P_0 \sim P_3$$

となる（左辺の演算は因子としてもので，下で定める C の群構造によるものではない）．さらに，P_0, P_1, P_2 が k 点なら，P_3 も k 点である．

証明. $D := P_1 + P_2 - P_0$ とおくと，リーマン・ロッホの定理より

$$\gamma(D) = 1$$

となる．従って，D と線形同値な有効因子 E が唯一つ存在する．$\deg D = \deg E = 1$ なので，ある点 P_3 に対して $E = P_3$ となる．この議論は k 上でも機能して，P_3 は k 点である事が分かる． □

定義 4.7.4. k 点 $P_0 \in C(k) \subset C$ を固定して，C の群構造は次のように定まる．点 $P, Q \in C$ の和 $P + Q$ を因子の線形同値

$$P + Q - P_0 \sim R$$

が成り立つ唯一つの点 R と定義する.（因子の和と C の群構造を同じ $+$ で表したが，混同しないように注意すること）.

$C(k)$ は C の部分群となる.

命題 4.7.5. 楕円曲線は全て平面 *3* 次曲線に k 上同型である.

証明. 整数 $n > 0$ に対し，$\gamma(nP_0) = n$ となる．そこで，$x \in \Gamma(2P_0)$ を $1, x$ が $\Gamma(2P_0)$ の基底になるように選び，$y \in \Gamma(3P_0)$ を $1, x, y$ が $\Gamma(3P_0)$ の基底になるように選ぶ．すると，$1, x, y, x^2, xy$ は $\Gamma(5P_0)$ の基底となる．$1, x, y, x^2, xy, x^3, y^2 \in \Gamma(6P_0)$ の間には一つ線形関係式が成り立つ．x, y をスカラー倍で置き換えると

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

という関係式を得る．$3P_0$ は非常に豊富なので，$\phi_{|3P_0|}$ で C を埋め込むと，上の式（を斉次化したもの）で定義される 3 次平面曲線を得る. □

定理 4.7.6 (モーデル・ヴェイユの定理)**.** $C(k)$ は有限生成アーベル群である.

定理 8.3.1 でより一般的なアーベル多様体の場合を扱い，証明の概略を述べる.

4.8　$g \geq 2$

定理 4.8.1 (ファルティングス)**.** 代数体 k 上定義された種数 $g \geq 2$ の代数曲線 C に対し $C(k)$ は有限集合である.

証明. 略．興味を持った人は Bombieri and Gubler [2006], Hindry and Silverman [2000] などを読んで下さい. □

第5章　双有理幾何

この章では代数多様体はすべて既約とする．

5.1　有理写像

定義 5.1.1. 代数多様体 Y から X への**有理写像** $f\colon Y \dashrightarrow X$ とは空でない開集合 $U \subset Y$ からの射 $f\colon U \to X$ の同値類である．二つの空でない開集合 $U, V \subset Y$ からの射 $U \to X$，$V \to X$ は $U \cap V$ 上で一致するとき，同値である．有理写像 $f\colon Y \dashrightarrow X$ を定める射 $U \to X$ のなかで U が最大となるものが存在する．この $\mathrm{dom}(f) := U$ を f の**定義域**といい，各点 $x \in U$ で f は**定義される**という．有理写像 f の**像**を

$$\mathrm{Im}(f) = f(Y) := f(\mathrm{dom}(f))$$

と定義する．$Y \setminus \mathrm{dom}(f)$ の点を f の**不確定点**という．

X 上の有理関数 f は有理写像 $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ と見なせる．

定義 5.1.2. 有理写像 $f\colon Y \dashrightarrow X$ が支配的であるとは，次の同値な条件が成り立つことである：

1. $f(Y)$ が X の稠密な部分集合である；
2. $f(Y)$ は X の空でない開部分集合を含む．

有理写像を**支配的**という．支配的有理写像 $g\colon Z \dashrightarrow Y$ と有理写像 $f\colon Y \dashrightarrow X$ の**合成** $f \circ g\colon Z \dashrightarrow X$ が定義される．

特に，支配的有理写像 $f\colon Y \dashrightarrow X$ に対し，関数体の写像

$$\begin{aligned} f^*\colon K(X) &\to K(Y) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

が誘導される．これは，K 線形な体の準同形（K 埋め込みとも）になる．

定義 5.1.3. 二つの支配的有理写像 $f\colon Y \dashrightarrow X$ と $g\colon X \dashrightarrow Y$ が $f \circ g = \mathrm{id}_X$，$g \circ f = \mathrm{id}_Y$ となるとき，f と g を**双有理写像**と呼ぶ．Y と X の間に双有理写像が存在するとき，Y と X は**双有理的**であるという．射 $f\colon Y \to X$ が**双有理的**，または**双有理射**であるとは，有理写像として双有理的である事を意味する．

事実 5.1.4.

1. 支配的有理写像 $f\colon Y \dashrightarrow X$ が双有理的であることと，$f^*\colon K(X) \to K(Y)$ が同型であることは同値である．

2. 関数体の関数体の K 埋め込み $K(Y) \to K(X)$ は，ある支配的な有理写像 $f\colon Y \dashrightarrow X$ に対する引き戻し写像 f^* に一致する．

注意 5.1.5. 部分体 $k \subset K$ に対し，k 上定義された有理写像，k 上双有理的などの概念も定義できる．

例 5.1.6. 次の射 f を考える．

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{A}^1 &\to C = \{y^2 - x^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

は双有理射である．逆有理写像は

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{A}^2 \supset C \setminus \{0\} &\to \mathbb{A}^1 \\ (x, y) &\mapsto y/x \end{aligned}$$

で与えられる．この f は特異点解消の例にもなっている．

例 5.1.7 (Harris [1992, p. 78])**.** $Q \subset \mathbb{P}^3$ を 2 次曲面とし，$\mathbb{P}^2 \cong H \subset \mathbb{P}^3$ を超平面とする．任意の点 $q \in Q \setminus H$ をとり，射影

$$\pi\colon \mathbb{P}^3 \setminus \{q\} \to \mathbb{P}^2$$

を考える．これは，$x \in \mathbb{P}^3$ を q, x の 2 点を通る唯一つの直線 l と H の交わりに送る写像である．一般の直線 l は Q と 2 点で交わることから

$$\pi|_Q\colon Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

双有理写像が誘導される．

具体的に $Q = V(x_0x_3 - x_1x_2)$，$P = (0 : 0 : 0 : 1)$，$H = V(x_3)$ とおくと，

$$\pi((x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) = (x_0 : x_1 : x_2)$$

となり，逆有理写像は

$$\begin{aligned} \pi^{-1}\colon \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow Q \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2) \end{aligned}$$

で与えられる．

例 5.1.8 (アフィン空間の原点での爆発)**.**

$$X := \{((x_i), (y_j)) \mid \forall i, j,\ x_iy_j = x_jy_i\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

とする．条件 $x_iy_j = x_jy_i$ は

$$(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ or } (x_1 : \cdots : x_n) = (y_1 : \cdots : y_n)$$

を意味する．射影

$$\begin{aligned} \pi\colon X &\to \mathbb{A}^n \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

双有理射で

$$\pi^{-1}(x) = \begin{cases} \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1} & (x = 0) \\ 1 \text{ 点} & (x \neq 0) \end{cases}$$

となる．X や射 π を $\mathbb{A}^n$ の原点での**爆発**（ブローアップ）という．

5.2　双有理幾何

双有理幾何とは代数多様体 X の双有理同値で不変な性質を調べる研究分野である．関数体を幾何学的に調べることであるとも解釈できる．例えば代数多様体 X の自己双有理写像群

$$\mathrm{Bir}(X) := \{\text{ 双有理写像 } f\colon X \dashrightarrow X\}$$

を調べることは，双有理幾何の問題と言える．

1 つの双有理同値類の中に，互いに同形で無い代数多様体が無数にある．双有理幾何の 1 つの中心的問題として，漠然としているが「各双有理同値類の中から良いモデルを見つける」という事がある．つまり，代数多様体 X が与えられたときに，それと双有理同値な Y で良い性質を持つものを見つけるという問題である．さらに，出来るだけ Y が一意的に，または標準的に選べるとなお良い．

まず，幾何学的には射影代数多様体が扱いやすい．我々は代数多様体は擬射影的（射影空間の部分多様体）であると仮定したので，射影空間の中で閉包を取ることで，射影的なモデルを選ぶことができる．

次に，広中の特異点解消定理によると，非特異で射影的なモデルを選ぶことができる．

定理 5.2.1 (広中の特異点解消定理)**.** K の標数を零とする．射影代数多様体 X に対し，非特異射影代数多様体 Y と双有理射 $f\colon Y \to X$ が存在する．

定義 5.2.2. 定理にあるような Y や f を X の**特異点解消**という．

注意 5.2.3. 定理は X が射影的で無い場合に,「射影的双有理射 $f\colon Y \to X$ で Y が非特異なものが存在する」，というふうに一般化される．射影的射（やその一般化である固有射）を導入するのを避けるために，上の定理では射影代数多様体のみを考えた．

定義 5.2.4. 射影代数多様体の間の双有理射 $f\colon Y \to X$ に対し，開集合 $U \subset Y$ で

$$f|_U\colon U \to f(U)$$

が同型射であるような最大のものが存在する.（たまに，U と $f(U)$ を同一視する.）$Y \setminus U$ を f の**例外集合**という．例外集合に含まれる Y の因子（素因子）を**例外因子**（**例外素因子**）と呼ぶ．

補題 5.2.5. *Y を非特異代数多様体，X を射影代数多様体，$f\colon Y \dashrightarrow X$ を有理写像とする．このとき $Y \setminus \mathrm{dom}(f)$ は 2 以上の余次元を持つ．*

証明. ☻ $\Gamma \subset Y \times X$ を f のグラフの閉包とし，$\pi : \Gamma \to Y$ を射影とする．π は射影双有理射である．従って，あるイデアル層 $I \subset \mathcal{O}_Y$ による爆発と一致する：$\Gamma = Bl_I(Y)$．Y は非特異（特に余次元 1 で非特異）なので，余次元 1 の点 $y \in Y$ の局所環 $\mathcal{O}_{Y,y}$ は離散付値環となり，I は y の近傍で主イデアルとなる．従って，I が局所主イデアルで無い軌跡は余次元 2 以上となる．Y のなかで π が同型で無い軌跡と，I が局所主イデアルで無い軌跡は一致する． □

系 5.2.6. （非特異射影的）代数曲線 C_1, C_2 の双有理写像 $f\colon C_1 \dashrightarrow C_2$ は同型射である．

証明. 補題より f の定義域は C_1 全体であり，f^{-1} の定義域は C_2 全体である．これより，f と f^{-1} は同型射であることが従う． □

この系から次の系が直ちに従う．

系 5.2.7. *1 次元の代数多様体に対しては，唯一つの非特異射影的なモデルが定まる．*

このように，1 次元では各双有理類の中に唯一つの理想的なモデル（非特異で射影的なもの）が存在する．しかし，2 次元以上では各双有理同値類に対し非特異射影的なモデルが無数に存在する．実際，非特異閉部分多様体を爆発という操作で，膨らませることでいくらでも「大きな」非特異射影的モデルを作ることが出来る．そこで，爆発の逆である収縮（爆縮？）という操作で出来るだけ小さいモデルを見つけよう，というのが極小モデル理論（森理論とも）の骨子である．

5.3　標準因子公式

非特異代数多様体の双有理射 $f\colon Y \to X$ を考えよう．$y \in Y$，$x = f(y) \in X$ とし，$y_1, \ldots, y_n$ を y の近傍での局所座標系，$x_1, \ldots, x_n$ を x の近傍での局所座標系とする．このとき，$\omega := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ の f での引き戻し

$$f^*\omega := d(f^*x_1) \wedge \cdots \wedge d(f^*x_n) = \frac{\partial(f^*x_1, \ldots, f^*x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

が定まる．ここに現れるヤコビ行列式は y の近傍 U での正則関数である．

定義 5.3.1. D を U と交わる Y の素因子とする．D の（f に関する）**食い違い係数**を

$$a_D := \mathrm{ord}_D \frac{\partial(f^*x_1, \ldots, f^*x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \geq 0$$

により定義する．

問題 5.3.2. a_D が well-defined であることを示せ．

補題 5.3.3. D が例外素因子である事と $a_D > 0$ は同値である．

証明. ヤコビ行列式の D に沿った位数が正ということは，f が D の点の近傍で同型で無いことは同値で，それは D が例外素因子であることと同値である． □

命題 5.3.4. 次が成り立つ：

$$K_Y \sim f^*K_X + \sum_{D:\text{例外素因子}} a_D \cdot D.$$

標準因子類から適当な代表元を取ることで

$$K_Y = f^*K_X + \sum_{D:\text{例外素因子}} a_D \cdot D$$

と書くこともしばしばある．

注意 5.3.5. ☻X が正規で K_X がカルティエ因子なら，特異点解消 $f\colon Y \to X$ に対し f^*K_X が定まり，適切に一般化した食い違い係数により

$$K_Y \sim f^*K_X + \sum_D a_D \cdot D$$

が成り立つ．ただし，特異点を許すと食い違い係数 a_D が 0 以下になることがある．食い違い係数の大小により，特異点の「悪さ」を測るというのが極小モデル理論における特異点研究の基本的考え方である．

例 5.3.6. 例 5.1.8 の一般化として，非特異代数多様体 X の非特異な閉部分多様体 Y に沿った爆発 $Bl_Y(X)$ を定義できる．これは X を同じ次元の非特異代数多様体で自然な（射影的）双有理射 $\pi\colon Bl_Y(X) \to X$ が存在する.（X, Y が非特異でなくても爆発は定義できるが，その場合 $Bl_Y(X)$ は一般に特異点を持ち，その計算は難しい.）例外集合を $E \subset Bl_Y(X)$ とし，Y の余次元を c とすると，E はそれ自身が（既約）非特異代数多様体で Y の上の $\mathbb{P}^{c-1}$ 束となる．そして，

$$K_Y \sim \pi^*K_X + (c-1)E$$

が成り立つ．

5.4　多重種数

定義 5.4.1. 自然数 m と非特異射影代数多様体 X に対し，m **重種数** $p_m(X)$ を

$$p_m(X) := \gamma(mK_X)$$

により定義する．特に $m = 1$ のとき，

$$p_1(X) = p_g(X) = \gamma(K_X)$$

を X の**幾何種数**と呼ぶ.

高次元代数多様体を調べるには，幾何種数だけでは情報が少なく，その一般化である m 重種数を全て考える方が良い.

注意 5.4.2. ☻ 幾何種数は代数曲線の種数の一般化だが，もう一つの一般化に算術種数 p_a がある．これは n 次元代数多様体 X に対し，

$$p_a(X) = (-1)^{n-1}(\chi(\mathcal{O}_X) - 1) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i h^{n-i}(X, \mathcal{O}_X)$$

により定義される.

命題 5.4.3. X, Y を双有理同値な非特異射影代数多様体とする．このとき，各自然数 m について

$$p_m(X) = p_m(Y)$$

がなりたつ．つまり，m 重種数は双有理不変量である.

証明. まず双有理射 $f\colon Y \to X$ が存在する場合に帰着できる．実際，$\Gamma \subset X \times Y$ を双有理写像 $X \dashrightarrow Y$ のグラフの閉包とすると，射影 $\Gamma \to X$ と $\Gamma \to Y$ は射影双有理射である．さらに，特異点解消 $\tilde{\Gamma} \to \Gamma$ を取ることで，射影双有理射 $\tilde{\Gamma} \to X$ と $\tilde{\Gamma} \to Y$ が得られる.

双有理射 $f\colon Y \to X$ に対し

$$f^*\Gamma(mK_X) = \Gamma(mK_Y)$$

を示せば命題が従う．これを示すためには，ω を X の有理微分形式と有理関数 $g \in K(X)^*$ に対し，$f^*\omega$ を Y への引き戻しとして，

$$\mathrm{div}(g) + m \cdot \mathrm{div}(\omega) \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}(f^*g) + m \cdot \mathrm{div}(f^*\omega) \geq 0$$

を示せば良い．$U \subset Y$ を f が同型となる最大の開集合とすると，$X \setminus f(U)$ は余次元が 2 以上である（補題 5.2.5）．$\Leftarrow$ は単に U に因子を制限することで分かる.

$\mathrm{div}(g) + m \cdot \mathrm{div}(\omega) \geq 0$ が成り立つとき，

$$\mathrm{div}(f^*g) + m \cdot \mathrm{div}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{div}(g) + m \cdot \mathrm{div}(\omega)) + \sum_{D:\text{例外素因子}} a_D \cdot D \geq 0$$

となる. □

5.5　小平次元と巨大因子

定義 5.5.1. 非特異既約射影代数多様体 X と因子 D の組 (X, D) の対し，その**飯高・小平次元**を

$$\kappa(X, D) := \max_{m>0}\{\dim \phi_{|mD|}(X)\} \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim(X)\}$$

と定義する．ただし，全ての $m > 0$ に対し $\Gamma(mD) = 0$ の場合 $\dim \phi_{|D|}(X) := -\infty$ とおく．特に $D = K_X$ に対し，$\kappa(X) := \kappa(X, K_X)$ を X の**小平次元**と呼ぶ.

補題 5.5.2 (Iitaka [1982, p. 301])**.** 正の実数 c, c' と正の整数 m_0 が存在して，任意の十分大きな m_0 の倍数 m に対し

$$cm^{\kappa(X,D)} \leq \gamma(mD) \leq c'm^{\kappa(X,D)}$$

が成り立つ.

つまり，小平次元は多重種数の増大度である．このことから，次の事が分かる.

命題 5.5.3. 小平次元は双有理不変量である.

定義 5.5.4. $\kappa(X, D) = \dim X$ であるとき，因子 D は巨大であるという.

補題 5.5.5. つぎは同値：

1. D は巨大.
2. ある $n > 0$ に対し，$\phi_{|nD|}$ が双有理写像.
3. 十分分解的な $n > 0$ に対し，$\phi_{|nD|}$ が双有理写像.
4. ある $n > 0$ に対し，豊富因子 A と有効因子 E が存在して $nD \sim A + E$ となる.

特に豊富因子は巨大である.

命題 5.5.6. 小平次元は次の性質を満たす.

1. $\dim Y = \dim X$ で支配的かつ分離（*separable*）有理写像 $f\colon Y \dashrightarrow X$ があれば，$\kappa(Y) \geq \kappa(X)$.
2. $\kappa(X \times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y)$

証明.　1. 小平次元は双有理不変量なので，Y, X を適当な非特異射影的で，f が射であると仮定しても良い．この場合，有限射に対する分岐公式（5.3 章の双有理射にたいする標準因子公式と同様のもの）から，単射 $f^*\colon \Gamma(mK_X) \to \Gamma(mK_X)$ が得られ，主張が従う.

2. p_X, p_Y を $X \times Y$ から各成分への射影としたとき $K_{X+Y} = p_X^* K_X + p_Y^* K_Y$ となる．このことから $\Gamma(mK_{X+Y}) = \Gamma(mK_X) \otimes \Gamma(mK_Y)$ となり，補題が従う.

□

注意 5.5.7. 命題の一つ目の主張で「分離」という条件を外すと，判例がある．実際に，等しい次元の有理多様体 Y（特に $\kappa(Y) = -\infty$）から一般型多様体（つまり $\kappa(X) = \dim X$）への純非分離で支配的な有理写像 $f\colon Y \dashrightarrow X$ が存在する.

5.6　ファノ多様体

定義 5.6.1. **ファノ多様体**とは非特異射影代数多様体 X で $-K_X$ が豊富であるものである.

特異点などを許して一般化することもある.

補題 5.6.2. ファノ多様体 X に対し $\kappa(X) = -\infty$ である.

証明. 一般に $n > 0$ について $\gamma(nD) > 0$ なら，任意の $m > 0$ について $\gamma(mD) = 0$ である．$D = -K_X$ とすると補題が従う. □

例 5.6.3. 射影空間 $X = \mathbb{P}^n$ の反標準因子 $-K_X$ は $(n+1)H$ であり，これは豊富である．従って，射影空間はファノ多様体である.

例 5.6.4. 次数 d の斉次多項式 f で定義される d 次非特異超曲面 $X = V(f) \subset \mathbb{P}^n$ を考える．随伴公式より，$-K_X = (n+1-d)H|_X$ であり．$d < n$ のとき，$-K_X$ は豊富で，X はファノ多様体となる．

定義 5.6.5. 有理曲線とは，$\mathbb{P}^1$ と双有理同値な（既約）射影代数多様体である．ただし，非特異性は仮定しない．

ファノ多様体は射影空間の一般化で有り，射影空間の幾つかの性質を共有している．そのような性質の 1 つが，多くの有理曲線を含むことである．次の定理が基本的である．

定理 5.6.6 (Mori [1979])**.** X をファノ多様体とする．任意の点 $x \in X$ に対し，その点を通る有理曲線 C で

$$(C, -K_X) \leq \dim X + 1$$

を満たすものがある．

注意 5.6.7. 有理曲線は有理点の類似とみなせる．ファノ多様体が有理曲線をたくさん持つという主張の，数論的類似はマニン予想であるといえる．さらに，交点数 $(C, -K_X)$ は有理点の高さの類似で有り，高さの低いものがたくさんあるいう主張もマニン予想と関連している．

証明の概略は 5.7 章で述べる．

5.7　定理 5.6.6 の証明：曲げ折り法

定理 5.6.6 の証明は以下のようなものである．まず与えられた点 $x \in X$ を通る任意の曲線 C から始める．フロベニウス写像により C の次数を大きくすることで，点 x を固定したまま曲線を変形できる．曲げ折り補題の 1 つを使い，C が有理曲線を含む可約曲線に分解し，x を通る有理曲線の存在が分かる．もし，有理曲線の次数が高ければ，さらに曲げ折ることができ，次数の低い有理曲線を作れる．

一つ目の曲げ折り補題の証明に次の剛性補題を用いる．その内容は簡潔に言うと,「固有多様体 W からのコンスタント射 $f\colon W \to X$ の変形 $f'\colon W' \to X$ はコンスタントである」となる．

補題 5.7.1 (剛性補題)**.** 既約代数多様体の図式

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ Z & \end{tikzcd}$$

において，π はファイバー次元が一定の固有射で，f は π のあるファイバー $\pi^{-1}(z_0)$ を *1* 点に潰すとする：$f(\pi^{-1}(z_0)) = \{x_0\}$．このとき，$f$ は任意のファイバー $\pi^{-1}(z)$ を *1* 点に潰す．

証明. W を

$$(f, \pi)\colon Y \to X \times Z$$

の像とすると，π は

$$Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{p} Z$$

と分解する．g は固有射であり，$p^{-1}(z) = f(\pi^{-1}(z)) \times \{z\}$ が成り立つ．

π の各ファイバーの次元を n とする．$p^{-1}(z_0) = \{(x_0, z_0)\}$ なので，$g^{-1}(x_0, z_0)$ の次元は n である．一方，$g^{-1}(x, z) \subset \pi^{-1}(z)$ より，g の各ファイバーの次元は高々n である．ファイバー次元の上半連続性より，g のファイバーの次元は一定であり，従って p のファイバー $p^{-1}(z) \cong f(\pi^{-1}(z))$ の次元も常に 0 である．$\pi^{-1}(x)$ は既約なので，$f(\pi^{-1}(x))$ は 1 点となる．　□

注意 5.7.2. この補題（のもう少し特殊な場合）はアーベル多様体の可換性を示すためにも使われる Bombieri and Gubler [2006, pp. 233–234].

次の曲げ折り補題 1 は,「1 点を固定したまま曲線を変形すると，最後は（有理曲線 + その他）という 1 サイクルに退化する」という主張である.

補題 5.7.3 (曲げ折り補題 1)**.** *X を射影代数多様体，C を 1 次元非特異射影代数多様体とし，定数でない射 $f\colon C \to X$ を考える．ある点 $p \in C$ での行き先を固定する射の非自明な変形*

$$F\colon C \times Z \to X$$

があるとする．このとき，点 $f(p)$ を通る X の有理曲線が存在する.

証明. Z を 1 次元で非特異として良く，$\bar{Z}$ をその射影コンパクト化とし，F を拡張した有理写像 $\bar{F}\colon C \times \bar{Z} \to X$ を考える．もし，これが射であるとすると，図式

$$\begin{tikzcd} C \times \bar{Z} \arrow[r, "\bar{F}"] \arrow[d] & X \\ C & \end{tikzcd}$$

に剛性補題を適用して，任意の $q \in C$ について $\bar{F}$ は $\{q\} \times \bar{Z}$ を一点に潰すことが従う．これは，F が f の非自明な変形である事に反する．従って，有理写像 $\bar{F}$ は $\{p\} \times Z$ 上に不確定点 r を持つ．不確定点除去をし可換図式

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "F'"] & \\ C \times \bar{Z} \arrow[rr, dashed, "\bar{F}"'] & & X \end{tikzcd}$$

を得る．ϕ は固有双有理射である．補題 5.7.4 より $\phi^{-1}(r)$ は有理曲線の和集合である．$F'(\phi^{-1}(z))$ も有理曲線の和集合で $f(p)$ を含む.（リューローの定理 5.7.5 より，有理曲線の像は 1 点か有理曲線のどちらかであることと，$\phi^{-1}(r)$ に含まれる有理曲線うちどれかは F' でつぶれないことに注意する.）　□

補題 5.7.4 (Abhyankar [1956, Prop. 4])**.** *$f\colon Y \to X$ を固有双有理射，X は非特異であるとする．このとき，ファイバー $f^{-1}(x)$ は 1 点でなければ有理曲線で覆われる（任意の点を通る $f^{-1}(x)$ に含まれる有理曲線がある.）*

証明. 上の曲げ折り補題の証明で必要となるのは曲面の場合だけである．この場合をさきに証明する.

曲面の場合．f^{-1} の不確定点を除去して，固有双有理射 $g\colon Z \to Y$，$h\colon Z \to X$ で有理写像の等式

$$h \circ g^{-1} = f$$

となるものが存在する．非特異曲面の固有双有理射は 1 点での爆発の繰り返しに分解する Hartshorne [1977, p. 411, Cor. 5.4]．g の例外集合は有理曲線の和集合である．リューローの定理 5.7.5 より $f^{-1}(x)$ も有理曲線で覆われることが従う.

一般の場合．まず，X が非特異，特に $\mathbb{Q}$ 分解的であるので，f は因子的（例外集合の各既約成分は余次元 1 を持つ）である．f の各例外素因子 E はザリスキの結果 Kollár and 森 [1998, p. 78] より爆発を繰り返して得られる．従って，E の空でない開集合 E° はある代数多様体 B 上の $\mathbb{P}^r$ 束となる．特に任意の E° の点 y_t を通り，X に送ると 1 点 $x_t = f(y_t)$ につぶれる有理曲線 C_t がある．$f^{-1}(x)$ の任意の点 y に y_t を近づけていくと，有理曲線の族 C_t が得られる．さらに，代数的な族として構成できる．射影曲線の退化は射影曲線の和集合なので（半安定還元の存在とリューローの定理などから，上の曲面の議論と同様に示せる），補題が従う.　□

補題 5.7.5 (リューローの定理)**.** 有理曲線 C からの有理写像 $f\colon C \dashrightarrow X$ の像 $f(\mathrm{dom}(f))$ は *1* 点でなければ有理曲線である.

証明. 像を D とおく．正規化，射影コンパクト化して，非特異射影代数曲線の有限射

$$f\colon C = \mathbb{P}^1 \to D$$

に対して，C の種数が 0 ならば D の種数も 0 であることを示せば良い．f は純比分離射 f_i と分離射 f_s の合成

$$C \xrightarrow{f_i} C' \xrightarrow{f_s} D$$

として書ける．f_i はフロベニウス射を何回か繰り返したもの Hartshorne [1977, p. 302, Prop. 2.5] であり，C' も種数 0 である．f_s にフルヴィッツの公式 Hartshorne [1977, p. 301, Cor. 2.4] を適用して，D も種数 0 であることが従う. □

次の曲げ折り補題 2 で,「2 点を固定する有理曲線の変形は, 可約 (reducible) か非被約 (non-reduced) なものに退化」することが分かる．これにより，より低い次数の有理曲線を得る.

補題 5.7.6 (曲げ折り補題 2)**.** X を射影代数多様体とし，$f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ を定数でない射とする．*2* 点 $0, \infty \in \mathbb{P}^1$ の行き先を固定する変形

$$F\colon \mathbb{P}^1 \times Z \to X$$

で像 $F(\mathbb{P}^1 \times Z)$ が *2* 次元であるものがあるとする．このとき，$f_*(\mathbb{P}^1)$ は *2* つ以上の有理曲線 C_i で

$$f(0), f(\infty) \in \bigcup_i \mathrm{Supp}(C_i)$$

を満たすもの和 $\sum_i C_i$ に代数的に同値になる.（ただし，C_i が相異なるとは限らない.）

証明. 曲げ折り補題 1 の場合と同様に，Z を 1 次元で非特異とし，射影コンパクト化 $\bar{Z}$ を取り，S を $\mathbb{P}^1 \times Z$ を開集合として含むような $\bar{Z}$ 上の $\mathbb{P}^1$ 束とし，誘導される有理写像

$$\bar{F}\colon S := \mathbb{P}^1 \times \bar{Z} \dashrightarrow X$$

を考える．背理法を使うために，$\bar{F}$ が射であるとする．S のネロン・セヴェリ群は階数 2 で Hartshorne [1977, p. 370] あり．H を X 上の豊富因子の S への引き戻し，$C_0 = \{0\} \times \bar{Z}$，$C_\infty = \{\infty\} \times \bar{Z}$ とすると，

$$H^2 > 0,$$
$$H \cdot C_0 = H \cdot C_\infty = 0$$

が成り立つ.（$H^2 > 0$ を示すのに，F の像が 2 次元である事を使った.）さらに，$\bar{F}(S)^\nu$ を $\bar{F}(S)$ の S の中での正規化とし，$\bar{F}$ を

$$S \xrightarrow{g} \bar{F}(S)^\nu \to \bar{F}(S)$$

と分解する．C_0，C_∞ は双有理射 g で収縮するので

$$C_0^2 < 0,\ C_\infty^2 < 0$$

となる（例えば Bădescu [2001, p. 19, Cor. 2.7]．若しくは，ホッジ指数定理 Bădescu [2001, Cor. 2.4] からも従う.）一方，C_0 と C_∞ は線形同値なので，

$$C_0^2 = C_0 \cdot C_\infty \geq 0$$

となり，先ほどの不等式と矛盾する．つまり，$\bar{F}$ は不確定点を持つことが分かった．

そこで，

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\tilde{F}"] \arrow[ddl, "\psi"] & \\ S \arrow[d] & & X \\ \bar{Z} & & \end{tikzcd}$$

を $\bar{F}$ の最小の不確定点除去とする．ψ のあるファイバー $\psi^{-1}(z)$ は可約（reducible）で各既約成分は有理曲線であり，代数的同値

$$f_*(C) \equiv \tilde{F}_*(\psi^{-1}(z))$$

が成り立つ．また

$$f(0),\, f(\infty) \in \tilde{F}(\psi^{-1}(z))$$

が成り立つ．補題を示すためには，$\psi^{-1}(z)$ の既約成分の内，少なくとも 2 つは $\tilde{F}$ でつぶれないことを見れば良い．しかし，つぶれるとすると，Z 上の $\mathbb{P}^1$ 束 S' と射 $S' \to X$ が作れるが，これが矛盾を導くことを上で確かめた． □

補題 5.7.7 (射の変形空間の次元の評価)**.** C を種数 g の非特異射影曲線，X を非特異代数多様体とする．有限個の相異なる点 $c_1, \ldots, c_l \in C$ と同じ個数の（相異なるとは限らない）$x_1, \ldots, x_l \in X$ に対し，$f(c_i) = x_i$ を満たす射 $f\colon C \to X$ のモジュライ空間

$$\mathrm{Hom}(C, X; (c_i), (x_i))$$

を考える．このモジュライ空間の点 $[f]$ での次元は

$$\dim_{[f]} \mathrm{Hom}(C, X; (c_i), (x_i)) \geq -\deg f^* K_X + (1 - g - l) \cdot \dim X$$

を満たす．

証明．概略のみ述べる．詳細は原論文 Mori [1979] や Kollár [1996, II.1] を参考のこと．変形理論から

$$\dim_{[f]} \mathrm{Hom}(C, X; (c_i), (x_i)) \geq \chi(f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-\sum_i c_i))$$

が成り立つ．曲線のリーマン・ロッホの定理（定理 3.4.6）より，

$$\begin{aligned} \chi(f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-\sum_i c_i)) &= -\deg f^* K_X - l \cdot \dim X + (1 - g) \cdot \dim X \\ &= -\deg f^* K_X + (1 - g - l) \cdot \dim X \end{aligned}$$

が成り立ち，補題が示される． □

定理 *5.6.6* の証明．任意の点 $x \in X$ を固定し，代数曲線からの射 $f\colon C \to X$ で

$$\deg f^*(-K_X) > g \cdot \dim X \tag{5.7.1}$$

と $x \in f(C)$ 満たすものがある場合を考える．変形空間の次元の評価より，一点 $c \in f^{-1}(x)$ をとり，$f(c) = x$ を満たしながら f を（非自明に）変形できる．曲げ折り補題 1 より，x を通る有理曲線の存在が分かる．

$x \in X$ を通る有理曲線 C が $-C \cdot K_X > \dim X + 1$ を満たすとする．正規化

$$f\colon \tilde{C} \cong \mathbb{P}^1 \to C \subset X$$

を考え，二点 $c_1, c_2 \in \tilde{C}$ で $f(c_1) = x$ となるものを選び，$f(c_1)$ と $f(c_2)$ を固定するような f の変形を考える．そのような変形空間の次元は

$$\text{次元} \geq -\deg f^* K_X - \dim X = -C \cdot K_X - \dim X \geq 2$$

を満たす．$\mathbb{P}^1$ の 2 点を固定した自己同型の成す群は 1 次元だから，像 $f(C)$ も変形する．従って，曲げ折り補題 2 より，C は $-K_X$ に関して，より低い次数の有理曲線の和にサイクルとして分解する．これを繰り返し，$-C \cdot K_X \leq \dim X + 1$ となる x を通る有理曲線を構成できる．

今，基礎体の標数が正だとすると，不等式 (5.7.1) を満たすような C を見つけることが出来る．実際，任意の射 $f\colon C \to X$ で $x \in f(C)$ を満たすものに対して，十分多い回数のフロベニウス射の繰り返しと合成して

$$g := f \circ F_C^e\colon C_e \xrightarrow{F^e} C \to X$$

とすると，

$$-\deg g^* K_X = -p^e \cdot \deg f^* K_X$$

をいくらでも大きく出来る．C_e は C をフロベニウスでひねったものだが，種数は C と等しい．結局，正標数では定理が成り立つことが分かった．

標数零の場合は正標数の場合から以下のように示される．いま，有限生成 $\mathbb{Z}$ 代数 R 上のスキーム $\mathcal{X}$ で切断 $\operatorname{Spec} R \to \mathcal{X}$ を持ち，X が幾何学的生成ファイバーで $x \in X$ が切断に対応ようなものを構成できる．このとき，Hom スキーム

$$\mathcal{H}om_{\operatorname{Spec} R}(\mathbb{P}^1_R, \mathcal{X})$$

の部分スキームで，$f(0) = x$ で $-\deg f^* K_{\mathcal{X}/R} \leq \dim X + 1$ を満たすものをパラメタ付けるものを H とする．H は R 上有限型のスキームである．さらに，上で示した正標数の場合の結果より，R 上の全ての幾何学的閉ファイバーは空ではない．従って，生成ファイバーも空ではなく，幾何学的生成ファイバーの閉点は定理を満たす有理曲線 C を与える．□

注意 5.7.8 (正標数還元). 標数 0 の体 K 上の代数多様体や射，因子，部分多様体など，考えている対称の定義に出てくる多項式の係数を $a_1, \ldots, a_n$ とし，それらを $\mathbb{Q}$ に添加して得られる体 $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n) \subset K$ を考える．すると，考えている対称は全てこの $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体上で定義されていることになり，さらに $\mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_n]$ 上定義されたスキームや射などを与える．$\mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_n]$ の各極大イデアルの剰余体

$$\kappa = \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_n]/\mathfrak{m}$$

は有限体で，特に正標数の体である．スキームを κ に基底変換することで κ 上の代数多様体や射などをえる．$\mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_n]$ を適当な元で局所化（つまり，もう一つ生成元 a_{n+1} を加える）することで，全ての極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し，こうして得られた代数多様体 X_κ や射などは元の標数零の代数多様体や射などと同じ性質を持つように出来ることが多い（例えば非特異などの性質）．例えば，$V(x^2 + y^2 + z^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ は既に $\mathbb{Z}$ 上定義されていると思えて，各極大イデアル $(p) \subset \mathbb{Z}$ に対し，そのまま正標数還元 $V(x^2 + y^2 + z^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}/(p)}$ を考えることが出来る．$p = 2$ のとき，これは $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2$ なので，non-reduced になってしまうが，$p > 3$ では非特異な代数曲線を得る．

X_κ に対しフロベニウス写像に代表される正標数の手法を用いて，X_κ に対し示したい命題を証明し，そこから元の代数多様体（$\mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_n]$ 上のスキームの生成ファイバー）も同じ命題を満たすことを示す，というのが正標数還元の概要である．また，コホモロジー群 $H^i(X, \mathbb{Q})$ の次元の計算も，正標数還元，有限体上の有理点の数え上げ，ヴェイユ予想などを組み合わせて得られる場合もある．

5.8　ファイバー空間と分類

この章では体 K の標数は 0 とする．正標数の場合も，同様の考え方が成立すると期待されるが，関数体の純非分離拡大の取り扱いなどに注意が必要である．また，標数 0 でのみ知られている結果も多いので，この仮定をつける．

定義 5.8.1. 代数多様体の射 $f\colon Y \to X$ が**ファイバー空間**であるとは，全射で各ファイバーが連結であることをいう．

代数多様体 Y がファイバー空間の構造 $f\colon Y \to X$ を持つとすると，一般ファイバー $F = f^{-1}(x)$（つまり，空でない開集合 $U \subset X$ の任意の点 $x \in U$ に対して）は（既約）代数多様体で次元が $\dim Y - \dim X$ であるものになる．このとき，Y は一般ファイバー F と底空間 X に「分解された」と考えることがある．幾つかの予想により，最終的に以下の構成要素に分解できると期待されている：

- ファノ型多様体
- アーベル多様体
- カラビ・ヤウ型多様体
- 一般型多様体

命題 5.8.2 (Ueno [1975, p. 74])**.** ファイバー空間 $f\colon Y \to X$ とその一般ファイバー F に対し，

$$\kappa(Y) \leq \kappa(F) + \dim X$$

が成り立つ．

予想 5.8.3 (予想 C_n Ueno [1975, p. 132])**.** n 次元代数多様体 Y からのファイバー空間 $f\colon Y \to X$ とその一般ファイバー F に対し，

$$\kappa(Y) \geq \kappa(F) + \kappa(X)$$

が成り立つ．

5.8.1　$\kappa = -\infty$ の場合

$\kappa = -\infty$ の代数多様体は（森ファイバー空間により）ファノ型代数多様体 ($-K_X$ が豊富，ただし特異点は許す) とより次元の低い代数多様体に分解されると期待される．

定義 5.8.4. n 次元代数多様体 X が**単線織（*uniruled*）である**とは，$n-1$ 次元代数多様体 Y と支配的有理写像

$$\mathbb{P}^1 \times Y \dashrightarrow X$$

が存在することである．

命題 5.8.5. 単線織代数多様体 X に対し，$\kappa(X) = -\infty$ となる．

証明. 命題 5.5.6 の二つ目の主張より $\kappa(\mathbb{P}^1 \times Y) = -\infty$ であり，一つ目の主張より $\kappa(X) = -\infty$ となる． □

ファノ多様体には各点にたいし，その点を通る有理曲線が存在するのだったが（定理 5.6.6），実際には単線織であることもが知られている（Kollar）．

注意 5.8.6. ファノ多様体はさらに有理連結にもなる．

予想 5.8.7. 代数多様体 X に対し次は同値：

1. $\kappa(X) = -\infty$.
2. K_X は擬有効ではない.
3. ファイバー空間 $f\colon X' \to W$ で，X と X' は双有理同値，f の一般ファイバー F は $-K_F$ が豊富なものが存在する.
4. X は単線織である.

注意 5.8.8. $3 \Rightarrow 1$ は命題 5.8.2 から従う．$4 \Rightarrow 1$ は上の命題である.

定理 5.8.9 (Boucksom et al. [2013])**.** X が単線織代数多様体であることと K_X が擬有効でないことは同値である.

5.8.2　$\kappa \geq 0$ の場合

$\kappa \geq 0$ の場合は飯高ファイバー空間により，$\kappa = 0$ の代数多様体とログ一般型のログ多様体（$\kappa(X, D) = \dim X$ となる代数多様体と $\mathbb{Q}$ 因子の対 (X, D)）に分解される.

定理 5.8.10. Y を代数多様体とし，$\kappa(Y) \geq 0$ とする．このとき，Y と双有理同値な非特異射影代数多様体 Y' とファイバー空間 $f\colon Y' \to Z$ で次の条件を満たすものが存在する.

1. 一般ファイバ $f^{-1}(z)$ は $\kappa(f^{-1}(z)) = 0$ を満たす.
2. $\kappa(Y) = \dim Z$ となる.

さらに，このとき有理写像 $Y \dashrightarrow Z$ は Y から一意的に定まる.

定義 5.8.11. 定理のファイバー空間を**飯高ファイバー空間**と呼ぶ.

注意 5.8.12. $\kappa(X) \geq 0$ の代数多様体 X に対し，極小モデルプログラムの出力として X と双有理同値な X' で $K_{X'}$ がネフであるものが得られると期待される.（K_X がネフでマイルドな特異点を持つ代数多様体を極小モデルと呼ぶ.）さらにアバンダンス予想と藤野・森の結果によると，標準的な射（飯高ファイバー空間）$f\colon X' \to Z$ で次の性質を満たすものが存在する：

1. f の一般のファイバー F の標準因子 $K_F \sim_{\mathbb{Q}} 0$.
2. $\dim Z = \kappa(X)$.
3. Z 上の $\mathbb{Q}$ 因子 Δ が存在し次を満たす：
   (a) $R(X) \cong R(K_Z + \Delta)$．ただし，$R$ は標準環を表す.
   (b) (S, Δ) は KLT,
   (c) $K_S + \Delta$ は豊富.

要約すると X はログ一般型である (Z, Δ) と標準因子が $\mathbb{Q}$ 自明な一般ファイバー F に分解される．このように，双有理幾何では代数多様体ではなく，ログ多様体（因子との対）を考える方が自然で，扱いやすい事が多い.

5.8.3　$\kappa = 0$ の場合

さらに $\kappa = 0$ の場合はアルバネーゼ・ファイバー空間により，アーベル多様体とカラビ・ヤウ型多様体に分解されると期待される．

定義 5.8.13. 代数多様体 X の**不正則数** $q(X)$ とは，非特異射影双有理モデル Y に対す $\gamma(\Omega_Y)$ により定義する．

補題 5.8.14 (Iitaka [1982, pp. 198–199])**.** 不正則数は双有理不変量である．

定理 5.8.15. 非特異射影的代数多様体 X に対し，$\dim A = q(X)$ となるアーベル多様体 A と射 $f\colon X \to A$ で次の普遍性を満たすものが一意的に存在する：

普遍性 アーベル多様体への射 $g\colon X \to B$ に対し，準同形と平行移動の合成 $h\colon A \to B$ が存在し，$g = h \circ f$ となる．

定義 5.8.16. 定理の射 $f\colon X \to A$ を X の**アルバネーゼ射**と呼び，A を**アルバネーゼ多様体**と呼ぶ．

定理 5.8.17 (Kawamata [1979])**.** $\kappa(X) = 0$ のとき，X のアルバネーゼ射はファイバー空間である（全射でファイバーが連結）：これをアルバネーゼ・ファイバー空間と呼ぶ．

この定理から X が $\kappa = 0$，$q \neq 0$ を満たす場合は，アルバネーゼ・ファイバー空間によりアーベル多様体とより低い次元の代数多様体，つまり一般ファイバー F に分解される．さらに，命題 5.8.2 と予想 5.8.3 によれば $\kappa(F) = 0$ である．従って，$\kappa = 0$ の代数多様体はアーベル多様体とカラビ・ヤウ型多様体（$\kappa = q = 0$）のものに分解されると期待される．

定理 5.8.18 (アーベル多様体の双有理幾何的特徴付け Kawamata [1979])**.** $\kappa(X) = 0$ ならば $q(X) \leq \dim(X)$ であり，等式が成り立つことの必要十分条件は X がアーベル多様体に双有理同値なことである．

5.9　一般型多様体

一般型代数多様体は複雑な形をしており，対称性が低い．厳密には次の結果がある．

定理 5.9.1. X を一般型代数多様体とする．このとき，X には高々有限個の自己双有理写像しか無い：$\mathrm{Bir}(X)$ は有限群である．

証明. 自然数 m で

$$\phi_{|mK_X|}\colon X \dashrightarrow W := \mathrm{Im}(\phi_{|mK_X|}) \subset \mathbb{P}^n$$

が双有理であるようなものを取る．ここで $n = P_m(X) - 1$．X の双有理写像は $\mathbb{P}^n$ の同型を誘導する．群の準同型

$$\mathrm{Bir}(X) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = PGL_n(K)$$

を得る．この像は $\{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) \mid \alpha(W) = W\}$ である．これは $PGL_n(K)$ の閉部分群多様体である．特に $\mathrm{Bir}(X)$ はアフィン代数群の構造を持つ.（PGL じゃなくて GL の方が良い？）Bir が正の次元を持つと $\mathbb{G}_m$ または $\mathbb{G}_a$ を含み，W が線織多様体である事が従う．しかし，$\kappa \geq 0$ だと線織にはなり得ない.（小平次元の二つの基本性質から単線織多様体は負の小平次元を持つ.）従って $\mathrm{Bir}(X)$ は零次元の代数多様体で有り，有限群となる．　□

注意 5.9.2. 一般型代数多様体と対極にある射影空間 $\mathbb{P}^n$ については，同型射の成す群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ は射影一般線形群 $PGL_n(K)$ になる．また，自己双有理写像のなす群はクレモナ群と呼ばれる．$n = 2$ のとき，クレモナ群は 1 次変換と 2 次変換で生成されるが，$n \geq 3$ の場合は群の構造がまだあまりされていない．

定理 5.9.3 (小林・落合)**.** K の標数を 0 とする．W を代数多様体，X を一般型代数多様体とする．このとき，支配的有理写像 $W \dashrightarrow X$ は高々有限個しか無い．

X が 1 次元の場合は de Franchis の定理である．また，数体上の有理点に関するボンビエリ・ラング予想の類似でもある．

予想 5.9.4 (ボンビエリ・ラング)**.** X が数体 K 上定義された一般型代数多様体とする．このとき，$X(K)$ はザリスキ稠密では無い．

第6章　有理点の高さ

6.1　有理数体の場合

考える基礎体 K（仮定により代数的閉体である）の標数を 0 とする．つまり，有理数体 $\mathbb{Q}$ を含んでいるとする．

定義 6.1.1. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の有理点 $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ の斉次座標 $(x_0 : \cdots : x_n)$ を $x_i \in \mathbb{Z}$ で $\gcd(x_0, \ldots, x_n) = 1$ となるように選べる．このような選び方は ± 1 倍を除き一意である．このとき，x の**高さ**を

$$H(x) := \max_i \{|x_i|\}$$

と定義する．

注意 6.1.2. 上に定義した高さは**乗法的高さ**とも呼ばれる．それに対し，

$$h(x) := \log H(x)$$

を**対数的**または**加法的高さ**と呼ぶ．対数的高さの方を単に高さと呼ぶことも多い．対数的高さは下で見るように，交点数の類似である．

一般の代数体に一般化するために，高さを p 進絶対値を用いて定式化する．

定義 6.1.3. 素数 p と有理数 $a \neq 0$ に対し，

$$a = p^n \times \frac{b}{c} \quad (n, b, c \in \mathbb{Z},\ p \nmid b,\ p \nmid c)$$

と表せるとき a の p **進絶対値**を

$$|a|_p := p^{-n}$$

と定義する．また $|\cdot|_\infty$ は通常の絶対値を表す．

命題 6.1.4 (積公式)**.** 有理数 $a \neq 0$ に対して

$$\prod_v |a|_v = 1$$

が成り立つ．ここで，v は $\{$ 素数 $\} \cup \{\infty\}$ を走る．

補題 6.1.5. 任意の $x_i \in \mathbb{Q}$ となる任意の斉次座標 $x = (x_0 : \cdots : x_n)$ に対し

$$H(x) = \prod_v \max_i \{|x_i|_v\}$$

が成り立つ．

証明. 積公式から右辺は斉次座標の取り方に依存しないことが分かる．そこで，$x_i \in \mathbb{Z}$ かつ $\gcd(x_1, \ldots, x_n) = 1$ の場合に等式を示せば良い．$x_i \in \mathbb{Z}$ より各素数 p に対し $|x_i|_p \leq 1$ である．さらに $\gcd(x_1, \ldots, x_n) = 1$ より，ある i について $|x_i|_p = 1$ となる．従って

$$\max_i \{|x_i|_p\} = 1$$

となり，

$$\prod_v \max_i\{|x_i|_v\} = \max_i\{|x_i|_\infty\}$$

となる．これは上述の高さの定義に他ならない． □

定義より明らかだが，次の事実が重要である．

事実 6.1.6. 各 $B \in \mathbb{R}$ に対し，$H(x) \leq B$ となる有理点 x は有限個しかない．

6.2　一般の代数体の場合

定義 6.2.1. 体 k 上の**絶対値**とは写像 $|\cdot|\colon k \to \mathbb{R}$ で次の条件を満たすものである：$x, y \in k$ に対し，

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$；
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$；
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$；

最後の条件は**三角不等式**と呼ばれる．より強い不等式

- $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$

を満たす絶対値を**非アルキメデス的絶対値**と呼び，そうでないものを**アルキメデス的絶対値**と呼ぶ．全ての $x \in k^*$ について $|x| = 1$ となるものを自明な絶対値という．今後，絶対値は非自明なものを意味するものとする．

絶対値が与えられると体 k に距離 $d(x, y) := |x - y|$ が定まり，それにより位相が定まる．また，コーシー列を用いて，k の完備化 $\hat{k}$ が定義される．絶対値 $|\cdot|$ は $\hat{k}$ に自然に拡張する．

定義 6.2.2. k 上の二つの絶対値 $|\cdot|, |\cdot|'$ が**同値**であるとは次の同値な条件を満たすことである．

1. 二つの絶対値は同じ位相を定める．
2. ある正の実数 s に対し，$|\cdot|^s = |\cdot|'$ となる．

絶対値の同値類を k の**素点**と呼ぶ．非アルキメデス的絶対値の同値類を**有限素点**，アルキメデス的絶対値の同値類を**無限素点**と呼ぶ．

定義 6.2.3. 代数体 $k/\mathbb{Q}$ に対し，M_k を素点の集合とする．各素点 v に対し k_v で対応する完備化（局所体）を表す．各素点 $v \in M_k$ に対し，v を代表する k の絶対値 $|\cdot|'_v$ とその k_v への拡張をある $p \in M_\mathbb{Q}$ に対する $\mathbb{Q}_p$ 上のノルム $|\cdot|_p$ の k_v への一意的な拡張とする．このような p は唯一つ存在する．また，v を代表するノルムをあと 2 つ次のように定義する：

$$|x|_v := |N_{k_v/\mathbb{Q}_p}(x)|_p = \left(|x|'_v\right)^{[k_v:\mathbb{Q}_p]},$$
$$\|x\|_v := |x|_v^{1/[K:\mathbb{Q}]}.$$

主張 6.2.4. v が複素素点 $k_v = \mathbb{C}$ となる場合，$|\cdot|_v$ は $\mathbb{C}$ の通常の絶対値の 2 乗であり，これは三角不等式を満たさないので絶対値ではない．このため，ノルムと呼んでいる．

補題 6.2.5 (積公式)**.** $x \in k$ に対し

$$\prod_{v \in M_k} |x|_v = 1, \quad \prod_{v \in M_k} \|x\|_v = 1$$

が成り立つ．

証明. 最初の等式については,

$$\begin{aligned}\prod_{v\in M_k}|x|_v &= \prod_{p\in M_{\mathbb{Q}}}\prod_{v|p}|x|_v\\ &= \prod_{p\in M_{\mathbb{Q}}}\prod_{v|p}|N_{k_v/\mathbb{Q}_p}(x)|_p\\ &= \prod_p |N_{k/\mathbb{Q}}(x)|_p\end{aligned}$$

となり，これは有理数に対する積公式から 1 に等しい．二つ目の等式は，これから直ちに従う． □

定義 6.2.6. $x\in\mathbb{P}^n(k)$ の斉次座標 $(x_0:\cdots:x_n)$, $x_i\in k$ が与えられたとき，x の**相対高さ**を

$$H_k(x) := \prod_{v\in M_k}\max_i\{|x|_v\}$$

と定義し，**絶対高さ**を

$$H_{\mathrm{abs}}(x) := H_k(x)^{1/[k:\mathbb{Q}]} = \prod_{v\in M_k}\max_i\{\|x\|_v\}$$

と定義する．

注意 6.2.7. 代数体とは限らない体 k についても，絶対値の集合で積公式を満たし，k^* の各元に対し，ほとんどのノルムの値が 1 であるようなものを取れば，同様に高さを定義できる．例として，体 K 上の非特偏極代数多様体 (X,A) を考える.（X は非特異射影代数多様体，A は X の豊富因子.）関数体 $k=K(X)$ を考え，各素因子 $D\subset X$ に対しノルム $|\cdot|_D$ を

$$|f|_D := e^{-\deg D\cdot \mathrm{ord}_D f}$$

により定義する．ただし，$\deg D := \sharp D\cdot A^{\dim X-1}$ である．$f\in k^*$ に対し

$$0=\deg\mathrm{div}(f)=\sum_D \deg D\cdot \mathrm{ord}_D f$$

が成り立つので，積公式

$$\prod_D |f|_D = 1$$

が成り立つ．従って，$f=(f_0:f_1:\cdots:f_n)\in\mathbb{P}^n_k(k)$ に対し,

$$H(x) := \prod_D \max_i(|f_i|_D)$$

により**高さ**が定義される．

対数的高さ $h(x):=\log H(x)$ は以下のように交点数と解釈できる．点 f は有理写像

$$\begin{aligned}f: X &\dashrightarrow \mathbb{P}^n_K\\ p &\mapsto (f_0(p):\cdots:f_n(p))\end{aligned}$$

と対応する．この有理写像の不確定点集合は余次元 2 以上を持つので，超平面 $L\subset\mathbb{P}^n_K$ の引き戻し f^*L が自然に定まる．このとき,

$$h(f)=\deg f^*L = \sharp f^*L\cdot A^{\dim X-1}$$

となる．これを確かめるため f の像は $V(x_0)$ に含まれないと仮定し，f_i を $f^*(x_i/x_0)$ で置き換えても良い．このとき，

$$\begin{aligned} h(f) &= -\sum_D \left(\min_i \operatorname{ord}_D(f_i)\right) \deg D \\ &= \sum_D \left(\operatorname{ord}_D(f^*x_0) - \min_i \operatorname{ord}_D(f^*x_i)\right) \deg D \end{aligned}$$

となる．f^*x_i は $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ の切断である．f^*x_i は $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ を生成することから，$\min_i \operatorname{ord}_D(f^*x_i) = 0$ となり，

$$h(f) = \sum_D \operatorname{ord}_D(f^*x_0) \cdot \deg D = \deg(\operatorname{div}(f^*x_0)) = \deg f^*L$$

と期待通りの式を得る．特に X が代数曲線，つまり 1 次元のときは，豊富因子 A の取り方に関わらず，

$$h(f) = \sharp X \cdot L = \deg f^*L$$

となり，十分一般の L を選ぶと $\operatorname{Supp}(f^*L)$ の点の個数に等しくなる．

補題 6.2.8. 代数体の拡大 l/k と点 $x \in \mathbb{P}^n(k) \subset \mathbb{P}^n(l)$ に対し，

$$H_k(x)^{[l:k]} = H_l(x)$$

が成り立つ．

証明. 各 $p \in M_{\mathbb{Q}}$ に対し，

$$\prod_{w \in M_l : w|p} \|x\|_w = |N_{l/\mathbb{Q}}(x)|_p = |N_{k/\mathbb{Q}}(x)|_p^{[l:k]} = \prod_{v \in M_k : v|p} \|x\|_v$$

が成り立つ．これから，補題が従う． □

この補題から直ちに次の系を得る．

系 6.2.9. 点 $x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ の絶対高さは，$x \in \mathbb{P}^n(k)$ となる代数体 k の取り方によらない．

定義. 点 $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ の**定義体**を $\mathbb{Q}(x) := \mathbb{Q}(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$ と定義する．

定理 6.2.10 (Northcott の定理)**.** 各 B, D に対し $\{x \in \mathbb{P}^n(k) \mid H_{\mathrm{abs}}(x) \leq B,\ [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \leq D\}$ は有限集合である．

証明. 概要を述べる．アフィン空間の点 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ の絶対高さ

$$H_{\mathrm{abs}}(x) := \prod_{v \in M_k} \max\{1, \|x_1\|_v, \ldots, \|x_n\|_v\}$$

が B 以下なら，各成分 $x_i \in \mathbb{A}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ の絶対高さも B 以下である．従って，1 次元の場合に帰着される．次数 d 以下の代数的数 α に対し，(次数 d 以下でモニックな）最小多項式 $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ を考える．f の各係数は α の共役の対称式である．共役元は同じ高さを持つことと，$\alpha\beta$ や $\alpha + \beta$ の高さは α と β の高さから決まる値で抑えられることから，f の各係数の高さは押さえられる．高さがある値以下の有理数は有限個しかないので定理が従う． □

上の証明概略で出てきた概念を少し補足する．

定義 6.2.11. $\alpha \in k \subset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ の相対的高さ，絶対的高さをそれぞれ $(\alpha : 1) \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ のそれとして定義する．つまり，

$$H_k(\alpha) = H_k(\alpha : 1) = \prod_{v \in M_k} \max\{1, |\alpha|_v\},$$
$$H_{\mathrm{abs}}(\alpha) = H_{\mathrm{abs}}(\alpha : 1) = \prod_{v \in M_k} \max\{1, \|\alpha\|_v\}$$

とする．

補題 6.2.12. $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ と $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ とし，H で絶対的高さか，$\alpha, \beta \in k$ となる k に対する相対的高さ H_k のどちらかを表す．次が成り立つ．

1. $H(\alpha\beta) \leq H(\alpha)H(\beta)$.

2. $H(\alpha + \beta) \leq 2H(\alpha)H(\beta)$.

3. $H(\sigma(\alpha)) = H(\alpha)$.

4. $H(1/\alpha) = H(\alpha)$.

証明. 絶対的高さを考えるが，相対的高さについても同様である．

1. $\alpha, \beta \in k$ となる数体 k を取ると

$$\begin{aligned} H(\alpha\beta) &= \prod_{v \in M_k} \max\{1, \|\alpha\beta\|_v\} \\ &\leq \left(\prod_v \max\{1, \|\alpha\|_v\}\right)\left(\prod_v \max\{1, \|\beta\|_v\}\right) \\ &= H(\alpha)H(\beta) \end{aligned}$$

となり主張が従う．

2. 同様に k を取り，有限素点 $v \in M_k$ については，

$$\max\{1, \|\alpha + \beta\|_v\} \leq \max\{1, \|\alpha\|_v, \|\beta\|_v\} \leq \max\{1, \|\alpha\|_v\} \cdot \max\{1, \|\beta\|_v\}$$

が成り立つ．無限素点 v に対しては，

$$\max\{1, \|\alpha + \beta\|_v\} \leq \max\{1, \|2\alpha\|_v, \|2\beta\|_v\} \leq \|2\|_v \max\{1, \|\alpha\|_v\} \cdot \max\{1, \|\beta\|_v\}$$

が成り立つ．M_k 上の積を取り，

$$H(\alpha + \beta) \leq \left(\prod_{v:\text{無限素点}} \|2\|_v\right) H(\alpha) \cdot H(\beta) = 2H(\alpha)H(\beta)$$

が成り立つ．

3. 簡単に示せる．

4.

$$\frac{\max\{1, \|\alpha\|_v\}}{\max\{1, \|1/\alpha\|_v\}} = \|\alpha\|_v$$

が成り立つ．従って，積公式より

$$H(\alpha)H(1/\alpha)^{-1} = \prod_v \|\alpha\|_v = 1$$

となり，主張が従う．

□

6.3　因子類に付随する高さ関数

定義 6.3.1. 集合 S 上の実数値関数 f, g が**同値**であるとは，正の定数 C_1, C_2 が存在して

$$C_1 g(s) \leq f(s) \leq C_2 g(s) \quad (\forall s \in S)$$

が成り立つことをいう．このとき，$f \sim g$ と記す．f, g が**準同値**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在し，

$$C_1 g(s)^{1-\epsilon} \leq f(s) \leq C_2 g(s)^{1-\epsilon}$$

が成り立つことを言う．このとき，$f \approx g$ と記す．

この章では，因子の線形同値類に対し，高さ関数が関数の同値類として定まり，因子の数値的同値類に対しては，関数の準同値類として定まることを示していく．

補題 6.3.2. $\pi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された線形有理写像とする．つまり，$\overline{\mathbb{Q}}$ 成分の行列 $(a_{ij})_{0 \leq i \leq m,\, 0 \leq j \leq n} \neq 0$ が存在して

$$\pi((x_0 : \cdots : x_n)) = (\sum_{j=0}^{n} a_{1j} x_j : \cdots : \sum_{j=0}^{n} a_{mj} x_j)$$

となる．このとき，π のみに依存する数 $C > 0$ が存在して任意の $x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathrm{dom}(\pi)$ に対し，

$$H_{\mathrm{abs}}(\pi(x)) \leq C \cdot H_{\mathrm{abs}}(x)$$

が成り立つ．π が数体 k 上定義されているとき，相対的高さ H_k についても同様の主張が成り立つ．

証明. $x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ を固定し，k を十分大きな数体とする．有限素点 $v \in M_k$ に対し $c_v := 1$，無限素点 $v \in M_k$ について $c_v := \|n+1\|_v$ とおくと，

$$\max_i \left\{ \left\| \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j \right\|_v \right\} \leq c_v \cdot \max_j \{\|x_j\|_v\} \cdot \max_{i,j} \{\|a_{ij}\|_v\}$$

が成り立つ．そこで，

$$C := \prod_v \|c_v\|_v \cdot \max_{i,j} \{\|a_{ij}\|_v\} = (n+1) \prod_v \max_{i,j} \{\|a_{ij}\|_v\}$$

とおけば良い．ほとんど全ての v について $\max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_v\} = 1$ なのでこれは有限積である．　□

系 6.3.3. 射影空間の k 上の同型 $\alpha : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ に対し，$\mathbb{P}^n(k)$ 上の関数の同値

$$H_k \sim H_k \circ \alpha$$

が成り立つ．また $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の関数の同値

$$H_{\mathrm{abs}} \sim H_{\mathrm{abs}} \circ \alpha$$

も成り立つ．

定義 6.3.4. k 上定義された射影的代数多様体 X と，その上の非常に豊富な因子 A に対し，**相対的高さ関数** $H_{A,k} \colon X(k) \to \mathbb{R}$ を

$$H_{A,k} := H_k \circ \phi_{|A|}$$

により定義する．$\phi_{|A|} \colon X \to \mathbb{P}^n$ は A の完備線形系に付随する射である．**絶対的高さ関数** $H_{A,\mathrm{abs}} \colon X(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ も同様に定義する．

$\mathbb{P}^n$ の座標，つまり $\Gamma(A)$ の基底の取り方により，高さ関数は変わるが，同値類は変わらない．高さ関数の同値類は，非常に豊富な因子 A の線形同値類から一意的に定まる．

補題 6.3.5. セグレ埋め込み

$$\sigma : \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{m-1} \to \mathbb{P}^{nm-1},\ ((x_i),(y_j)) \mapsto (x_i y_j)$$

と $(x,y) \in \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{m-1}$ に対し

$$H(x) \cdot H(y) = H(\sigma((x,y)))$$

が成り立つ．H は相対的高さか絶対的高さを表す．

証明.

$$\begin{aligned} H(\sigma((x,y))) &= \prod_v \max_{i,j}\{\|x_i y_j\|\} \\ &= \prod_v \max_i\{\|x_i\|\} \cdot \max_j\{\|y_j\|\} \\ &= \prod_v \max_i\{\|x_i\|\} \cdot \prod_v \max_j\{\|y_j\|\} \\ &= H(x) \cdot H(y). \end{aligned}$$

□

系 6.3.6. 非常に豊富な因子類 α, α' に対し

$$H_\alpha \cdot H_{\alpha'} \sim H_{\alpha+\alpha'}$$

が成り立つ事が分かる．

証明. 非常に豊富な因子 A, A' に対し，

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(\phi_{|A|},\phi_{|A'|})}"] \arrow[dr, "\phi_{|A+A'|}"'] & \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n'-1} \arrow[d, "\text{セグレ埋め込み}"] \\ & \mathbb{P}^{nn'-1} \end{tikzcd}$$

という可換図式が存在する．系は上の補題から従う．□

この系より，以下のように高さ関数を（非常に豊富とは限らない）因子類にまで拡張できる．

定義 6.3.7. 射影的代数多様体 X のカルティエ因子の線形同値類 α に対し，その（相対的または絶対的）高さ関数を，$\alpha = [A - B]$ となる非常に豊富な因子 A, B に対し

$$H_\alpha := H_A \cdot H_B^{-1}$$

により定義する．$\mathbb{Q}$ カルティエ因子の $\mathbb{Q}$ 線形同値類にも高さ関数の定義を自然に拡張する．

この定義により，カルティエ因子類群 $\mathrm{Cl}_c(X)$ に $\mathbb{Q}$ をテンソルしたものから，関数の同値類集合に準同形を得る：

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_c(X)_{\mathbb{Q}} &\to \{\text{ 関数 } X(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}\}/\sim \\ \alpha &\mapsto H_{\alpha,\mathrm{abs}} \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

相対的高さについても同様である．

補題 6.3.8. 数値的同値な $\alpha, \beta \in \mathrm{Cl}_c(X)$ に対し，

$$H_\alpha \approx H_\beta$$

が成り立つ．

証明．α, β を豊富な因子類と仮定して良い．クライマンの判定法（命題 3.3.5）より，任意の有理数 $\epsilon > 0$ に対し，

$$\delta_\epsilon := (1+\epsilon)\alpha - \beta$$

は豊富なので，

$$H_\alpha^{1+\epsilon} H_\beta^{-1} \sim H_{\delta_\epsilon} \geq 1$$

と仮定して良い．($\mathbb{P}^n$ の点の高さは定義から ≥ 1 であることを思い出そう.）つまり，

$$H_\beta \leq H_\alpha^{1+\epsilon}$$

となる．$H_\alpha^{1-\epsilon} \leq H_\beta$ も同様に示され補題が成り立つ．□

これにより，(6.3.1) は準同形

$$N^1(X)_\mathbb{R} \to \{\text{ 関数 } X(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}\}/\approx \tag{6.3.2}$$

を導く．相対的高さについても同様である．

6.4　バティレフ・マニン予想

基礎体を $K = \overline{\mathbb{Q}}$ とし，X を代数体 $k \subset K$ 上定義された非特異射影代数多様体とする．$N^1(X)$ を因子の数値的同値類の成す自由アーベル群とし，$N^1(X)_\mathbb{R} = N^1(X) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ とする．

$$\operatorname{rank} N^1(X) = \dim_\mathbb{R} N^1(X)_\mathbb{R} = \rho(X)$$

となる．

定義 6.4.1. X と豊富因子 A の対 (X, A) に対し，**小平エネルギー** $\kappa\mathrm{e} = \kappa\mathrm{e}(X, A) \in \mathbb{R}$ を

$$[K_X] - \kappa\mathrm{e}[A] = \partial\overline{\mathrm{Eff}}(X)$$

により定める．

$[A]$ が擬有効錐 $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ の内点である事から，$\kappa\mathrm{e}$ が一意的に定まる．定義より

1. K_X は巨大 $\Leftrightarrow \kappa\mathrm{e} > 0$；
2. K_X は擬有効だが巨大ではない $\Leftrightarrow \kappa\mathrm{e} = 0$；
3. K_X は擬有効ではない $\Leftrightarrow \kappa\mathrm{e} < 0$；

が成り立つ．これらは，$[K_X]$ が $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ の内部，境界，外部に属する場合にそれぞれ対応する．また予想として，小平次元 $\kappa = \kappa(X)$ が $\kappa = -\infty$，$0 \leq \kappa \leq \dim X - 1$，$\kappa = \dim X$ となる 3 つの場合に対応することが期待されている．

定義 6.4.2. 実数 B とザリスキ開集合 $U \subset X$ に対し，

$$N_U(B) := \sharp\{x \in U(K) \mid H_A(x) \leq B\}$$

とおく．H_A は相対的高さとする．

予想 6.4.3 (バティレフ・マニン予想). *1.* 任意の $\epsilon > 0$ と十分小さなザリスキ開集合 $U \subset X$ に対し，ある定数 $C > 0$ が存在し

$$N_U(B) \leq CB^{-\kappa \mathrm{e}+\epsilon}$$

が成り立つ.

2. $\kappa\mathrm{e} < 0$ のとき，$P := [K_X] - \kappa\mathrm{e}[A]$ の近傍で $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ は多面体的で，P を含む最小の $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ の面の次元を n とする．このとき，十分大きな代数体 K と十分小さなザリスキ開集合 $U \subset X$ に対し，ある定数 $C > 0$ が存在し

$$N_U(B) \sim CB^{-\kappa\mathrm{e}}(\log B)^{\rho-n-1}$$

が成り立つ.

例 6.4.4. $\kappa\mathrm{e}(X) > 0$，つまり X が一般型の場合を考える．このとき，バティレフ・マニン予想は十分小さなザリスキ開集合 U は K 点を持たない，つまり X の K 点集合 $X(K)$ はザリスキ稠密でないことを意味する．これはボンビエリ・ラング予想に他ならない.

例 6.4.5. X がファノ多様体，つまり $-K_X$ が豊富のときを考える．このとき，小平消滅定理から

$$h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \Omega_X) = 0$$

となる．従って，

$$\mathrm{Cl}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = N^1(X)_{\mathbb{R}}$$

が成り立ち，$N^1(X)_{\mathbb{R}}$ の元は高さ関数を同値を除いて定めることに注意しておく.

$A = -K_X$ とすると，$\kappa\mathrm{e} = -1$ となる.（この場合，擬有効錐は多面的？）$[K_X] - \kappa\mathrm{e}[A]$ は $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ の原点 o であり，これを含む最小の面は $\{o\}$ である．従って，バティレフ・マニン予想はピカール数 ρ により，

$$N_U(B) \sim CB(\log B)^{\rho-1}$$

と表される．これはマニン予想である.

例 6.4.6 (シャニュエル). 代数体 k と $n-1$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ の高さ関数 $H = H_H$（超平面 H に付随する）に関し，次が成り立つ.

$$N_{\mathbb{P}^{n-1}(k)}(B) \sim \frac{hR}{\zeta_k(n)w}\left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}}\right)^n n^{r_1+r_2-1}B^n$$

ここで，右辺の記号の意味は以下の通り：

- h は k の類数
- R は k のレギュレーター
- ζ_k はディリクレ・ゼータ関数
- w は k に含まれる 1 の巾根の数
- r_1, r_2 は k のそれぞれ実，複素素点の数
- d は k の（絶対）判別式の絶対値

豊富因子として反標準因子 $-K_X = nH$ を選び，付随する高さ関数として $H_{-K_X} = H^n$ を選ぶと，

$$N_{\mathbb{P}^{n-1}(k)}(B) \sim \frac{hR}{\zeta_k(n)w}\left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\sqrt{d}}\right)^n n^{r_1+r_2-1}B$$

となる.

例 6.4.7. バティレフ・マニン予想は，$\kappa\mathrm{e} = 0$ の場合，そうでない場合ほど精密な結果を導かないが，少なくとも $N_U(B)$ の増大度がファノの場合に比べ小さいことは言える．

例 6.4.8 (ネロン)**.** X がアーベル多様体のとき，モーデル・ヴェイユの定理（定理 8.3.1）から，$X(k)$ は有限生成アーベル群になる．その階数を r とすると，ある定数 $C > 0$ に対し

$$N_X(B) \sim C(\log B)^{r/2}$$

となる．

第7章　特異点

7.1　背景

一般的に，非特異代数多様体の方が特異点を持つ代数多様体より理解しやすい．その理由のひとつは，局所座標による微分を考えることができることであり，幾何学的に表現すると接束やその双対，余接束がベクトル束になることであると言える．

標数 0 では，広中の特異点解消定理により，特異点を持つ代数多様体は，非特異代数多様体に変換することが出来る．従って，双有理幾何では，非特異代数多様体のみを考えれば良いことになる．

しかし，近年の極小モデル理論（森理論）の発展では，特異点を持つ代数多様体を考えることが必要不可欠であった．

7.1.1　曲面の極小モデル

X を非特異射影代数曲面とする．つまり，2 次元の非特異射影代数多様体である．

定義 7.1.1. X 上の -1 **曲線**とは，X の 1 次元閉部分多様体 C で $\mathbb{P}^1$ と同型で有り，自己交点数が $C^2 = -1$ となるものである．

-1 曲線はつぶして，新しい非特異射影代数曲面を得る（カステルヌオヴォの判定法）．正確には射影双有理射 $f\colon X \to Y$ で，

- Y は非特異,
- $f(C)$ は 1 点,
- $X \setminus C \to Y \setminus f(C)$ は同型射

を満たすものが一意的に存在する．

定義 7.1.2. X が**相対的極小モデル**であるとは，任意の射影的双有理射 $f\colon X \to Y$ で Y が非特異なものは同型射になることを言う．

X が相対的極小モデルであることと，X が -1 曲線を含むことは同値である．-1 曲線を有限回潰すことで相対的極小モデルに到達する．

7.1.2　高次元の極小モデル

高次元の極小モデルの視点から曲面の極小モデルを解釈するために，次の式を考える．代数曲面 X 上の有理曲線 $C \cong \mathbb{P}^1$ に対し，

$$\sharp(K_X + C) \cdot C = \deg K_C = -2$$

が成り立つ．従って，

$$\sharp K_X \cdot C = -2 - C^2$$

となる．-1 曲線は K_X との交わりが負となる曲線である．

高次元では，K_X と負で交わる有理曲線をどんどん潰していき（絶対的）極小モデル，もしくは森ファイバー空間というものを得る，というのが極小モデル理論の概略である．しかし，非特異代数多様体から始めても，この有理曲線を潰す操作により，特異点を持つ代数多様体が現れてしまう.（3 次元非特異代数多様体から，この操作で現れる特異点は Mori [1982] の系 3.2 で分類されている.）ある種のマイルドな特異点を認めることで，この操作を繰り返すことが出来るのである．

注意 7.1.3. 曲面の場合で $C^2 \geq 0$ の有理曲線 $C \cong \mathbb{P}^1$ についても，$\sharp K_X \cdot C < 0$ となる．このような C を潰すと，他の無限個の有理曲線も一斉に潰すことに成り，より低い次元の代数多様体 B への射 $X \to B$ を得ることになる．$C^2 = 0$ の場合は，$\dim B = 1$ となり，X は B 上の $\mathbb{P}^1$ 束となる．$C^2 > 0$ の場合は，$\dim B = 0$ となり，この場合は $X \cong \mathbb{P}^2$ となる．詳細は Matsuki [2002] の 1.4 章を参照のこと．

7.2　正規特異点

極小モデル理論では特異点を許すことが重要であると述べたが，どんな特異点でも良いわけではなく，ある種の良い条件を満たすマイルドな特異点のみを考える必要がある．極小モデル理論が成立するための，最小の特異点のクラスは，**正規**，$\mathbb{Q}$ **分解的**，そして**端末という** *3* **条件を満たす特異点である．これを順に解説する．**

整域 R を考え，その分数体を L とする．

定義 7.2.1. $x \in L$ が R 上で**整**であるとは，ある $r_i \in R$ について

$$x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots r_1 x + r_0 = 0$$

が成り立つことを言う．

つまり，x が整であるとは，R 係数モニック多項式の根となることである．さらに，x で生成される L の部分 R 代数 $R[x]$ が R 加群として有限生成である事とも同値である．

定義 7.2.2. $\overline{R} := \{x \in L \mid x$ は R 上整 $\}$ は L の部分環となるが，これを R の（L における）**整閉包**と呼ぶ．$R = \overline{R}$ のとき，R は**整閉**または**正規**であるという．

$\overline{R}$ が R 代数として（もしくは R 加群として，といっても同値だが）有限生成であるとは限らない．しかし，アフィン代数多様体の座標環や，その局所化のような，代数幾何で通常扱う環 R については，$\overline{R}$ は R 上有限生成となる．

定義 7.2.3. 座標環 R を持つ既約アフィン代数多様体 X について，座標環 $\overline{R}$ を持つ代数多様体 X^ν や自然な射 $X^\nu \to X$ のことを X の**正規化**と呼ぶ．一般の代数多様体 X にたいしても，アフィン開集合の正規化を貼り合わせて，正規化 $X^\nu \to X$ を構成できる．

注意 7.2.4. 正規化 $f\colon X^\nu \to X$ は有限双有理射となる．さらに，有限双有理射の中で普遍的なものとして特徴付けられる：$g\colon Y \to X$ を有限双有理射とすると，一意的に（必然的に有限双有理）射 $h\colon X^\nu \to Y$ が存在し，$f = g \circ h$ となる．

定義 7.2.5. 正規化 $X^\nu \to X$ が同型射となるとき，代数多様体 X は**正規**である，もしくは**（高々）正規特異点を持つ**という．

特異点という名前が示唆するように，代数多様体 X は非特異なら正規である．

正規特異点の特に基本的な性質は次のものである．

定理 7.2.6. X の特異点集合を X_{sing} とする.（系 *1.12.3* より，これは X の閉集合である.）X が正規のとき，X_{sing} の余次元は 2 以上である.（このことを，X は余次元 1 で非特異ということがある.）

証明. 概略のみ述べる．X をアフィン代数多様体と仮定しても一般性を失わない．余次元 1 の既約閉集合 $Y \subset X$ に対し，X の座標環 A を Y に対応する素イデアル $\mathfrak{p}$ で局所化して得られる局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ を考える．X が正規であることから，A も正規であり，$A_{\mathfrak{p}}$ も正規である．$A_{\mathfrak{p}}$ は 1 次元なので，正規であれば正則局所環になる．このことは，X は Y の一般の点の周りで非特異であることを意味する． □

系 7.2.7. X を *1* 次元代数多様体とする．X が正規であることと，非特異であることは同値である．

証明. 非特異なら正規であることは上に述べた．上の定理から，X が正規なら X_{sing} の余次元は 2 以上だが，X は 1 次元なので，これは $X_{\mathrm{sing}} = \emptyset$ を意味する．つまり，X は非特異である． □

X が正規であれば，X の素因子 D と有理関数 $f \in K(X)^*$ に対し，f の D に沿った位数 $\mathrm{ord}_D(f) \in \mathbb{Z}$ が定まる．$X_{\mathrm{sm}} := X \setminus X_{\mathrm{sing}}$ を非特異点の成す開部分多様体とする．X が余次元 1 で非特異である事から，

$$\mathrm{ord}_D(f) := \mathrm{ord}_{D \cap X_{\mathrm{sm}}}(f)$$

と定義しても良い．スキーム論的に言うと，D の生成点 η での局所環 $\mathcal{O}_{X,\eta}$ が離散付値環になるので，ord_D をそれに付随する付値と定めても良い．これにより，$f \in K(X)^*$ に付随する主因子

$$\mathrm{div}(f) := \sum_D \mathrm{ord}_D(f) \cdot D$$

が定義できる．

上の系より，次の結果が直ちに従う．

系 7.2.8. X を正規代数多様体とする．X の因子と X_{sm} の因子には次の自然な *1* 対 *1* 対応がある．

$$\begin{aligned} \{X \text{ の因子 }\} &\leftrightarrow \{X_{\mathrm{sm}} \text{の因子 }\} \\ \sum_i a_i D_i &\mapsto \sum_i a_i (D_i \cap X_{\mathrm{sm}}) \\ \sum_j b_j \overline{E_j} &\leftarrow\!\shortmid \sum_j b_j E_j \end{aligned}$$

ここで，D_i，E_j はそれぞれ X，X_{sm} の素因子で，$\overline{E_j}$ は X での E_j の閉包を表す．さらに，この対応により，X の主因子と X_{sm} の主因子が対応し，因子類群の自然な同型

$$\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Cl}(X_{\mathrm{sm}})$$

を得る．

定義 7.2.9. X を正規代数多様体とする．X の**標準因子（類）** K_X を X_{sm} の標準因子（類）に対応する X の因子（類）と定義する．

例 7.2.10. 尖点曲線 $X = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_K$ の座標環は

$$A = K[x, y]/\langle y^2 - x^3 \rangle \cong K[t^2, t^3] \subset K[t]$$

であり，関数体は有理関数体 $K(t)$ とみなせる．$t \in K(t)$ は

$$X^2 - t^2 \in K[t^2, t^3][X]$$

の根なので，$K[t^2, t^3]$ 上で整だが $K[t^2, t^3]$ には含まれていない．従って，X と A は正規ではない．A の整閉包 $\overline{A}$ は $K[t]$ である．

例 7.2.11. A を正規環とし，G を A の自己同型のなす群とする．このとき，不変式環

$$A^G := \{a \in A \mid \forall g \in G,\, ga = a\}$$

は正規環である．これを見るために，L を A の分数体とすると，G は L の自己同形の成す群ともみなせ，

$$A^G = A \cap L^G \tag{7.2.1}$$

が成り立つ．いま，A^G の分数体の元 f が A^G 上整であると仮定し，$f \in A^G$ を示せば良い．f は G 不変，つまり

$$f \in L^G \tag{7.2.2}$$

となる．f は A 上整な L の元でもあり，A が整閉であることから，

$$f \in A \tag{7.2.3}$$

である．ここで，(7.2.1) と (7.2.2) と (7.2.3) を合わせると，

$$f \in A^G$$

を得る．

例えば，体 K の標数が 2 でないとし，2 変数多項式環 $A = K[x, y]$ の自己同形 σ で

$$\sigma(x) = -x,\, \sigma(y) = -y$$

が生成する位数 2 の巡回群 G を考える．このとき，不変式環は

$$A^G = K[x^2, xy, y^2] = K[s, t, u]/\langle su - t^2\rangle$$

となる．これは，$X = V(su - t^2) \subset \mathbb{A}^3$ の座標環である．X は 2 次元正規代数多様体で，唯一原点に特異点を持つ．

7.3　$\mathbb{Q}$ ゴレンシュタイン特異点と $\mathbb{Q}$ 分解的特異点

定義 7.3.1. X を正規代数多様体とする．X の $\mathbb{Q}$ **因子**とは，素因子の形式的 $\mathbb{Q}$ 線形結合

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i \quad (a_i \in \mathbb{Q},\, D_i : \text{素因子})$$

の事である．これに対し，通常の因子を $\mathbb{Z}$ 因子と呼ぶことがある．$\mathbb{Q}$ 因子 D が $\mathbb{Q}$ **カルティエ**であるとは，適当な整数 $n > 0$ に対し，nD が $\mathbb{Z}$ 因子でかつカルティエ因子となることである．標準因子 K_X が $\mathbb{Q}$ カルティエであるとき，X を $\mathbb{Q}$ ゴレンシュタインだる，もしくは X は $\mathbb{Q}$ ゴレンシュタイン特異点を持つという．X の全ての $\mathbb{Q}$ 因子が $\mathbb{Q}$ カルティエであるとき，X は $\mathbb{Q}$ **分解的**である，または $\mathbb{Q}$ **分解的特異点**を持つという．

注意 7.3.2. 正規代数多様体（より一般に余次元 1 で非特異な代数多様体）では，カルティエ因子の集合を（ヴェイユ）因子の集合の部分集合とみなせることを，上の定義では暗に用いている．

注意 7.3.3. $\mathbb{Z}$ 因子が $\mathbb{Q}$ カルティエであっても，それがカルティエであるとは限らない．例 7.2.11 で見た多様体 $X = V(xy - z^2) \subset \mathbb{A}^3$ の素因子 $D = V(x, z)$ はカルティエではないが，$2D$ は x で定義されるのでカルティエである．

注意 7.3.4. $\mathbb{Q}$ 分解的という概念は考える位相に依存する微妙な物であるらしい（私はこの微妙さを余り理解していないが）．$\mathbb{Q}$ 分解的な $\mathbb{C}$ 上の代数多様体 X について，ある点 $x \in X$ の解析的近傍 U を取ると，$\mathbb{Q}$ 分解的でない解析空間になることがあるらしい．

注意 7.3.5. K_X がカルティエであるとき，X は 1 **ゴレンシュタイン**や**準ゴレンシュタイン**であるなどという．X が正規という仮定の下では，ゴレンシュタインと呼ばれる条件は「1 ゴレンシュタインかつコーエン・マコーレー」と同値である．

2.3 章と同様のことが，$\mathbb{Q}$ カルティエ因子についても成り立つ．代数多様体の射 $f\colon Y \to X$ で X が正規なものに対し，X の $\mathbb{Q}$ カルティエ因子 D の台が f の像を含まないとき，引き戻し f^*D が定義される．これは Y の $\mathbb{Q}$ カルティエ $\mathbb{Q}$ 因子である．像に関する条件が無くても，引き戻し f^*D は $\mathbb{Q}$ 線形同値（下の定義）を除き定まる．

定義 7.3.6. X の $\mathbb{Q}$ 因子 D, D' が $\mathbb{Q}$ **線形同値**とは，適当な整数 n について，nD と nD' が線形同値であることを言う．このとき，$D \sim_{\mathbb{Q}} D'$ と記す．また，$\mathbb{Q}$ 因子の**数値的同値**が，因子の場合と同様に定義される．

注意 7.3.7. $\mathbb{Q}$ カルティエ $\mathbb{Z}$ 因子の引き戻しは $\mathbb{Z}$ 因子になるとは限らない．後で定義する食い違い係数が，一般には整数にならないのはこのためである．

例 7.3.8. 非特異代数多様体 X に有限群 G が作用しているとする．作用で移り合う点を同値とする同値関係 $\sim$ による商集合，

$$X/G := X/\sim$$

には代数多様体の構造が自然に入り，写像 $\pi\colon X \to X/G$ は代数多様体の射である．局所的には，座標環 A の不変部分環 A^G を取る操作により構成される．従って，X/G は正規代数多様体である．商多様体に現れる特異点を**商特異点**と呼ぶ．商多様体は $\mathbb{Q}$ 分解的であることが，以下のようにして分かる．X/G の素因子 D の逆像 $E \subset X$ は余次元 1 の閉部分集合で G 作用で不変である．E は被約（各係数が 1）な因子とみなせる．X は非特異なのでカルティエ因子である．この $E = V(f)$ のとき，各 $g \in G$ について $E = V(gf)$ であり，$F = \prod_{g \in G} gf$ とおくと，$E = V(F)$ であり，F が定める因子は $\sharp G \cdot E$ である．F は G 不変なので，X/G 上の関数ともみなせ，それが定める因子は $\sharp G \cdot D$ となる．これは，D が $\mathbb{Q}$ カルティエであることを示している．さらに，これより任意の $\mathbb{Q}$ 因子が $\mathbb{Q}$ カルティエであることが従い，X/G は $\mathbb{Q}$ 分解的であることが分かる．

例 7.3.9. c 個の多項式で定義される代数多様体 $X = V(f_1, \ldots, f_c) \subset \mathbb{A}^n_K$ が次元 $n - c$（余次元 c）を持つとき，**完全交叉**であるという．このとき，X はゴレンシュタインとなることが知られている．従って，X が正規であれば，X は $\mathbb{Q}$ ゴレンシュタインでもある．しかし，次の例で見るように $\mathbb{Q}$ 分解的になるとは限らない．完全交叉は，特にコーエン・マコーレーであるので，セールの正規性判定法のひとつの条件 S_2 は満たされている Matsumura [1989]，183 ページ．従って，それが X が正規となるための必要十分条件は余次元 1 で非特異（条件 R_1）である事である．

例 7.3.10. $X = V(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \subset \mathbb{A}^4_K$ は**通常二重点**と呼ばれる 3 次元特異点である．これは $\mathbb{Q}$ ゴレンシュタイン（より強くゴレンシュタインでもある）だが，$\mathbb{Q}$ 分解的ではない．これは，トーリック多様体としての記述を用いると分かる．また，小特異点解消が存在することからも分かる．（**小特異点解消**とは，例外集合の余次元が 2 以上であるような特異点解消のことである．下の命題から $\mathbb{Q}$ 分解的代数多様体の特異点解消は因子的であり，小特異点解消にはなり得ない．）

命題 (Kollár [1996]，289 ページ)**.** *X を正規 $\mathbb{Q}$ 分解的代数多様体とし，$f\colon Y \to X$ を特異点解消とする．このとき，f は因子的である．つまり，例外集合の任意の既約成分は余次元 1 を持つ．*

証明. $E \subset Y$ を f の例外集合の既約成分とし $y \in Y$ をその一般の点とし，$x := f(y) \in X$ とする．このとき，$T_yY \to T_xX$ は単射ではなく，双対を取り，

$$\mathfrak{m}_x \to \mathfrak{m}_y$$

は全射ではない．$g \in \mathfrak{m}_y$ を，この像に含まれない関数とする．$g = u/v$, $u, v \in \mathcal{O}_{X,x}$ と表す．もし，x を含む素因子 $D \subset X$ に対し，

$$\mathrm{ord}_D(u) = m > 0, \mathrm{ord}_D(v) = n > 0$$

とする．X が $\mathbb{Q}$ 分解的なので，ある整数 $r > 0$ があり，$rD = \mathrm{div}(h)$ となる．そこで，

$$g^r = \frac{u^r}{v^r}$$

の分母と分子を $h^{r \cdot \min\{m,n\}}$ で割ることで，分母か分子の高々一方しか D の沿って消えないように出来る．この操作を繰り返し，ある $s > 0$ について，$U, V \in \mathcal{O}_{X,x}$ で共通の素因子で消えないものが存在し，

$$g^s = \frac{U}{V}$$

とできる．構成から $V \notin \mathfrak{m}_x$ なら $U \in \mathfrak{m}_x$ で $g \in \mathfrak{m}_s$ となってしまうが，それは g の取り方に反する．従って，$V \in \mathfrak{m}_x$ である．また，$U \notin \mathfrak{m}_x$ なら，g は y で極を持ってしまい，これも仮定に関する．したがって，$U \in \mathfrak{m}_x$ となる．

$V(U, V) \subset X$ は余次元 2 を持つ．一方，

$$V(f^*U, f^*V) = V(g^s \cdot (f^*V), f^*V) \supset V(f^*V) \ni y$$

が成り立つ．純余次元 1 の閉集合 $V(f^*V)$ は $V(U, V)$ に潰れるため，例外集合に含まれ，それが y を含む．このことは，最初に選んだ例外集合の既約成分 E の余次元が 1 である事を示している．命題が示された． □

7.4　食い違い係数

7.4.1　非特異代数多様体の場合

$f\colon Y \to X$ を正規代数多様体の固有双有理射とし、$y \in Y$、$x = f(y) \in X$ を非特異点とする。$y_1, \ldots, y_d$ と $x_1, \ldots, x_d$ をそれぞれの点の近傍での局所座標系とする。このとき、

$$f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_d)}{\partial(y_1, \ldots, y_d)} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_d$$

が成り立つ。ヤコビ行列 $\frac{\partial(x_1,\ldots,x_d)}{\partial(y_1,\ldots,y_d)}$ は y の近傍で定義された正則関数で、ちょうど f の例外集合に沿って零点を持つ。$E \subset Y$ を y を含む既約因子で、y の近傍で $y_1 = 0$ で定義されるとする。このとき、$a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が一意的に存在し

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_d)}{\partial(y_1, \ldots, y_d)} = y_1^a u \quad (\mathrm{ord}_E(u) = 0)$$

が成り立つ。

定義 7.4.1. 整数

$$a(E) = a(E, X) := a$$

を、E の（X に関する）**食い違い係数**という。

食い違い係数は非特異点 $y \in E$ の選び方に依存しない。また、$a(E) > 0$ と E が例外素因子である事は同値である。

同じ X へのもう一つの固有双有理射 $f' \colon Y' \to X$ を考える。誘導される有理写像 $(f')^{-1} \circ f \colon Y \dashrightarrow Y'$ は E の一般の点では定義される（補題 5.2.5）。

定義 7.4.2. E の像の閉包 $E' \subset Y'$ が余次元 1 を持つとき、E と E' をしばしば同一視し、X **上空の因子**（divisor over X）と呼ぶ。

既約因子は関数体の離散付値を定めるが、上の同一視は、同じ付値を定めるものを同一視するものである。つまり、上空の因子とは、上のような因子 E から定まる関数体 $K(X)$ の離散付値 ord_E のことだとみなしても良い。

食い違い係数 $a(E, X)$ は X の上空の因子 E に対して定まる概念で有り、E を含む Y の取り方には依存しない。ただし、X には依存する。

命題 7.4.3. $f \colon Y \to X$ を正規代数多様体の固有双有理射とし、X は非特異と仮定する。線形同値

$$K_Y \sim f^* K_X + \sum_E a(E, X) E$$

が成り立つ。

証明. ω を X の有理微分形式とし、$K_X = \mathrm{div}(\omega)$, $K_Y = \mathrm{div}(f^*\omega)$ として、

$$K_Y = f^* K_X + \sum_E a(E, X) E$$

を示す。上の記法を用いて、$x \in X$ の近傍で有理関数 g により、

$$\omega = g(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d)$$

がなりたつとすると、

$$K_X = \mathrm{div}(g) = \sum_D \mathrm{ord}_D(g) \cdot D$$

となる。一方、y の近傍では、

$$\begin{aligned} K_Y &= \mathrm{div}\left(f^* g \cdot \frac{\partial(x_1, \ldots, x_d)}{\partial(y_1, \ldots, y_d)} \right) \\ &= \sum_E \mathrm{ord}_E(f^* g) \cdot E + \sum_E \mathrm{ord}_E \left(\frac{\partial(x_1, \ldots, x_d)}{\partial(y_1, \ldots, y_d)} \right) \cdot E \\ &= f^* K_X + \sum_E a(E, X) \cdot E \end{aligned}$$

となり、命題が示された。 □

定義 7.4.4. 因子

$$K_f = K_{Y/X} := \sum_E a(E, X) E$$

を**相対標準因子**と呼ぶ。

7.4.2　一般の場合

正規代数多様体の固有双有理射 $f\colon Y \to X$ で、X が $\mathbb{Q}$ ゴレンシュタインであるものを考える。このとき、既約因子 $E \subset Y$ に対し、食い違い係数 $a(E, X) \in \mathbb{Q}$ が自然に定義され、

$$K_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^* K_X + \sum_E a(E, X) E$$

が成り立つ。ただし、$a(E, X)$ は非負整数とは限らず、有理数になったり、負になったりする。

定義 7.4.5. 正規 $\mathbb{Q}$ ゴレンシュタイン代数多様体 X は任意の上空の因子 E に対し、$a(E, X) > 0$（resp. ≥ 0、> -1、≥ -1）となるとき、**末端特異点**（resp. **標準特異点**、**対数的末端特異点**、**対数的標準特異点**）を持つという。

極小モデルプログラムを実行するための最小の特異点のクラスが末端特異点である。一方、極小モデルプログラムがまだ意味を持つ最大の特異点のクラスは対数的標準特異点である。例えば、次の錐定理が対数的標準特異点を持つ代数多様体に対し成り立つ。

定理 7.4.6 (錐定理 Mori [1982], Kawamata [1984], Shokurov [1985], Fujino [2014])**.** X と対数的標準特異点を持つ固有代数多様体とする。加算無限個の有理曲線 C_i で

$$0 < -\sharp K_X \cdot C_i \leq 2 \cdot \dim X$$

を満たすものが存在し、曲線の錐 $\overline{NE}(X)$ は、K_X と非負で交わる部分と、$[C_i]$ により生成される：

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_i \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i]$$

さらに、K_X と負で交わる $\overline{NE}(X)$ の面 F に対し、ファイバー空間 $\phi_F\colon X \to S$ が一意的に存在し、既約曲線 $C \subset X$ について、

$$\phi_F(C) = \textit{1}\,\text{点} \Leftrightarrow [C] \in F$$

が成り立つ。（射 ϕ_F を F の収縮という。）

第8章　アーベル多様体

8.1　基礎事項

代数群とは代数多様体 G で射

$$m : G \times G \to G,\ \iota : G \to G$$

と点 $1 \in G$ が与えられ，これらが群の公理を満たすものである．射が k 上定義され，$1 \in G(k)$ のとき，G は k **上定義されている**という．

代数群 G の任意の 2 点 $g, g' \in G$ は自己同形 $g' \circ g^{-1} \colon G \to G$ で移り合うことと，代数多様体は非特異点を含むことから，代数群は常に非特異であることが従う．

アーベル多様体とは既約 [1] で射影的な代数群のことである．

以上の仮定から，驚くべき事に，次の事実が従う．

事実 8.1.1. アーベル多様体はアーベル群である．

通常，アーベル多様体の群構造は加法的に記述する．

$K = \mathbb{C}$ の場合，アーベル多様体は $\mathbb{C}^n$ を格子 $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n}$ で割って得られるトーラスに同型となる．

A をアーベル多様体とする．各整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対し，m 倍射

$$[m] \colon A \to A,\ x \mapsto mx$$

が定義される．A が k 上定義されるとき，$[m]$ も k 上定義される．特に $[m](A(k)) \subset A(k)$ が成り立つ．射 $[m]$ の核 $\{x \in A(K) \mid mx = 0\}$ を $A[m]$ と記す．

補題 8.1.2. 整数 $m \neq 0$ が K の標数と素なとき，$\sharp A[m] = m^{2 \dim A}$.

これは，$K = \mathbb{C}$ の場合は明らかである．次元公式から $m \neq 0$ に対する m 倍射 $[m]$ は全射となる．さらに，任意の点 $x \in A$ にたいし，$x = my$ となる $y \in A$ を取ると，

$$[m]^{-1}(x) = y + A[m]$$

となる．従って，各ファイバーは同じ個数の点を含む．このことから，次が従う．

事実 8.1.3. 整数 $m \neq 0$ が K の標数と素なとき，$[m]$ は有限エタール射である．

8.2　ネロン・テイト高さ

8.3　モーデル・ヴェイユの定理

定理 8.3.1 (モーデル・ヴェイユ)**.** A を数体 k 上定義されたアーベル多様体とする．このとき，$A(k)$ は有限生成アーベル群である．

[1] 部分体 $k \subset K$ の上で定義された代数群に対して k 上既約と K 上既約であることは同値である．これは以下のように示すことができる．まず，少なくとも 1 点 k 点があるので，k 上連結であることと K 上連結であることが同値である．また，非特異なので，任意の体 $F \subset K$ の上で連結と既約は同値である．

証明は大きく 2 つの部分に分けあれる．弱モーデル・ヴェイユの定理とフェルマー降下法である．弱モーデル・ヴェイユの定理は，シュヴァレー・ヴェイユの定理とクンマー・ペアリングを用いて示される．このノートの証明は，Bombieri-Gubler を参考にしたが，これは現在の標準的な証明らしい．

定理 8.3.2 (シュヴァレー・ヴェイユ)**.** 数体 k 上の射影代数多様体の有限エタール射 $f\colon Y \to X$ に対し，ある有限拡大 l/k が存在し，$f^{-1}(X(k)) \subset Y(l)$ となる．

証明. ☻k の素点の有限集合 S で全ての無限素点を含むものに対し，$\mathcal{O}_S$ で S 整数の成す環とする．S を十分大きく取れば，$f\colon X \to Y$ は $\mathcal{O}_S$ 上の有限エタール射 $f'\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に拡張できる．1 対 1 対応 $X(k) = \mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ がある．$x \in X(k)$ に対し，対応する $\mathcal{X}$ の $\mathcal{O}_S$ 点を考えファイバー積 $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_S$ を取る．このファイバー積の連結成分の関数体が $f^{-1}(x)$ の点の定義体である．S の外で不分岐な k の有限拡大は有限個しかない（拡大次数は固定する必要はあるか？参考文献？）．これより定理が従う.（k が有限体上の代数曲線の関数体の場合：S の素点上でも分岐が押さえられることから，拡大体の判別式が押さえらる.）　□

系 8.3.3. $k(\frac{1}{m}A(k))$ を $A(k)$ の $[m]$ による逆像の定義体を含む最小の k の拡大体とする．このとき，$k(\frac{1}{m}A(k))/k$ は有限拡大である．

いま $A[m] \subset A(k)$ を仮定する．$\bar{k}$ を k の分離拡大とする．$x \in A(k)$ と $g \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ に対し，$x = my$ となる $y \in A$ を取り，

$$\langle x, g\rangle := y^g - y$$

とおく．これは y の取り方に依存しないことが $A[m] \subset A(k)$ を用いて示せる．写像（クンマー・ペアリング）

$$A(k) \times \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to A[m]$$

が定義される．これは，非退化ペアリング

$$A(k)/mA(k) \times \mathrm{Gal}(k(\frac{1}{m}A(k))/k) \to A[m]$$

を誘導する．特に，写像

$$A(k)/mA(k) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Gal}(k(\frac{1}{m}A(k))/k), A[m]),\ \bar{x} \mapsto \langle x, -\rangle$$

は単射である．$\mathrm{Map}(\mathrm{Gal}(k(\frac{1}{m}A(k))/k), A[m])$ は有限なので，$A(k)/mA(k)$ も有限である．

有限ガロア拡大 l/k に対し，$A(l)/mA(l)$ が有限なら $A(k)/m(k)$ も有限であることが比較的簡単に示せる．従って，$A[m] \subset A(k)$ という仮定が満たされる状況に帰着して，次の弱モーデル・ヴェイユの定理が示される．

定理 8.3.4 (弱モーデル・ヴェイユの定理)**.** $m \neq 0$ を k の標数と素な整数とする．このとき，$A(k)/mA(k)$ は有限集合である．

命題 8.3.5 (フェルマー降下法)**.** A をアーベル群，m を 2 以上の整数とする．関数 $|\cdot|\colon A \to \mathbb{R}$ が三角不等式

$$|x - y| \leq |x| + |y| \quad (x, y \in A)$$

と

$$|mx| = m|x| \quad (x \in A)$$

を満たすとする．$S \subset A$ を A/mA を代表元集合で $|\cdot|$ は S 上では C で押さえられるとする．$M = \{1, m, m^2, \dots\} \subset \mathbb{Z}$ とおく．このとき，任意の元 $x \in A$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し，$z \in A$ が存在して，$|z| \leq C + \epsilon$ と

$$x \in MS + Mz := \{\sum_{i=1}^{n} m^{a_i} x_i \mid a_i \in \mathbb{N},\ x_i \in S \cup \{z\}\}.$$

が成り立つ．特に A は $\{x \in A \mid |x| \leq C + \epsilon\}$ で生成される．

証明．任意の $x = x_0$ とおき，$y_i \in S$ と $x_i \in A$，$i \in \mathbb{N}$ を帰納的に

$$x_i = y_{i+1} + mx_{i+1}$$

となるように選ぶ．となる．

$$|x_{i+1}| \leq \frac{1}{m}(|x_i| + C)$$

が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned}
|x_{i+1}| - C &\leq \frac{1}{m}(|x_i| + C) - C \\
&\leq \frac{1}{m}(|x_i| + C) - \frac{2}{m}C \\
&\leq \frac{1}{m}(|x_i| - C) \\
&\leq \frac{1}{m^{i+1}}(|x| - C).
\end{aligned}$$

十分大きな i に対し，$|x_i| - C \leq \epsilon$ が成り立つ．また，

$$x = y_1 + my_2 + m^2y_3 + \cdots + m^{i-1}y_i + m^ix_i \in MS + Mx_i$$

が成り立つ． □

モーデル・ヴェイユの定理の証明．2 以上の整数 m を取る．弱モーデル・ヴェイユの定理より，$A(k)/mA(k)$ は有限集合．$S \subset A(k)$ をその代表元集合とする．これも有限集合．$\hat{h}$ をネロン・テイト高さとし，$|\cdot| = \hat{h}^{1/2}$ とすると，上の命題の条件を満たす．従って，$A(k)$ はある数 $C > 0$ に対し $\{x \in A(k) \mid \sqrt{\hat{h}(x)} \leq C\}$ で生成される．高さの基本性質より，このような点は有限個しかない． □

非特異代数多様体 X 上の曲線 C と素因子 D に対し，$C \not\subseteq D$ の場合 $C \cap D$ の各点 x に**交叉重複度** $(C, D)_x \in \mathbb{N}$ が定義され，C と D の**交叉数**を

$$(C, D) := \sum_{x \in C \cap D} (C, D)_x \in \mathbb{N}$$

と定義する．一般の因子類 $\alpha \in \mathrm{Pic}(X)$ に対し代表元 $D = \sum_i a_iD_i$ で $C \not\subseteq D_i$ となるものを選び

$$(C, \alpha) := \sum_i a_i(C, D_i) \in \mathbb{Z}$$

と定義する．これは代表元の選び方に依らない．$\alpha = [D]$ のとき，これを (C, D) とも書く．D が有効因子でも $C \subset D$ の場合は，交叉数は負になることもあることに注意する（上の定義によると，代表元を取り替える必要があり，そのとき負の係数が現れうる）．

二つの因子（類）D, D' は任意の X 上の曲線 C に対し $(C, D) = (C, D')$ となるとき，**数値的同値**であるといい

$$D \equiv D'$$

と記す．非特異射影代数多様体 X のネロン・セヴェリ群を

$$\mathrm{NS}(X) := Div(X)/\equiv$$

と定義する．これは有限生成自由アーベル群となる（つまり $\mathbb{Z}^n$ と同型になる）．また $\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} := \mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ とおく．これは有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間である．

参考文献

Shreeram Abhyankar. On the valuations centered in a local domain. *Amer. J. Math.*, 78:321–348, 1956. ISSN 0002-9327.

M. Artin. Brauer-Severi varieties. In *Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981)*, volume 917 of *Lecture Notes in Math.*, pages 194–210. Springer, Berlin, 1982.

M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

Lucian Bădescu. *Algebraic surfaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001. ISBN 0-387-98668-5. Translated from the 1981 Romanian original by Vladimir Maşek and revised by the author.

Enrico Bombieri and Walter Gubler. *Heights in Diophantine geometry*, volume 4 of *New Mathematical Monographs.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006. ISBN 978-0-521-84615-8; 0-521-84615-3. doi: 10.1017/CBO9780511542879. URL `http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511542879`.

Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Mihai Păun, and Thomas Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *J. Algebraic Geom.*, 22(2):201–248, 2013.

David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2007. ISBN 978-0-387-35650-1; 0-387-35650-9. doi: 10.1007/978-0-387-35651-8. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-35651-8`. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

David Eisenbud. *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995. ISBN 0-387-94268-8; 0-387-94269-6.

Osamu Fujino. Fundamental theorems for semi log canonical pairs. *Algebr. Geom.*, 1(2):194–228, 2014. ISSN 2214-2584. doi: 10.14231/AG-2014-011. URL `http://dx.doi.org/10.14231/AG-2014-011`.

William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998. ISBN 3-540-62046-X; 0-387-98549-2. doi: 10.1007/978-1-4612-1700-8. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1700-8`.

Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1992. ISBN 0-387-97716-3. doi: 10.1007/978-1-4757-2189-8. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-2189-8`. A first course.

Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. ISBN 0-387-90244-9. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

Marc Hindry and Joseph H. Silverman. *Diophantine geometry*, volume 201 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2000. ISBN 0-387-98975-7; 0-387-98981-1. doi: 10.1007/978-1-4612-1210-2. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1210-2`. An introduction.

Shigeru Iitaka. *Algebraic geometry*, volume 76 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. ISBN 0-387-90546-4. An introduction to birational geometry of algebraic varieties, North-Holland Mathematical Library, 24.

Yujiro Kawamata. The structure of the Albanese map of an algebraic variety of Kodaira dimension zero. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 55(10):403–405, 1979. ISSN 0386-2194. URL `http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195517072`.

Yujiro Kawamata. The cone of curves of algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)*, 119(3):603–633, 1984. ISSN 0003-486X. doi: 10.2307/2007087. URL `http://dx.doi.org/10.2307/2007087`.

János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* Springer-Verlag, Berlin, 1996. ISBN 3-540-60168-6.

János Kollár and 重文 森. **双有理幾何学**. Number 16 in 岩波講座現代数学の展開 / 青本和彦 [ほか] 編. 岩波書店, 1998. URL `http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA38548662`.

Kenji Matsuki. *Introduction to the Mori program.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002. ISBN 0-387-98465-8. doi: 10.1007/978-1-4757-5602-9. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-5602-9`.

Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. ISBN 0-521-36764-6. Translated from the Japanese by M. Reid.

Shigefumi Mori. Projective manifolds with ample tangent bundles. *Ann. of Math. (2)*, 110(3):593–606, 1979. ISSN 0003-486X. doi: 10.2307/1971241. URL `http://dx.doi.org/10.2307/1971241`.

Shigefumi Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Ann. of Math. (2)*, 116(1):133–176, 1982. ISSN 0003-486X. doi: 10.2307/2007050. URL `http://dx.doi.org/10.2307/2007050`.

Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988. ISBN 0-521-35559-1; 0-521-35662-8. doi: 10.1017/CBO9781139163699. URL `http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781139163699`.

V. V. Shokurov. A nonvanishing theorem. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 49(3):635–651, 1985. ISSN 0373-2436.

Kenji Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack.

雄二郎 川又. **代数多様体論**. Number 19 in 共立講座 21 世紀の数学. 共立出版, 1997. URL `http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA33239853`.