数学へのいざない

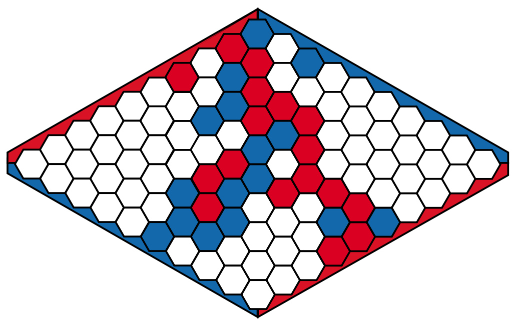
Euler Getter

**数年前に考案した
Euler Getterというゲームと
それに関連する数学を紹介します。**

准教授　安田 健彦

Hex

1940年代に Hex というゲームが考案されました。下のように六角形のマスが並んだボードで対戦します。



赤のプレーヤーと青のプレーヤーがいて、交互に空いたマスを選び、自分の色に塗ります。赤い辺が赤のマスで繋がると赤の勝ち、青も同様です。繋ぐというのは、まっすぐな線でなく、曲がっていても、枝分かれしていても構いません。このゲームには引き分けがありません。赤が繋がれば、そこを青が乗り越えることは出来ないからです。

トポロジー

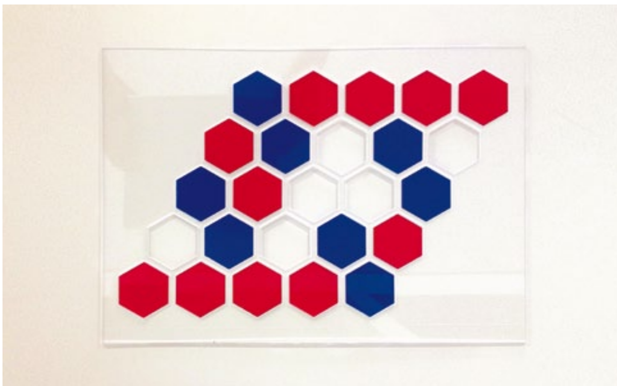
Hex はトポロジカル・ゲームの元祖とよく言われます。その後、多くのゲームが Hex からヒントを得て誕生しました。Euler Getter もその一つです。トポロジーは幾何学の一分野で、曲げたり伸ばしたりしても変わらない図形の性質を調べる学問です。例えば、最近 Perelman によって証明された Poincaré 予想はトポロジーの問題です。トポロジーの萌芽は「ケーニヒスベルクの橋の問題」に遡ります。ケーニヒスベルクという町にある7つの橋を、同じ橋を2度渡ることなしに、全ての橋を渡ることは出来るかというものです。[図1]

Euler は、[図2]を一筆書きできるかという問題に言い換えました。点とそれを繋ぐ線からなるこのような図をグラフと言います。さらに、Euler はグラフが一筆書き可能かどうかの簡単な判定法を見つけ、ケーニヒスベルクの橋の問題を鮮やかに解決しました。答えは、「同じ橋を2度渡ることなしに全ての橋を渡ることは出来ない」です。ところで、グラフを曲げたり伸ばしたりしても、問題の性質は変わりませんよね。これがトポロジーです。

トポロジーは、電車の路線図にも見て取れます。路線図では、路線が綺麗な直線や円だったり、駅の間隔が等しかったりと、正確な地図とは随分違います。しかし、必要な情報は含まれていて、問題は生じません。このように、トポロジーは人が普段無意識のうちに行っている、本質を取り出すという行為を数学的に厳密にしたものと言うことも出来ます。

Euler Getter のボードと射影平面

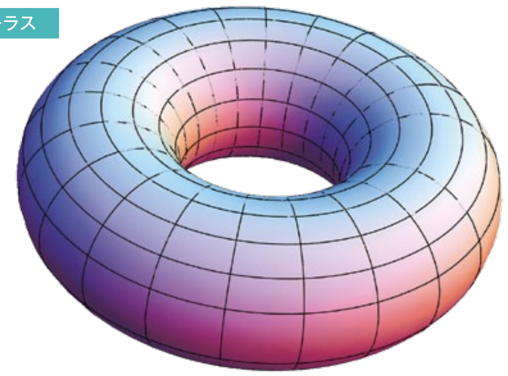
Euler Getter のボードは、Hex 同様、六角形が平行四辺形状に並んだもので[1]、そこに赤と青のプレイヤーが交互にマスに色をつけていきます。ただし、四辺上に並ぶマスに色をつけるときは、中心対称の位置にあるマスにも同時に同じ色をつけます。この取り決めは何を意味するのでしょうか。



（オイラーゲッターボード、福島高専ミニ研究「Euler Getter を学ぼう」所属学生制作、画像提供：廣瀬大輔）

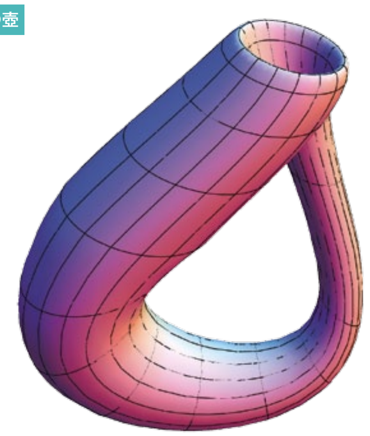
昔、テレビゲームの中で世界を救うために、良く旅をしましたが、その世界の地図は大体長方形をしていて、上の端まで行くと下の端から出てきて、右の端まで行くと左の端から出てくるという風になっていました。地図を曲げて端と端をくっつけると分かりますが、その世界の惑星は下のようなドーナツ状の形をしているはずです。（数学ではトーラスと呼びます。）

トーラス



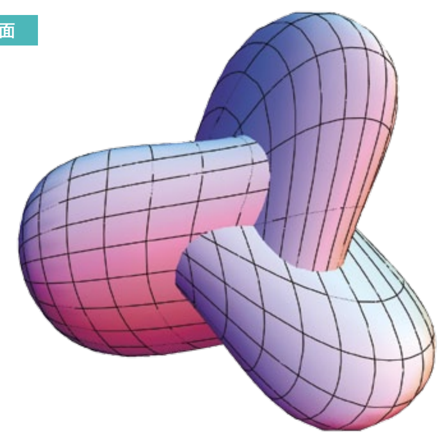
少しくっつけ方を変えて、上下の辺は普通にくっつけて、左右は逆向きにくっつけると、有名なクラインの壺という図形ができあがります。

クラインの壺



では、上下と左右の両方を逆向きにくっつけるとどうなるかというと、射影平面と呼ばれる図形になります。これは、Euler Getter のルールと同じものです。つまり、Euler Getter は射影平面の上で行うゲームです。射影平面を使うアイデアは新しいものでは無く、Shapley によって射影平面で行う Hex の変種が考案されています。射影平面は、絵画の技法である遠近法にも起源を持っています。

射影平面



勝敗と Euler 数

Euler Getter のゲームは全てのマスに色が付いたら終了です。勝者は点数が多い方で、その点数は Euler 数というものです。例えば、[図3]の図形全体の Euler 数は－1です。

（ひと繋がりの部分の数）－（輪の数）

で計算できます[2]。Euler 数は図形の曲げ伸ばしで変わらないため、不変量と呼ばれ数学で大事な役割を果たします。Hex 同様、Euler Getter にも引き分けがありません。その理由は、Euler 数は測度の性質を持っていて、赤と青の Euler 数の和が必ず1になるからです。測度とは物の長さ、大きさ、多さなどを測る尺度のことで、例えば個数、長さ、面積、体積などがそうです。測度を測度たらしめる性質は、

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$　（$|A|$ は A の「大きさ」）

です。実は、Euler 数もこの性質を満たしていて、その意味で測度になっているのです。ただし、負の値を取るというのが通常と異なります。図形の「大きさ」が負であるというのは奇妙ですが、おおらかな心で許して下さい。ゲームでは、射影平面の Euler 数は1で、また赤と青のエリアの共通部分は複数の輪になり、従って Euler 数は0です。このことから赤と青の Euler 数の和が1になります。

数学研究

新しいゲームを考えるというのは一種の遊びですが、上で説明した中にも数学研究で基本的な以下の要素が見て取れるのではないでしょうか：

●先人の仕事にインスパイアされる。
●「こんなことを考えたらどうなる？」という好奇心。
●矛盾しなければ問題設定は自由。

[1] 他にも、いろいろな形のボードを使うことが出来ます。

[2] これらの図形は本質的に1次元のため、この公式で良いのですが、高次元の図形では高次元の「穴」の数を勘定に入れなければなりません。

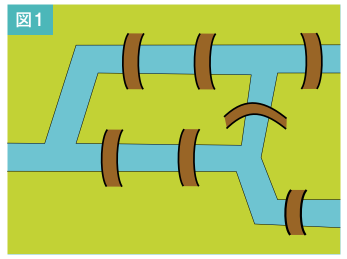


図2

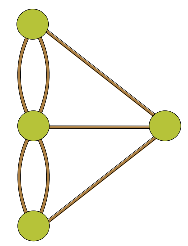


図3