

## アルゴリズム的ランダムネスによる確率概念の操作的特徴付け\*

### An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness

只木 孝太郎

中部大学 工学部 情報工学科

E-mail: [tadaki@cs.chubu.ac.jp](mailto:tadaki@cs.chubu.ac.jp)

<http://www2.odn.ne.jp/tadaki/>

確率概念は、科学技術のほとんど全ての分野で重要な役割を果たす。しかしながら、現代数学において、確率論とは測度論のことであり、“確率概念”の操作的な特徴付けは、未だ“確立”されていない。即ち、“確率”とは操作的にはどのような概念なのか？この点が不明確なまま、科学技術の様々な分野で、主に確率モデルの利用を通じて、確率概念が広く用いられているのである。本発表では、アルゴリズム的ランダムネスの概念装置に基づいて、確率概念の操作的特徴付けを提示する。アルゴリズム的ランダムネス (Algorithmic Randomness) は、数学基礎論の一分野であり、与えられた個々の無限列について、ランダムか否かの分類を可能にする理論体系である [2, 3, 1]。本発表では、Bernoulli 測度に関する Martin-Löf ランダム性に基づいて確率概念の操作的特徴付けを提示する。

確率概念の操作的特徴付けについては、前世紀の前半、von Mises が包括的な試みを展開した [9, 10]。彼は、確率概念の操作的特徴付けとして、コレクティブ (Kollektiv) と呼ぶ概念を導入し、それに基づいて確率論と統計学を再構成しようとした。しかし、Ville [8] の研究を通じて、von Mises が導入したそのままのコレクティブについては、ランダム性に関して十分な性質を持たないことが明らかになった。また、そもそもコレクティブには、確率ゼロの事象が起こる可能性を排除できないという内在的な欠陥があった。その後、ランダム性の定義に関しては、Martin-Löf [2] が Martin-Löf ランダム性の概念を導入し、これが、その後のアルゴリズム的ランダムネスの発展の一つの大きな礎となった。

Martin-Löf は、論文 [2] で Martin-Löf ランダム性の概念を導入した際に、Bernoulli 測度に関する Martin-Löf ランダム性の概念も同時に導入した。そして、正にこれこそが von Mises が“コレクティブ”と名付けた概念に一致するものである、と述べている。しかしながらその際、Martin-Löf 自身は、論文 [2] で Bernoulli 測度に関する Martin-Löf ランダム性に基づいて確率論の再構成を行おうとはしなかった。今日においても、アルゴリズム的ランダムネスの興味は、専ら様々なランダム性概念の導入とそれらの分類にあり、アルゴリズム的ランダム性概念に基づいて、確率概念の操作的特徴付けを与え、それにより確率論を再構成しようとは、目指していないように見える。そして、実際、そのような研究も見当たらない。

本発表では、Bernoulli 測度に関する Martin-Löf ランダム性に基づいて、von Mises の思想に従い、確率概念の操作的特徴付けを提示する。わかり易さのため、本発表では特に、有限な確率空間、即ち、標本空間が有限集合となる場合を扱う。そして、条件付き確率や、事象および確率変数に関する独立性の概念が、この操作的特徴付けによってどのように等価に表現されるかを見る。

---

\*本研究は、JSPS 科研費 15K04981 の助成、並びに中部大学 特別研究費 (A II) の助成を受けたものである。そして、本研究は、発表者が National University of Singapore の Institute for Mathematical Sciences に滞在中に発展したものである。関係各位に感謝する。

この操作的特徴付けは確率概念を用いるあらゆる分野に適用可能であり、科学技術全般に広範な応用が可能である。基礎科学への応用の例として、量子力学への応用（ボルン則の精密化）については、2014年度確率論シンポジウムで報告した [6]。今回の発表では、工学への応用の例として、情報理論ならびに暗号理論への応用について言及する。

## 参考文献

- [1] R. G. Downey and D. R. Hirschfeldt, *Algorithmic Randomness and Complexity*. Springer-Verlag, New York, 2010.
- [2] P. Martin-Löf, “The definition of random sequences,” *Inform. and Control*, vol. 9, pp. 602–619, 1966.
- [3] A. Nies, *Computability and Randomness*. Oxford University Press, Inc., New York, 2009.
- [4] K. Tadaki, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness. Proceedings of the 37th Symposium on Information Theory and its Applications (SITA2014), 5.4.1, pp. 389–394, December 9-12, 2014, Unazuki, Toyama, Japan.
- [5] K. Tadaki, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness and its application to cryptography. Proceedings of the 32nd Symposium on Cryptography and Information Security (SCIS2015), 2D4-3, January 20-23, 2015, Kokura, Japan.
- [6] 只木孝太郎, アルゴリズム的ランダムネスによる量子力学の再構成. 2014年度確率論シンポジウム, 2014年12月16日~12月19日, 京都大学 数理解析研究所.
- [7] K. Tadaki, An operational characterization of the notion of probability by algorithmic randomness and its application to science and technology. To appear in the Proceedings of the Workshop on Informatics 2015 (WiNF 2015), December 5, 2015, Meijo University, Nagoya, Japan.
- [8] J. Ville, “Étude Critique de la Notion de Collectif,” *Monographies des Probabilités. Calcul des Probabilités et ses Applications*. Gauthier-Villars, Paris, 1939.
- [9] R. von Mises, *Probability, Statistics and Truth*. Dover Publications, Inc., New York, 1957.
- [10] R. von Mises, *Mathematical Theory of Probability and Statistics*. Academic Press Inc., New York, 1964.

指数の異なる 2 つの縮小された自己相似過程からなるポテンシャルをもつ拡散過程

鈴木 由紀 (慶大医)

$\mathbb{W}$  を  $\mathbb{R}$  上の関数  $w$  で以下の (i)-(iii) を満たすもの全体とする. (i)  $w(0) = 0$ , (ii)  $w$  は  $[0, \infty)$  上右連続で左極限をもつ, (iii)  $w$  は  $(-\infty, 0]$  上左連続で右極限をもつ.  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  に対し,  $P_{\alpha_1, \alpha_2}$  を  $\mathbb{W}$  上の確率測度で以下の (i)-(iii) を満たすものとする. (i)  $\{w(-x), x \geq 0, P_{\alpha_1, \alpha_2}\}$  は  $\alpha_1^{-1}$ -自己相似過程である, (ii)  $\{w(x), x \geq 0, P_{\alpha_1, \alpha_2}\}$  は  $\alpha_2^{-1}$ -自己相似過程である, (iii) (i) と (ii) の 2 つの過程は独立である.  $0 < c < \min\{1/(2\alpha_1), 1/(2\alpha_2)\}$  をとり, 以下これを固定する.  $w \in \mathbb{W}$  と  $\lambda > 0$  に対し,  $w_\lambda \in \mathbb{W}$  を  $w_\lambda(x) = \lambda e^{-c\lambda} w(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , により定義する.  $[0, \infty)$  上の連続関数全体を  $\Omega$  とし,  $\omega \in \Omega$  に対し  $X(t) = X(t, \omega) = \omega(t)$  とおく.  $w \in \mathbb{W}$  と  $x_0 \in \mathbb{R}$  に対し,  $\Omega$  上の確率測度  $P_w^{x_0}$  を  $\{X(t), t \geq 0, P_w^{x_0}\}$  が生成作用素  $\mathcal{L}_w = \frac{1}{2} e^{w(x)} \frac{d}{dx} (e^{-w(x)} \frac{d}{dx})$  をもつ  $x_0$  から出発する拡散過程となるものとして定義する. さらに  $\mathbb{W} \times \Omega$  上の確率測度  $\mathcal{P}_\lambda^{x_0}$  を  $\mathcal{P}_\lambda^{x_0}(dw d\omega) = P_{\alpha_1, \alpha_2}(dw) P_{w_\lambda}^{x_0}(d\omega)$  により定義する. 本講演では,  $\{X(t), t \geq 0, \mathcal{P}_\lambda^0\}$  の時刻  $t = e^\lambda$  での挙動 ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) について報告する.

$\tilde{\alpha}_i = c\alpha_i (< 1/2)$ ,  $i = 1, 2$ , とおき,  $w \in \mathbb{W}$  と  $\lambda > 0$  に対し  $\tau_\lambda w \in \mathbb{W}$  を以下で定義する.

$$(\tau_\lambda w)(x) = \begin{cases} \lambda^{-1} w(e^{\tilde{\alpha}_1 \lambda} x), & x \leq 0, \\ \lambda^{-1} w(e^{\tilde{\alpha}_2 \lambda} x), & x > 0. \end{cases}$$

すると  $\{\tau_\lambda w_\lambda, P_{\alpha_1, \alpha_2}\} \stackrel{d}{=} \{w, P_{\alpha_1, \alpha_2}\}$  が成立する.  $w \in \mathbb{W}$  に対し,  $w^*(x) = w(x-) \vee w(x+)$ ,  $w_*(x) = w(x-) \wedge w(x+)$  と定義する.  $w \in \mathbb{W}$  の中で  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \{w(x) - \inf_{0 \leq y \leq x} w(y)\} = \limsup_{x \rightarrow -\infty} \{w(x) - \inf_{x \leq y \leq 0} w(y)\} = \infty$  を満たすもの全体を  $\mathbb{W}^\#$  とする.  $w \in \mathbb{W}^\#, \varepsilon > 0$  に対し以下を定義する.

$$\zeta_1 = \zeta_1(w) = \sup\{x \leq 0 : w^*(x) - \inf_{x < y \leq 0} w(y) \geq 1 - 2\tilde{\alpha}_1\},$$

$$\zeta_2 = \zeta_2(w) = \inf\{x \geq 0 : w^*(x) - \inf_{0 \leq y < x} w(y) \geq 1 - 2\tilde{\alpha}_2\},$$

$$V_1 = V_1(w) = \inf\{w_*(x) : \zeta_1 < x \leq 0\}, \quad V_2 = V_2(w) = \inf\{w_*(x) : 0 \leq x < \zeta_2\},$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1(w) = \begin{cases} \{\zeta_1 < x \leq 0 : w_*(x) = V_1\}, & w(\zeta_1) = V_1 \text{ の場合,} \\ \{\zeta_1 \leq x \leq 0 : w_*(x) = V_1\}, & w(\zeta_1) \neq V_1 \text{ の場合,} \end{cases} \quad b_1 = b_1(w) = \min \mathbf{b}_1(w),$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2(w) = \begin{cases} \{0 \leq x < \zeta_2 : w_*(x) = V_2\}, & w(\zeta_2) = V_2 \text{ の場合,} \\ \{0 \leq x \leq \zeta_2 : w_*(x) = V_2\}, & w(\zeta_2) \neq V_2 \text{ の場合,} \end{cases} \quad b_2 = b_2(w) = \max \mathbf{b}_2(w),$$

$$b_{1,\varepsilon} = b_{1,\varepsilon}(w) = \begin{cases} b_1, & w(b_1) > w(b_1+) \text{ の場合,} \\ b_1 - \varepsilon, & w(b_1) \leq w(b_1+) \text{ の場合,} \end{cases}$$

$$b_{2,\varepsilon} = b_{2,\varepsilon}(w) = \begin{cases} b_2, & w(b_2) > w(b_2-) \text{ の場合,} \\ b_2 + \varepsilon, & w(b_2) \leq w(b_2-) \text{ の場合,} \end{cases}$$

$$M_1 = M_1(w) = \sup\{w^*(x) : b_1 < x \leq 0\} \quad (b_1 = 0 \text{ の場合は } M_1 = 0),$$

$$M_2 = M_2(w) = \sup\{w^*(x) : 0 \leq x < b_2\} \quad (b_2 = 0 \text{ の場合は } M_2 = 0),$$

$$K_i = K_i(w) = M_i(w) \vee (V_i(w) + 1 - 2\tilde{\alpha}_i), \quad i = 1, 2.$$

ここで,  $\mathbb{A} = \{w \in \mathbb{W}^\# : K_1 + \tilde{\alpha}_1 < K_2 + \tilde{\alpha}_2\}$ ,  $\mathbb{B} = \{w \in \mathbb{W}^\# : K_1 + \tilde{\alpha}_1 > K_2 + \tilde{\alpha}_2\}$  とおき, さらに  $\lambda > 0$  に対し,  $\mathbb{A}_\lambda = \{w \in \mathbb{W}^\# : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{A}\}$ ,  $\mathbb{B}_\lambda = \{w \in \mathbb{W}^\# : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{B}\}$  とおくと,  $P_{\alpha_1, \alpha_2}\{\mathbb{A}_\lambda\} = P_{\alpha_1, \alpha_2}\{\mathbb{A}\}$ ,  $P_{\alpha_1, \alpha_2}\{\mathbb{B}_\lambda\} = P_{\alpha_1, \alpha_2}\{\mathbb{B}\}$  が成立する.

**定理 1.**  $P_{\alpha_1, \alpha_2}\{\mathbb{W}^\#\} = 1$  と仮定すると, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して以下の (i)-(ii) が成立する.

$$(i) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_{\alpha_1, \alpha_2}\{\mathbb{E}_{1, \lambda, \varepsilon} | \mathbb{A}_\lambda\} = 1. \quad (ii) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_{\alpha_1, \alpha_2}\{\mathbb{E}_{2, \lambda, \varepsilon} | \mathbb{B}_\lambda\} = 1.$$

ここで,  $\mathbb{E}_{i, \lambda, \varepsilon} = \{w \in \mathbb{W}^\# : p_{i, \lambda, \varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\}$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$p_{1,\lambda,\varepsilon}(w) = P_{w\lambda}^0 \{e^{-\tilde{\alpha}_1\lambda} X(e^\lambda) \in U_\varepsilon(\mathbf{b}_1(\tau_\lambda w_\lambda)) \cap (b_{1,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda), 0)\},$$

$$p_{2,\lambda,\varepsilon}(w) = P_{w\lambda}^0 \{e^{-\tilde{\alpha}_2\lambda} X(e^\lambda) \in U_\varepsilon(\mathbf{b}_2(\tau_\lambda w_\lambda)) \cap (0, b_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda))\}, U_\varepsilon(\mathbf{a}) \text{ は } \mathbf{a}(\subset \mathbb{R}) \text{ の } \varepsilon\text{-近傍.}$$

系 2.  $P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}\} = 1$  と仮定すると,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_\lambda^0 \{Y(e^\lambda) \in U_\varepsilon(\mathbf{b}(\tau_\lambda w_\lambda))\} = 1$ . ここで,

$$Y(t) = Y(t, \omega) = \begin{cases} t^{-\tilde{\alpha}_1} X(t, \omega), & X(t, \omega) \leq 0 \text{ の場合,} \\ t^{-\tilde{\alpha}_2} X(t, \omega), & X(t, \omega) > 0 \text{ の場合,} \end{cases} \quad \mathbf{b}(w) = \begin{cases} \mathbf{b}_1, & w \in \mathbb{A}, \\ \mathbf{b}_2, & w \in \mathbb{B}. \end{cases}$$

次に  $\omega \in \Omega$  に対し  $\underline{X}(t) = \underline{X}(t, \omega) = \min_{0 \leq s \leq t} X(s, \omega)$ ,  $\overline{X}(t) = \overline{X}(t, \omega) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s, \omega)$  とおき, 我々の過程の最小値過程  $\{\underline{X}(t), t \geq 0, \mathcal{P}_\lambda^0\}$  と最大値過程  $\{\overline{X}(t), t \geq 0, \mathcal{P}_\lambda^0\}$  の  $t = e^\lambda$  での挙動 ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) について調べる.  $w \in \mathbb{W}^\#, \gamma \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$  に対して以下を定義する.

$$\zeta_1(\gamma) = \zeta_1(\gamma, w) = \sup\{x \leq 0 : w^*(x) - \inf_{x < y \leq 0} w(y) \geq 1 - 2\tilde{\alpha}_1 + \gamma\} \quad (\zeta_1(0) = \zeta_1 \text{ である}),$$

$$\zeta_2(\gamma) = \zeta_2(\gamma, w) = \inf\{x \geq 0 : w^*(x) - \inf_{0 \leq y < x} w(y) \geq 1 - 2\tilde{\alpha}_2 + \gamma\} \quad (\zeta_2(0) = \zeta_2 \text{ である}),$$

$$\zeta_{1,\varepsilon} = \zeta_{1,\varepsilon}(w) = \begin{cases} \zeta_1(\varepsilon), & w(\zeta_1(\varepsilon)) \leq w(\zeta_1(\varepsilon)+) \text{ の場合,} \\ \zeta_1(\varepsilon) - \varepsilon, & w(\zeta_1(\varepsilon)) > w(\zeta_1(\varepsilon)+) \text{ の場合,} \end{cases}$$

$$\zeta_{2,\varepsilon} = \zeta_{2,\varepsilon}(w) = \begin{cases} \zeta_2(\varepsilon), & w(\zeta_2(\varepsilon)) \leq w(\zeta_2(\varepsilon)-) \text{ の場合,} \\ \zeta_2(\varepsilon) + \varepsilon, & w(\zeta_2(\varepsilon)) > w(\zeta_2(\varepsilon)-) \text{ の場合,} \end{cases}$$

$$\rho_1(\gamma) = \rho_1(\gamma, w) = \sup\{x \leq 0 : w(x) > K_2 - \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \gamma\}, \quad \rho_1 = \rho_1(0),$$

$$\rho_2(\gamma) = \rho_2(\gamma, w) = \inf\{x \geq 0 : w(x) > K_1 + \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2 + \gamma\}, \quad \rho_2 = \rho_2(0),$$

$$\rho_{1,\varepsilon} = \rho_{1,\varepsilon}(w) = \begin{cases} \rho_1(\varepsilon), & w(\rho_1(\varepsilon)) = w(\rho_1(\varepsilon)+) \text{ かつ } \rho_1(\varepsilon) \neq 0 \text{ の場合,} \\ \rho_1(\varepsilon) - \varepsilon, & w(\rho_1(\varepsilon)) > w(\rho_1(\varepsilon)+) \text{ の場合,} \\ -\varepsilon, & \rho_1(\varepsilon) = 0 \text{ の場合,} \end{cases}$$

$$\rho_{2,\varepsilon} = \rho_{2,\varepsilon}(w) = \begin{cases} \rho_2(\varepsilon), & w(\rho_2(\varepsilon)) = w(\rho_2(\varepsilon)-) \text{ かつ } \rho_2(\varepsilon) \neq 0 \text{ の場合,} \\ \rho_2(\varepsilon) + \varepsilon, & w(\rho_2(\varepsilon)) > w(\rho_2(\varepsilon)-) \text{ の場合,} \\ \varepsilon, & \rho_2(\varepsilon) = 0 \text{ の場合.} \end{cases}$$

ここで,  $\mathbb{A}^1 = \{w \in \mathbb{A} : V_1 + 1 - 2\tilde{\alpha}_1 > M_1\}$ ,  $\mathbb{A}^2 = \{w \in \mathbb{A} : V_1 + 1 - 2\tilde{\alpha}_1 < M_1\}$ ,  $\mathbb{B}^1 = \{w \in \mathbb{B} : V_2 + 1 - 2\tilde{\alpha}_2 > M_2\}$ ,  $\mathbb{B}^2 = \{w \in \mathbb{B} : V_2 + 1 - 2\tilde{\alpha}_2 < M_2\}$  とおき, さらに  $\lambda > 0, i = 1, 2$  に対し,  $\mathbb{A}_\lambda^i = \{w \in \mathbb{A}_\lambda : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{A}^i\}$ ,  $\mathbb{B}_\lambda^i = \{w \in \mathbb{B}_\lambda : \tau_\lambda w_\lambda \in \mathbb{B}^i\}$  とおく. すると  $P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{A}_\lambda^i\} = P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{A}^i\}$ ,  $P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{B}_\lambda^i\} = P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{B}^i\}$ ,  $\lambda > 0, i = 1, 2$ , が成立する.

以下,  $\varepsilon(\lambda) > 0, \lambda > 0$ , を  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varepsilon(\lambda) = 0, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \varepsilon(\lambda) = \infty$ , を満たす任意の関数とする.

定理 3.  $P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{W}^\#\} = 1$  と仮定すると, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して以下の (i)-(iii) が成立する.

$$(i) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{E}_{3,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{A}_\lambda\} = 1. \quad (ii) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{E}_{4,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{B}_\lambda^1\} = 1. \quad (iii) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{E}_{5,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{B}_\lambda^2\} = 1.$$

ここで,  $\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W}^\# : p_{i,\lambda,\varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\}, 3 \leq i \leq 5$ ,

$$p_{3,\lambda,\varepsilon}(w) = P_{w\lambda}^0 \{\zeta_{1,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\tilde{\alpha}_1\lambda} \underline{X}(e^\lambda) < \zeta_1(-\varepsilon(\lambda), \tau_\lambda w_\lambda)\},$$

$$p_{4,\lambda,\varepsilon}(w) = P_{w\lambda}^0 \{\rho_{1,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\tilde{\alpha}_1\lambda} \underline{X}(e^\lambda) < \rho_1(-\varepsilon(\lambda), \tau_\lambda w_\lambda)\},$$

$$p_{5,\lambda,\varepsilon}(w) = P_{w\lambda}^0 \{\rho_{1,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\tilde{\alpha}_1\lambda} \underline{X}(e^\lambda) < \rho_1(-\varepsilon, \tau_\lambda w_\lambda)\}.$$

定理 4.  $P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{W}^\#\} = 1$  と仮定すると, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, 以下の (i)-(iii) が成立する.

$$(i) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{E}_{6,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{A}_\lambda^1\} = 1. \quad (ii) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{E}_{7,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{A}_\lambda^2\} = 1. \quad (iii) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_{\alpha_1, \alpha_2} \{\mathbb{E}_{8,\lambda,\varepsilon} | \mathbb{B}_\lambda\} = 1.$$

ここで,  $\mathbb{E}_{i,\lambda,\varepsilon} = \{w \in \mathbb{W}^\# : p_{i,\lambda,\varepsilon}(w) > 1 - \varepsilon\}, 6 \leq i \leq 8$ ,

$$p_{6,\lambda,\varepsilon}(w) = P_{w\lambda}^0 \{\rho_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\tilde{\alpha}_2\lambda} \overline{X}(e^\lambda) < \rho_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda)\},$$

$$p_{7,\lambda,\varepsilon}(w) = P_{w\lambda}^0 \{\rho_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\tilde{\alpha}_2\lambda} \overline{X}(e^\lambda) < \rho_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda)\},$$

$$p_{8,\lambda,\varepsilon}(w) = P_{w\lambda}^0 \{\zeta_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda) < e^{-\tilde{\alpha}_2\lambda} \overline{X}(e^\lambda) < \zeta_{2,\varepsilon}(\tau_\lambda w_\lambda)\}.$$

参考文献 : [1] Brox, T. (1986) [2] Kawazu, K.-Tamura, Y.-Tanaka, H. (1989) [3] Suzuki, Y. (2008)

# Lamplighter random walks on fractals

中村 ちから (熊谷 隆 氏との共同研究)  
京都大学 数学数理解析専攻

2015.12.18

## 1 動機と先行研究

ランプライターグラフとは、通常のグラフの各頂点にランプ  $(\{0, 1\})$  をおき、どの頂点のランプがついているかをも加味したグラフである。近年、頂点数が多項式程度に増大するグラフ上のランダムウォークを解析する一般的手法が確立されつつあるが、一方でグラフの頂点数が指数増大するようなグラフ上のランダムウォークを解析する一般的手法はいまだないといってもよい状況である。そしてランプライターグラフの頂点数は指数増大するグラフである。これは通常のグラフにくらべどの頂点のランプがついているかいないかの情報が加味されていて、ランプライターグラフの方がより多くの”情報量”を持っているため、と説明できる。このような頂点数が指数増大するグラフ上のランダムウォークの性質の解析をすることが、この研究の動機である。

ランプライターグラフ上のランダムウォークについて、 $G = \mathbb{Z}^d$  の場合にはいくつかの先行研究がある。 $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$  上のランダムウォークの On-diagonal 熱核評価については [2]、 $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$  上のランダムウォークの重複対数の法則については [3] によって得られている。(これらの結果の詳細は講演中に説明する。) 本研究は  $G$  をより一般的なグラフに置き換えたとき、これらの結果がどのように変化するかを調べることを目的とする。

## 2 設定と主結果

グラフ  $G = (V, E)$  は可算無限、連結、一様有界 (つまり  $\sup_{v \in V(G)} \deg v < \infty$ ) とする。 $G$  のランプライターグラフ  $(\mathbb{Z}_2 \wr G \text{ とかく})$  は、頂点集合が

$$V(\mathbb{Z}_2 \wr G) = \{(f, v) \in (\mathbb{Z}_2)^G \times V(G) \mid \#\text{Supp } f < \infty\}$$

で与えられるグラフである。 $(f, v) \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G)$  に対し  $v$  が点灯夫 (ランプライター) のいる場所を表し  $f$  で  $G$  のどの頂点のランプがついているかを表している。また、 $G$  の頂点を通常の方法で  $x, y, \dots$  で表し  $\mathbb{Z}_2 \wr G$  の元を太文字  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$  で表すことにする。

$\{X_n\}_{n \geq 0}$  は  $G$  上の単純ランダムウォークとする。 $G$  と  $\{X_n\}$  に次の条件を仮定する。

仮定 2.1. (a) (増大度条件) 底空間  $G$  の中心  $x \in V(G)$ 、半径  $r$  の中の頂点数を  $V_G(x, r)$  とかくとき、 $V_G(x, r)$  は

$$c_1 r^{d_f} \leq V_G(x, r) \leq c_2 r^{d_f}$$

を任意の  $x \in V(G)$  と  $r \geq 0$  に対してみたとす.

(b) (Sub-Gauss 型熱核評価)  $G$  上の単純ランダムウォーク  $\{X_n\}$  は,

$$p_n^G(x, y) \leq \frac{c_3}{n^{d_f/d_w}} \exp \left[ -c_4 \left( \frac{d_G(x, y)^{d_w}}{n} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \right].$$

$$p_n^G(x, y) + p_{n+1}^G(x, y) \geq \frac{c_5}{n^{d_f/d_w}} \exp \left[ -c_6 \left( \frac{d_G(x, y)^{d_w}}{n} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \right].$$

を任意の  $x, y \in V(G)$  と  $n \geq 0$  で  $d_G(x, y) \leq n$  なるものに対して満たす.

この条件をみたす  $G$  と  $\{X_n\}$  に対し, 各頂点にランプを置いてランプライターグラフ  $\mathbb{Z}_2 \wr G$  を考えこのランプライターグラフの上のランダムウォーク  $\{Y_n = (\eta_n, X_n)\}_{n \geq 0}$  を考える. これは  $G$  上をランダムに動き, つぎに  $G$  上のランプをランダムに on, off の操作をする, という操作を繰り返す行うものである. 主結果は次の通りである.

**定理 2.2** (On-diagonal 熱核評価; Kumagai, N(2015)). 仮定 2.1 が成り立つとする. このとき,

$$p_{2n}^{\mathbb{Z}_2 \wr G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \approx \exp[-n^{\frac{d_f}{d_f+d_w}}]$$

が全ての  $\mathbf{x} = (\eta, x) \in \mathbb{Z}_2 \wr G$  に対し成り立つ.

**定理 2.3** (重複対数の法則; Kumagai, N(2015)). 仮定 2.1 が成り立つとする.

(I);  $d_f/d_w < 1$  のとき. 正の定数  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14} > 0$  があって次が成り立つ;

$$c_{11} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{\mathbb{Z}_2 \wr G}(Y_0, Y_n)}{n^{d_f/d_w} (\log \log n)^{1-d_f/d_w}} \leq c_{12}, \quad P_{\mathbf{x}}\text{-a.s.} \quad \text{for all } \mathbf{x} \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G),$$

$$c_{13} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{\mathbb{Z}_2 \wr G}(Y_0, Y_n)}{n^{d_f/d_w} (\log \log n)^{-d_f/d_w}} \leq c_{14}, \quad P_{\mathbf{x}}\text{-a.s.} \quad \text{for all } \mathbf{x} \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G).$$

(II);  $d_f/d_w > 1$  のとき. 正の定数  $c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24} > 0$  があって次が成り立つ;

$$c_{21} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{\mathbb{Z}_2 \wr G}(Y_0, Y_n)}{n} \leq c_{22}, \quad P_{\mathbf{x}}\text{-a.s.} \quad \text{for all } \mathbf{x} \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G),$$

$$c_{23} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{\mathbb{Z}_2 \wr G}(Y_0, Y_n)}{n} \leq c_{24}, \quad P_{\mathbf{x}}\text{-a.s.} \quad \text{for all } \mathbf{x} \in V(\mathbb{Z}_2 \wr G).$$

## 参考文献

- [1] Kumagai, T. and Nakamura, C.; *Lamplighter random walks on fractals*. preprint, available at [arXiv1505.00861](https://arxiv.org/abs/1505.00861)
- [2] Pittet, C., Saloff-Coste, L.: *Amenable groups, isoperimetric profiles and random walks*. Geometric group theory down under (Canberra, 1996), 293-316, de Gruyter, Berlin, 1999.
- [3] Revelle, D.: *Rate of escape of random walks on wreath products and related groups*. Ann. Probab. **31** (2003), no. 4, 1917-1934.

# The quenched critical point for self-avoiding walk on random conductors

Yuki Chino\* and Akira Sakai†  
Department of Mathematics  
Hokkaido University

Self-avoiding walk (SAW) is a statistical-mechanical model for linear polymers. We have many rigorous results on SAW, especially in  $d > 4$  [1, 5]. However in two or three dimensions, there still remain open problems [6]. In 1981, B. K. Chakrabarti and J. Kertész first introduced the random environment to SAW [2]. Our interest is to understand how the random environment affects the behavior of the observables concerning SAW around the critical point. In this talk, we show the quenched critical point is almost surely a constant and estimate upper and lower bounds.

Let  $\mathbb{B}^d$  denote the set of nearest-neighbor bonds in  $\mathbb{Z}^d$ , let  $\Omega(x)$  be the set of nearest-neighbor self-avoiding paths on  $\mathbb{Z}^d$  from  $x$ , and let  $\mathbf{X} = \{X_b\}_{b \in \mathbb{B}^d}$  be a collection of i.i.d. bounded random variables whose law and expectation are denoted  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  and  $\mathbb{E}_{\mathbf{X}}$ , respectively. Given the energy cost of the bond  $h \in \mathbb{R}$  and the random environment  $\mathbf{X}$  and the strength of randomness  $\beta \geq 0$ , we define the quenched susceptibility at  $x \in \mathbb{Z}^d$ :

$$\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x) = \sum_{\omega \in \Omega(x)} e^{-\sum_{j=1}^{|\omega|} (h + \beta X_{b_j})},$$

where  $|\omega|$  is the length of  $\omega$  and  $b_j$  is the  $j$ -th bond of  $\omega$ . Because of the inhomogeneity of  $\mathbf{X}$ , the quenched susceptibility is not translation invariant and does depend on the location of the reference point  $x$ . We also define the number of SAWs in random environment:

$$\hat{c}_{\beta,\mathbf{X}}(x; n) = \sum_{\omega \in \Omega(x)} e^{-\beta \sum_{j=1}^{|\omega|} X_{b_j}} \mathbf{1}_{\{|\omega|=n\}}.$$

Therefore, we have

$$\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-hn} \hat{c}_{\beta,\mathbf{X}}(x; n).$$

Since  $\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x)$  is monotonic in  $h$ , we can define the quenched critical point:

$$\hat{h}_{\beta,\mathbf{X}}^q(x) = \inf\{h \in \mathbb{R} : \hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x) < \infty\}.$$

---

\*chino@math.sci.hokudai.ac.jp

†sakai@math.sci.hokudai.ac.jp

We denote  $c(n)$  be the number of the homogeneous SAWs. By virtue of the self-avoidance constraint on  $\omega$  and the i.i.d. property of  $\mathbf{X}$ , we can directly compute the annealed susceptibility  $\mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x)]$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(h-\log \lambda_{\beta})n} c(n),$$

where  $\lambda_{\beta} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}}[e^{-\beta X_b}]$ . Then the annealed critical point must be defined:

$$h_{\beta}^a = \log \mu + \log \lambda_{\beta},$$

so that  $\mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x)] < \infty$  if and only if  $h > h_{\beta}^a$ . By Jensen's inequality,

$$h_{\beta}^a \geq \log \mu - \beta \mathbb{E}_{\mathbf{X}}[X_b].$$

The following theorem is the main result of this talk.

**Theorem 1.** *Let  $d \geq 1$  and  $\beta \geq 0$ . The quenched critical point  $\hat{h}_{\beta,\mathbf{X}}^q(x)$  is  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ -almost surely a constant that does not depend on the location of the reference point  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Moreover, by abbreviating  $\hat{h}_{\beta,\mathbf{X}}^q(x)$  as  $\hat{h}_{\beta}^q$ , we have*

$$\log \mu - \beta \mathbb{E}_{\mathbf{X}}[X_b] \leq \hat{h}_{\beta}^q \leq h_{\beta}^a, \quad \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\text{-almost surely.}$$

For  $d = 1$ , in particular, the lower bound is an equality.

The key elements for the proof are the following:

- To prove that the quenched critical point is  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ -a.s. a constant we show translation invariance and ergodicity by following similar analysis to that in H. Lacoïn [4].
- The upper bound (generally called the annealed bound) is trivial. On the other hand, the lower bound is derived from the second moment estimate by using the Paley-Zygmund inequality.

## References

- [1] D. Brydges and T. Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Commun. Math. Phys.* **97** (1985): 125–148.
- [2] B. K. Chakrabarti and J. Kartész. The statistics of self-avoiding walk on a disordered lattice. *Z. Phys. B Cond. Mat.* **44** (1981): 221–223
- [3] Y. Chino and A. Sakai. The quenched critical point for self-avoiding walk on random conductors. arXiv:1508.01262
- [4] H. Lacoïn. Non-coincidence of quenched and annealed connective constants on the supercritical planar percolation cluster. *Probab. Theory Relat. Fields* **159** (2014): 777–808.
- [5] N. Madras and G. Slade. *The Self-Avoiding Walk* (Birkhäuser, 2013).
- [6] G. Slade. The self-avoiding walk: A brief survey. *Surveys in Stochastic Processes* (J. Blath et al. eds., European Mathematical Society, 2011): 181–199.

# Enlargement of subgraphs of infinite graphs by Bernoulli percolation

Kazuki Okamura\*

We consider changes of properties of a subgraph of an infinite graph if we add open edges of Bernoulli percolation on the infinite graph to the subgraph. We give a triplet of an infinite graph, a subgraph of it, and, a property for graphs. Then, in a manner similar to the way that Hammersley's critical probability is defined, we can define two values associated with the triplet. We regard the two values as certain critical probabilities and compare them with Hammersley's one.

In this talk we will focus on the following cases that a property for graphs is being a transient subgraph, having infinitely many cut points, having no cut points, being a recurrent subset, and, being connected. Our results depend heavily on choices of the triplet.

---

\*Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, JAPAN. e-mail : [kazukio@kurims.kyoto-u.ac.jp](mailto:kazukio@kurims.kyoto-u.ac.jp)

---

## Continuum Cascade Model of Directed Random Graphs

Yoshiaki Itoh

*Institute of Statistical Mathematics, Tachikawa, Tokyo*

e-mail: itoh@ism.ac.jp

---

In the cascade model by Cohen and Newman, the random directed graph has vertex set  $\{1, \dots, n\}$  in which the directed edges  $(i, j)$  occur independently with probability  $c$  for  $i < j$  and probability zero for  $i \geq j$ . Let  $L_n$  denote the length of the longest path starting from vertex 1. We apply the Poisson approximation to the binomial distribution of the number of directed edges at each vertex and consider the continuum cascade model. We study the asymptotic behavior of  $L_n$  as  $n$  tends to infinity.

At step 1 we generate  $N_x$  points by the Poisson distribution  $Pr(N = k) = \frac{x^k}{k!}e^{-x}$  on  $[0, x]$ . Each point is mutually independently distributed uniformly at random on  $[0, x]$ . At step  $j (> 1)$ , for each generated point at  $x - y$ , generated at the step  $j - 1$ , generate  $N_y$  points by the Poisson distribution  $Pr(N = k) = \frac{y^k}{k!}e^{-y}$  uniformly at random on the interval  $[x - y, x]$ , independently from the points on other intervals at step  $j$  and independently from the points of previously generated intervals. We call the terminal interval any interval which did not generate any point. The terminal interval, which appeared at a step, remains a terminal interval after the step. We continue the steps as long as we have at least one interval which is not a terminal interval. For each terminal interval generated by the above procedure, we count the number of steps to get the interval and call it the height of the interval. Let us call the maximum of the numbers,  $H(x)$ , the height of the tree generated by the continuum cascade model on  $[0, x]$ .

When  $k$  points,  $x - y_1, x - y_2, \dots, x - y_k$  are generated at step 1, the probability, that the height is not larger than  $n - 1$ , is  $P_{n-1}(y_1)P_{n-1}(y_2) \cdots P_{n-1}(y_k)$ , since each  $y_i$  is distributed uniformly at random on  $[0, x]$  and  $k$  is distributed by the Poisson distribution. We have the recursion for the probability  $P_n(x) \equiv \mathbf{P}(H(x) \leq n)$ . For  $n = 0$ ,

$$P_n(x) = e^{-x}, \quad (1)$$

while for  $n \geq 1$ ,

$$P_n(x) = \exp \left[ -x + \int_0^x P_{n-1}(y) dy \right]. \quad (2)$$

We apply a theorem by E. Aidekon for branching random walk to study the above numerical traveling wave solution of equation (2) mathematically.

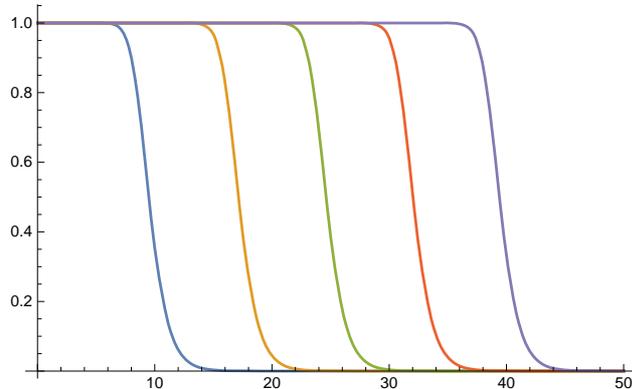


Figure 1: Traveling waves, the distribution  $P_n(x)$  versus  $x$  obtained by iterating the recursion.  $P_n(x)$  is shown for  $n = 20, 40, 60, 80, 100$  (left to right).

We consider the derivative martingale  $D_n$  for our continuum cascade model. We know the martingale converges almost surely to some limit  $D_\infty$ , which is strictly positive on the set of non extinction of the genealogical tree for our continuum cascade model. We see that there exists a constant  $C^* > 0$  such that for any real  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}\left(x + \frac{n}{e} + \frac{3}{2e} \ln n\right) = \mathbf{E}[\exp(-C^* e^{ex} D_\infty)], \quad (3)$$

which gives the asymptotic probability on the longest chain length (on the position of wave front).

## References

- [1] Itoh, Y and Krapivsky, P L 2012. "Continuum cascade model of directed random graphs: traveling wave analysis." *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45, 455002.
- [2] Itoh, Y 2015 Continuum Cascade Model: Branching Random Walk for Traveling Wave. arXiv preprint arXiv:1507.04379.

# Geometric structures of favorite points and late points of simple random walk and high points of Gaussian free field in two dimensions

岡田 いず海 (東京工業大学)

## 1 序

本講演では、 $\mathbb{Z}^2$  上の simple random walk (SRW) の特異点、又は対応する Gaussian free field (GFF) に関する特異点に関する長時間挙動を扱う。ここでいう特異点とは、SRW については局所時間が他の点と比べて大きい又は小さい点の事であり、GFF についてはその点での値が他の点と比べて大きい点の事である。この研究の背景として、random walk の局所時間と GFF の関係性についての研究である Generalized second Ray Knight theorem が知られている。この定理の系として、局所時間に対して中心極限定理の意味での収束先が対応する GFF になることがわかる。この関係性を幾何学的構造の観点からさらに調べることで、局所時間が GFF に収束する挙動をより詳細に観察したい。また、 $\mathbb{Z}^2$  上の SRW の局所時間に関する極限定理を考える上で、局所時間に対する Large deviation の評価が重要になる場合がある。従って、その様な評価と密接に関係している「GFF や SRW の局所時間に関する特異点」の長時間挙動の性質に着目したい。具体的には、[7] で得られている  $\mathbb{Z}^2$  上の GFF の特異点の幾何学的性質に着目した。以下では、それを拡張した結果と、対応する SRW の局所時間に関する特異点の幾何学的構造を考察して得られた結果を紹介する。

## 2 定義と先行結果

$\mathbb{Z}_n^2 := \mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z}^2$  とする。 $\mathbb{Z}^2$  又は  $\mathbb{Z}_n^2$  上の SRW を考える。これに対し、 $K(n, x) := \sum_{m=0}^n 1_{\{S_m=x\}}$ 、 $T_x := \inf\{m \geq 1 : S_m = x\}$ 、 $\tau_n := \inf\{m \geq 1 : |S_m| \geq n\}$  と定義する。また、SRW と GFF に関する特異点を次の様に定義する。

(I)  $\alpha$ -High points of GFF

covariance が  $E^x[K(\tau_n, y)]$  であるような  $\mathbb{Z}^2$  上の GFF  $\{\phi(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^2}$  を考える。[1] の GFF の最大値に対する評価をふまえ、 $0 < \alpha < 1$  に対し、 $\mathbb{Z}^2$  上の  $\alpha$ -High points の集合を次のように定義する：

$$\mathcal{V}_n(\alpha) := \{x \in \mathbb{Z}^2 : \frac{1}{2}\phi(x)^2 \geq \frac{4\alpha}{\pi}(\log n)^2\}.$$

(II)  $\alpha$ -Late points

[3] の  $\mathbb{Z}_n^2$  上の SRW の cover time に対する評価をふまえ、 $0 < \alpha < 1$  に対し、 $\mathbb{Z}_n^2$  上の  $\alpha$ -Late points の集合を次のように定義する：

$$\mathcal{L}_n(\alpha) := \{x \in \mathbb{Z}_n^2 : \frac{T_x}{(n \log n)^2} \geq \frac{4\alpha}{\pi}\}.$$

(III)  $\alpha$ -Favorite points

[2] の局所時間の最大値に対する評価をふまえ、 $0 < \alpha < 1$  に対し、 $\mathbb{Z}^2$  上の  $\alpha$ -Favorite points の集合を次のように定義する：

$$\mathcal{F}_n(\alpha) := \{x : K(\tau_n, x) \geq \frac{4\alpha}{\pi}(\log n)^2\}.$$

上の (I)(II)(III) の幾何的構造を考えるために、 $M \subset \mathbb{Z}^2$  と  $0 < \beta < 1$  と  $j \in \mathbb{N}$  に対して次の写像を定義する：

$$\mathcal{H}_{n,j,\beta}(M) := |\{(x_1, \dots, x_j) \in M^j : d(x_i, x_l) \leq n^\beta \text{ for any } 1 \leq i, l \leq j\}|.$$

[7] では  $\mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))$  を評価しており, [4, 8] では  $\mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))$  に関して同じ評価を得ていた. これより GFF と局所時間の特異点が関係性をもっていることが推測できる. また, GFF の符号対称性により, GFF の値の大きい点と小さい点は同じ分布を持っている. 従って, これらを組み合わせると「局所時間が小さい特異点」(Late points) の評価が「局所時間が大きい特異点」(Favorite points) にも現れることが期待できる.

### 3 主結果と先行結果との比較

High points of GFF, Late points, Favorite points の幾何的構造に関連性を示す評価が得られた.

**定理 3.1.** (O. 2015)

任意の  $j \in \mathbb{N}$  に対して次が成立する:  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$(i) \frac{\log \mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))}{\log n}, \frac{\log \mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))}{\log n} \rightarrow \rho_j(\alpha, \beta) \text{ in probability} \text{ かつ } \frac{\log \mathcal{H}_{n,j,\beta}(\Psi_n(\alpha))}{\log n} \rightarrow \rho_j(\alpha, \beta) \text{ a.s.}$$

$$(ii) \frac{\log E[\mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))]}{\log n}, \frac{\log E[\mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))]}{\log n}, \frac{\log E[\mathcal{H}_{n,j,\beta}(\Psi_n(\alpha))]}{\log n} \rightarrow \hat{\rho}_j(\alpha, \beta).$$

ここで,  $\rho_j(\alpha, \beta)$  と  $\hat{\rho}_j(\alpha, \beta)$  は次の様に定義する:

$$\rho_j(\alpha, \beta) := \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \leq \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})) \\ 4j(1-\sqrt{\alpha}) - 2j(1-\sqrt{\alpha})^2/\beta & (\beta \geq \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})), \end{cases}$$

$$\hat{\rho}_j(\alpha, \beta) := \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \leq 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}) \\ 2(j+1-2\sqrt{j\alpha}) & (\beta \geq 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}). \end{cases}$$

ただし, 先行結果として, [7] では,  $j = 2$  の場合, すなわち, (i)  $\frac{\log \mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))}{\log n} \rightarrow \rho_2(\alpha, \beta)$  (in probability) と (ii)  $\frac{\log E[\mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{V}_n(\alpha))]}{\log n} \rightarrow \hat{\rho}_2(\alpha, \beta)$  という評価, [4] では, (i)  $\frac{\log \mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))}{\log n} \rightarrow \rho_2(\alpha, \beta)$  (in probability) という評価, また [8] では (ii)  $\frac{\log E[\mathcal{H}_{n,2,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))]}{\log n} \rightarrow \hat{\rho}_2(\alpha, \beta)$  という評価が得られている. さらに, [4] では, open problem として  $\mathcal{L}_n(\alpha)$  を  $\Psi_n(\alpha)$  に変えたときに同じ評価が得られることを予想しており, これが定理 3.1 より肯定的に解決できる. また, [5, 6] では任意の  $j \in \mathbb{N}$  に対して,  $\mathcal{H}_{n,j,\beta}(\mathcal{L}_n(\alpha))$  がどのような挙動になるか open problem として挙げており, これも同様に解決できる.

### 参考文献

- [1] Bolthausen, E., Deuschel, J.D. and Giacomin, G. (2001). Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic crystal. Ann. Probab. 29 1670–1692.
- [2] Dembo, A., Peres, Y., Rosen, J. and Zeitouni, O. (2001). Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk. Acta Math. 186, 239-270.
- [3] Dembo, A., Peres, Y., Rosen, J. and Zeitouni, O. (2004). Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions. Ann. Math., 160, 433-464.
- [4] Dembo, A., Peres, Y., Rosen, J. and Zeitouni, O. (2006). Late points for random walks in two dimensions. Ann. Probab., 34, No 1. 219-263.
- [5] Dembo, A. (2005). Favorite points, cover times and fractals. In Lectures on Probability Theory and Statistics, volume 1869 of Lecture Notes in Math., pages 1–101. Springer, Berlin. Lectures from the 33rd Probability Summer School held in Saint-Flour, July 6–23, 2003
- [6] Dembo, A. (2006). Simple random covering, disconnection, late and favorite points. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Volume III. 535-558.
- [7] Daviaud, O. (2006). Extremes of the discrete two-dimensional Gaussian free field. Ann. Probab. 34, 962–986.
- [8] Brummelhuis, M. and Hilhorst, H. (1991). Covering of a finite lattice by a random walk. Phys. A, 176. 387-408.

# 局所時間の極大値： 対称な木の上の単純ランダムウォークの場合

阿部圭宏 (京都大学)

本講演では、有限な  $b$ -ary tree 上で各葉への平均到達時刻よりもはるかに長い時間走らせた単純ランダムウォーク (SRW) を考え、その時刻における局所時間の極大値に関する結果を紹介する。この研究は、極大値統計に関して「対数相関を持つ確率変数列」が独立同分布な確率変数列とは異なる新たなクラスを形成するだろう、という予想を検証する研究の一環である。分枝 Brown 運動、分枝ランダムウォーク、2次元離散 Gauss 自由場などのモデルでは既にこの予想の妥当性を証明する研究が数多くなされている。

本研究の主結果を述べるために、記号の準備をする。自然数  $b \geq 2$  を固定する。根を持つグラフ木でどの点も  $b$  個の子供を持つものを  $b$ -ary tree と呼ぶ。  $T_i$  を  $b$ -ary tree の  $i$  世代目の集合とする。深さ  $n$  の  $b$ -ary tree  $T_{\leq n} := \cup_{i=0}^n T_i$  上の連続時間 SRW  $X = (X_t, t \geq 0, P_x, x \in T_{\leq n})$  を考える。SRW の各点における待ち時間は独立な期待値 1 の指数分布に従うものとする。この SRW の局所時間と逆局所時間を次で与える：

$$L_t^n(v) := \frac{1}{\deg(v)} \int_0^t 1_{\{X_s=v\}} ds, \quad v \in T_{\leq n}, t \geq 0,$$

$$\tau(t) := \inf\{s \geq 0 : L_s^n(\rho) > t\}.$$

但し、 $\rho$  は  $T_{\leq n}$  の根、 $\deg(v)$  は点  $v$  に隣り合う点の数とする。次に、各点  $v \in T_k, k \geq 1$  にラベル  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$  を次の (1), (2) を満たすように与える：(1) 各  $i$  に対して  $\bar{v}_i \in \{0, \dots, b-1\}$ , (2) ラベル  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, j), 0 \leq j \leq b-1$  を持つ点は  $v$  の子供。このラベルを使い、各葉  $v \in T_n$  の「位置」を次で定義する：

$$\sigma(v) := \sum_{i=1}^n \frac{\bar{v}_i}{b^i}.$$

本講演では次の  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  上の点過程に着目する： $m < n$  と  $t > 0$  に対して、

$$\Xi_{n,t}^{(m)} := \sum_{v \in T_{n-m}^v} \delta_{(\sigma(u_v^{(m)}), \max_{u \in T_m^v} \sqrt{L_{\tau(t)}^n(u)} - \sqrt{t} - a_n(t))}. \quad (1)$$

但し、 $\delta_{(x,h)}$  は点  $(x, h) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$  における Dirac 測度、 $T_m^v$  は  $v$  を根とする部分木の  $m$  世代目 ( $T_m^v, v \in T_{n-m}$  は葉全体  $T_n$  の分割であることに注意)、 $u_v^{(m)} \in T_m^v$  は局所時間が  $T_m^v$  の上で最大値をとる点、さらに  $a_n(t)$  は次で与えられるものとする：

$$a_n(t) := \sqrt{\log b} n - \frac{3}{4\sqrt{\log b}} \log n - \frac{1}{4\sqrt{\log b}} \log \left( \frac{\sqrt{t} + n}{\sqrt{t}} \right). \quad (2)$$

局所時間の葉全体での最大値  $\max_{v \in T_n} \sqrt{L_{\tau(t)}^n(v)}$  の分布は値  $\sqrt{t} + a_n(t)$  に集中する (最大値から  $\sqrt{t} + a_n(t)$  を差し引いたものが  $n$  に関する列として緊密である) ことを確かめることができる。点過程 (1) は葉全体を  $b^{n-m}$  個の部分集合に分割し、各部分の上で局所時間が最大値をとる葉の位置及びその極大値から「先端値」

を差し引いたものを情報として持つ。本講演では点過程 (1) の収束に関する結果を紹介する。その結果を述べる前に  $b$ -ary tree に付随する分枝ランダムウォークを定義する。  $E(T)$  を  $b$ -ary tree  $T$  の辺集合,  $(Y_e)_{e \in E(T)}$  を独立な標準正規分布に従う確率変数列とする。分枝ランダムウォーク  $(h_v)_{v \in T_n}$  を次で定義する：

$$h_v = \sum_{i=1}^n Y_{e_i^v}, \quad v \in T_n.$$

但し、各  $v \in T_n$  に対して、  $e_1^v, \dots, e_n^v$  は  $\rho$  から  $v$  までの道の辺とする。 Derivative martingale  $(D_n)_{n \geq 1}$  を次で定義する：

$$D_n := \sum_{v \in T_n} \left( \sqrt{\log b} n - \frac{1}{\sqrt{2}} h_v \right) e^{-2\sqrt{\log b} \left( \sqrt{\log b} n - \frac{1}{\sqrt{2}} h_v \right)}.$$

$D_n$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき、ある確率変数  $D_\infty \in (0, \infty)$  に確率 1 で収束することが知られている。点過程 (1) は ( $m$  と  $t$  を適切にとることで)  $n \rightarrow \infty$  のとき弱収束し、その極限が  $D_\infty$  で特徴付けられることがわかった：

**定理 1** ある正定数  $c_1 > 0$  と全測度が  $D_\infty$  と同分布である  $[0, 1]$  上のランダム Borel 測度  $Z_\infty$  が存在して次が成り立つ：各  $n$  に対して  $t_n \geq c_1 n \log n$  かつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{t_n}/n =: \theta \in [0, \infty]$  なる任意の列  $(t_n)_{n \geq 1}$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$  かつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n/n = 0$  なる任意の自然数列  $(r_n)_{n \geq 1}$  に対して、  $n \rightarrow \infty$  のとき、

$\Xi_{n, t_n}^{(r_n)}$  は intensity measure  $\alpha_*(\theta) Z_\infty(dx) \otimes 2\sqrt{\log b} e^{-2\sqrt{\log b} h} dh$  を持つ Cox 過程に弱収束する。

但し、

$$\alpha_*(\theta) := \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\theta+1}{\theta+\sqrt{\log b}}} \cdot \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\ell^{2/5}}^{\ell} z e^{2\sqrt{\log b} z} \mathbb{P} \left( \max_{v \in T_\ell} \frac{1}{\sqrt{2}} h_v > \sqrt{\log b} \ell + z \right) dz.$$

( $\theta = \infty$  の場合、  $\sqrt{\frac{\theta+1}{\theta+\sqrt{\log b}}} = 1$  とみなす.)

定理 1 に類似の結果は分枝 Brown 運動や 2 次元離散 Gauss 自由場でも知られており [1, 2], 定理 1 の設定では特に Bovier 氏と Hartung 氏の設定 [3] を参考にした。定理 1 の新しい点は、点過程が非自明な極限を持つために局所時間の極大値から差し引く項 (2) が単純ランダムウォークを走らせる時間に依存することを明らかにした点である。時間の許す限り定理 1 の証明の概略にも触れたい。

## 参考文献

- [1] L.-P. Arguin, A. Bovier, and N. Kistler. Poissonian statistics in the extremal process of branching Brownian motion. *Ann. Appl. Probab.* **22** (2012), 1693-1711.
- [2] M. Biskup and O. Louidor. Extreme local extrema of two-dimensional discrete Gaussian free field. arXiv:1306.2602
- [3] A. Bovier and L. Hartung. Extended convergence of the extremal process of branching Brownian motion. arXiv:1412.5975