RISK-SENSITIVE ASSET MANAGEMENT WITH GENERAL FACTOR MODELS.

畑　宏明　(静岡大学教育学部)

【本講演の目的】リスク志向的設定下の一般的な非線形確率ファクターモデル用いた有限時間範囲のリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の最適戦略と最適値を求める。

まず、次の市場モデルを考える。

- 銀行預金過程：$dS_t^0 = r(Y_t)S_t^0 dt, \quad S_0^0 = s_0^0$
- $i(i = 1, \cdots, m)$ 番目の危険資産価格過程：

$$dS_t^i = S_t^i \left\{ \mu^i(Y_t)dt + \sum_{k=1}^{n+m} \sigma_k^i(Y_t)dW_t^k \right\}, \quad S_0^i = s_0^i$$

- ファクター過程：

$$dY_t = g(Y_t)dt + \lambda(Y_t)dW_t, \quad Y(0) = y \in \mathbb{R}^n$$

ここで、 $W_t = (W_t^k)_{k=1,\cdots,(n+m)}$ は $n+m$ 次元標準ブラウン運動、 $\sigma, \lambda, \mu, g, r$ はそれぞれ $\mathbb{R}^{m\times(n+m)}, \mathbb{R}^{n\times(n+m)}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}$-値関数である。

このとき、次の条件を仮定する。

(A1) $\lambda, g, \sigma, \mu, r$ は大域的にリプシッツ連続, 滑らかな関数。

(A2) $x, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^m$ に対して,

$$\mu_1|\xi|^2 \le \xi^*\sigma\sigma^*(x)\xi \le \mu_2|\xi|^2,$$
$$\mu_1|\eta|^2 \le \eta^*\lambda\lambda^*(x)\eta \le \mu_2|\eta|^2,$$

となる $\mu_1, \mu_2 > 0$ が存在する。ただし、$(\cdot)^*$ はベクトル、行列の転置を表す。

(A3) r は非負定値かつ有界な関数。

π_t^i を i 番目の危険資産への投資比率 (投資戦略), $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)^*$ とすると、投資家の資産価値過程 X_t^π は次を満たす。

$$\frac{dX_t^\pi}{X_t^\pi} = (1 - \pi_t^*\mathbf{1})\frac{dS_t^0}{S_t^0} + \sum_{i=1}^m \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i}, \quad X_0^\pi = 1$$

本講演では、次の有限時間範囲のリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題を扱う。

$$\text{(FRS)} \qquad \Gamma_T(\gamma) := \sup_{\pi\in\mathcal{A}_T} \frac{1}{\gamma}\log E\left[(X_T^\pi)^\gamma\right]$$

ここで、$\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ は投資家のリスク回避度を表すリスク鋭感的パラメーターで、$\mathcal{A}_T$ は許容な投資戦略全体。

$$\begin{cases} \text{本講演} \cdots\cdots\cdots \gamma \in (0,1) \text{ (リスク志向的)} \\ \text{Nagai(2003)} \cdots \gamma \in (-\infty, 0) \text{ (リスク回避的)} \end{cases}$$

【解法の手順】

(1) 動的計画原理を用いて、形式的に (以下で与えられている)HJB 方程式 (0.1) を導出する。(※ HJB 方程式 (0.1) の $\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}[\quad]$ において、sup を達成する $\hat{\pi}$ は最適投資戦略の候補になる。)

(2) HJB 方程式 (0.1) に最適戦略の候補 $\hat{\pi}$ を代入した方程式 (0.2)(以下で与えている) の解の存在を証明する。
(3) 方程式 (0.2) を用いて、Verification Theorem (最適戦略の候補 $\hat{\pi}$ が本当に最適戦略であることを保証する定理) を証明する。

実際、動的計画原理から、(FRS) に関連する HJB 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\lambda(y)\lambda(y)^*D^2v)+\frac{\gamma}{2}(Dv)^*\lambda(y)\lambda(y)^*Dv+g(y)^*Dv+r(y)\\&+\sup_{\pi\in\mathbb{R}^m}\left[-\frac{1-\gamma}{2}\pi^*\sigma(y)\sigma(y)^*\pi+\pi^*\{\mu(y)-r(y)\mathbf{1}+\gamma\sigma(y)\lambda(y)^*Dv\}\right]=0,\\&v(T,y)=0\end{aligned}\tag{0.1}$$

つまり、次のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\lambda(y)\lambda(y)^*D^2v)+B(y)^*Dv+\frac{1}{2}(Dv)^*Q(y)Dv+U(y)=0,\\&v(T,y)=0\end{aligned}\tag{0.2}$$

ただし、Q,B,U はそれぞれ次で与えられる。

$$\begin{aligned}Q(y)&:=\gamma\lambda(y)\left\{I+\frac{\gamma}{1-\gamma}\sigma(y)^*(\sigma(y)\sigma(y)^*)^{-1}\sigma(y)\right\}\lambda(y)^*,\\B(y)&:=g(y)+\frac{\gamma}{1-\gamma}\lambda(y)\sigma(y)^*(\sigma(y)\sigma(y)^*)^{-1}(\mu(y)-r(y)\mathbf{1}),\\U(y)&:=\frac{1}{2(1-\gamma)}(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})^*(\sigma(y)\sigma(y)^*)^{-1}(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})+r(y)\end{aligned}$$

【解法の手順】を経て、次の結果が得られる。

Theorem 0.1. (A1) ∼ (A3) を仮定する。さらに、次も仮定する。

(A4) $|D\xi_0(y)|\le C_0(|y|+1),\exists C_0>0$ と

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\lambda(y)\lambda(y)^*D^2\xi_0)+B(y)^*D\xi_0+\frac{1}{2}(D\xi_0)^*Q(y)D\xi_0+U(y)\to-\infty,|y|\to\infty$$

を満たす下に有界な関数 ξ_0 が存在する。

(A5) $(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})^*(\sigma(y)\sigma(y)^*)^{-1}(\mu(y)-r(y)\mathbf{1})+r(y)\to\infty,|y|\to\infty$

このとき、次の結果が得られる。

1. $\gamma\in\mathcal{D}:=\{\gamma\in(0,1):(\mathbf{A4})\text{ is satisfied}\}$ に対して、(0.2) の解 $\hat{v}$ が存在して、次を満たす。

$$\hat{v},\ \frac{\partial\hat{v}}{\partial t},\ D_i\hat{v},\ D_{ij}\hat{v}\in L^p(0,T;L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)),\quad 1<\forall p<\infty.$$

2. $\gamma\in\mathcal{D}$ に対して、

$$\hat{\pi}(t,Y_t):=\frac{1}{1-\gamma}(\sigma(Y_t)\sigma(Y_t)^*)^{-1}\{\mu(Y_t)-r(Y_t)\mathbf{1}+\gamma\sigma(Y_t)\lambda(Y_t)^*D\hat{v}(t,Y_t)\}$$

は (FRS) の最適戦略で、$\Gamma_T(\gamma)=\hat{v}(0,y)$ が成り立つ。

参考文献

[1] H. Hata (2015) “Risk-sensitive asset management with general factor models”, preprint.
[2] H. Nagai (2003) “Optimal strategies for risk-sensitive portfolio optimization problems for general factor models”, *SIAM J. Cont. Optim.* **41**, 1779–1800, MR1972534.

Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models

新井拓児 (慶應義塾大学経済学部)*

本講演の目的は，数理ファイナンスにおける stochastic volatility モデルの一つである Barndorff-Nielsen and Shephard (BNS) モデルを考え，最適ヘッジ戦略の一つである locally risk-minimizing (LRM) 戦略の具体的表現を導出することである．また，時間が許せば数値計算結果も紹介する．

まず BNS モデルを紹介する．一つの安全資産と一つの危険資産から成る満期 $T > 0$ の市場モデルを考える．簡単のため，安全資産の価格は常に 1 であるとする．危険資産価格は以下の確率過程 S_t で与えられるものとする:

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \left(\mu + \beta\sigma_s^2\right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right\}.$$

ここで，$S_0 > 0, \mu, \beta \in \mathbb{R}, \rho \leq 0$，$W$ は 1 次元ブラウン運動とする．また，

$$d\sigma_t^2 = -\lambda\sigma_t^2 dt + dH_{\lambda t}, \quad \sigma_0^2 > 0,$$

の解によって volatility σ が与えられるものとする．但し，$\lambda > 0$, H はドリフトを持たない subordinator(非減少 Lévy 過程) とする．

次に LRM 戦略について概観しよう．ヘッジの対象となるオプションを 2 乗可積分確率変数 X で与える．市場が完備であれば，$c \in \mathbb{R}$ と可予測過程 ξ が存在し，

$$X = c + \int_0^T \xi_t dS_t$$

を満たす．c は初期費用であり F の価格を与える．また，ξ は F を複製する self-financing(途中で資金の出し入れを行わない) な戦略である．非完備市場では複製戦略が存在しないので，何らかの意味で最適な戦略を探すことになるが，ここでは self-financing ではない完全複製戦略の中で，追加資金の L^2-ノルムが最小になる戦略を考える．より具体的には，時刻 t における投資家の安全資産の保有量を η_t, 危険資産の保有量を ξ_t とすると，投資家の富は $V_t = \eta_t + \xi_t S_t$ となる．時刻 t までの累積追加資金を C_t と書くと，$C_t = V_t - \int_0^t \xi_s dS_s$ が成立する．何故ならば，右辺第 2 項は危険資産への投資によって得られた利得を表しているからである．但し，$C_0 = V_0$ は初期費用である．C_t を用いて F を完全複製するので，

*本講演の一部は，今井悠人氏 (早稲田大学理工学術院)，鈴木良一氏 (慶應義塾大学理工学研究科) との共同研究である．

$F = V_T = C_T + \int_0^T \xi_s dS_s$ が成り立つように C_t を取る．C_t の取り方は η と ξ のペア $\varphi = (\eta, \xi)$ に依存するので $C_t(\varphi)$ と記述し，リスク過程 $R_t(\varphi)$ を

$$R_t(\varphi) := E\left[(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2 \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

と定義する．このとき，あらゆる戦略の中でそのリスク過程が最小になるもの，つまり，任意の複製戦略 $\widetilde{\varphi}$ に対して，$R_t(\varphi) \le R_t(\widetilde{\varphi})$ a.s. for every $t \in [0, T]$, を満たす戦略を risk-minimization と呼ぶ．LRM 戦略はこのような考えをベースに定義されたものだが，数学的にきちんとした定義は複雑なのでここでは述べない．

本講演では，ヘッジの対象となるオプションとして行使価格 $K > 0$ のヨーロピアンコールオプション $X = (S_T - K)^+$ を考え，以下の 2 通りの BNS モデルに対する LRM 戦略の具体的表現を紹介する．

1. $\beta = -\frac{1}{2}$ に制限した場合 ([3])
2. $\rho = 0$ に制限した場合 ([1])

詳細は省くが，Föllmer-Schweizer 分解と呼ばれる 2 乗可積分確率変数の直交分解を求めることが重要であり，そのために Lévy 過程に対する Malliavin 解析を用いる．先行研究である [4] では，多数の複雑な仮定の下，Clark-Ocone 型公式 ([5]) を用いて，Malliavin 微分による LRM 戦略の表現を導出している．1 では，この複雑な条件が満たされているかをチェックすることが主要な課題となる．その際，minimal martingale measure(MMM) と呼ばれる equivalent martingale measure の density が Malliavin 微分可能であることを示す．一方，2 の場合は，S_t が連続になることを利用して，MMM に測度変換した下で Malliavin 解析を定義するというアイデアを用いる．最後に時間があれば，数値計算結果を紹介したい．ここでは [2] で用いた高速フーリエ変換をベースにした方法を用いる．

References

[1] Arai, T. (2015) Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models with volatility risk premium.
Available at http://arxiv.org/abs/1506.01477

[2] Arai, T., Imai, Y. and Suzuki, R. (2015) Numerical analysis on local risk-minimization for exponential Lévy models, to appear in International Journal of Theoretical and Applied Finance.

[3] Arai, T., Imai, Y. and Suzuki, R. (2015) Local risk minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models.
Available at http://arxiv.org/pdf/1503.08589v1

[4] Arai, T and Suzuki, R. (2015) Local risk-minimization for Lévy markets, International Journal of Financial Engineering, Vol. 2, 1550015.

[5] Suzuki, R. (2013) A Clark-Ocone type formula under change of measure for Lévy processes with L^2-Lévy measure, Commun. Stoch. Anal., Vol.7, 383–407.

On the Euler-Maruyama approximation for one-dimensional SDEs with irregular coefficients

Dai Taguchi (Ritsumeikan University)
joint work with
Hoang-Long Ngo (Hanoi National University of Education)

In this talk, we consider the Euler-Maruyama approximation for one-dimensional stochastic differential equations. We provide the strong rate of convergence when the drift coefficient is the sum of a bounded variation function on compact sets and a Hölder continuous function, and the diffusion coefficient is a Hölder continuous function.

Let $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ be a one-dimensional stochastic differential equation (SDE)

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s,\ x_0 \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \tag{1}$$

where $W := (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ is a standard one-dimensional Brownian motion on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Veretennikov [6] show that if the drift coefficient b is bounded measurable and the diffusion coefficient σ is bounded, uniformly elliptic and $1/2 + \alpha$-Hölder continuous for some $\alpha \in [0, 1/2]$, then the equation (1) has a unique strong solution.

One often approximates X by using the Euler-Maruyama scheme which is defined by

$$X_t^{(n)} = x_0 + \int_0^t b\left(X_{\eta_n(s)}^{(n)}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(X_{\eta_n(s)}^{(n)}\right) dW_s,\ t \in [0,T],$$

where $\eta_n(s) = kT/n$ if $s \in [kT/n, (k+1)T/n)$. It is well-known that if the coefficients b and σ are Lipschitz continuous functions, then the Euler-Maruyama scheme has strong rate of convergence $1/2$, that is for any $p > 0$, there exists $C > 0$ such that

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - X_t^{(n)}|^p] \leq \frac{C}{n^{p/2}}.$$

Recently, Yan [7] and Gyöngy and Rásonyi [1] have shown that the strong rate in one-dimensional setting with Hölder continuous diffusion coefficient. Ngo and Taguchi [4] extended the results in [1, 7] for multi-dimensional SDEs with discontinuous drift coefficient (but it is one-sided Lipschitz function).

Halidias and Kloeden [2] prove that if b is increasing, continuous from bellow and σ is a Lipschitz continuous, then $X^{(n)}$ converges to X in L^2-norm. Their proof is based on upper and lower solutions of the SDE and its Euler-Maruyama approximation, so it is difficult to get any rate of convergence by using their approach. Leobacher and Szölgyenyi [3] introduce a clever way to transfer equation (1) with piecewise Lipschitz drift coefficient with finite number of discontinuous points, and Lipschitz continuous diffusion coefficient. Using their transformation technique, the equation (1) is equivalent to SDE with Lipschitz continuous coefficients. Therefore, the new equation can be approximated by its Euler-Maruyama scheme with the standard strong rate of convergence 1/2.

In this talk, we provide the rates of strong convergence of the Euler-Maruyama approximation for SDE (1) when the coefficients b and σ may have a very low regularity which includes every cases of [1, 2, 3, 4, 7]. More preciously, we suppose that the drift coefficient $b = b_A + b_H \in L^1(\mathbb{R})$ is bounded measurable, b_A is a function of bounded variation on compact sets and b_H is a Hölder continuous with $\beta \in (0, 1]$, and the diffusion coefficient σ is bounded, uniformly elliptic and $1/2+\alpha$-Hölder continuous with $\alpha \in [0, 1/2]$. Under these assumptions for the coefficients b and σ, we obtain that the L^1-convergence rate for the Euler-Maruyama scheme is $\frac{\beta}{2} \wedge \alpha$ if $\alpha \in (0, 1/2]$ and $\log n$ if $\alpha = 0$ (Theorem 2.3 of [5]). For the case $b \notin L^1(\mathbb{R})$, we also get the L^1-convergence rate, by using localization arguments, (Theorem 2.4 of [5]). Moerover, we obtain the L^p-sup convergence rate for any $p \geq 1$ (Theorem 2.6, 2.7, 2.8 of [5]).

The idea of proof is to use the Yamada-Watanabe approximation technique, the removal drift method and the Gaussian upper bounded for the density of the Euler-Maruyama approximation.

References

[1] Gyöngy, I. and Rásonyi, M.: A note on Euler approximations for SDEs with Hölder continuous diffusion coefficients. Stochastic. Process. Appl. 121, 2189–2200 (2011).

[2] Halidias, N. and Kloeden, P.E.: A note on the Euler-Maruyama scheme for stochastic differential equations with a discontinuous monotone drift coefficient. BIT 48(1) 51–59 (2008).

[3] Leobacher, G. and Szölgyenyi M.: A numerical method for SDEs with discontinuous drift. BIT Numer. Math. (2015).

[4] Ngo, H-L., and Taguchi, D.: Strong rate of convergence for the Euler-Maruyama approximation of stochastic differential equations with irregular coefficients. To appear in Mathematics of Computation.

[5] Ngo, H-L., and Taguchi, D.: On the Euler-Maruyama approximation for one-dimensional stochastic differential equations with irregular coefficients. Preprint, arXiv:1509.06532 (2015).

[6] Veretennikov, A.Yu.: On strong solution and explicit formulas for solutions of stochastic integral equations. Math. USSR Sb. 39, 387– 403 (1981).

[7] Yan, B. L.: The Euler scheme with irregular coefficients. Ann. Probab. 30, no. 3, 1172–1194 (2002).

Martingale problems for diffusions on metric graphs

TOMOYUKI ICHIBA [1]

We shall extend martingale problems for the Walsh Brownian motion ([1], [3], [4]) on a star graph to those for diffusions on a metric graph $(\mathfrak{G}, \mathfrak{d})$ with a finite number of vertices (cf. [2]).

Here the metric graph $(\mathfrak{G}, \mathfrak{d})$ is a collection of finite or semi-infinite edges $\{e \in \mathfrak{E}\}$ with N vertices $\mathfrak{V} := \{v_k\,,\ k = 1, \ldots, N\}$ for some $N < +\infty$ and metric $\mathfrak{d}$. We assume that the graph is imbedded in the Euclidian space $\mathbb{R}^2$ and that any two edges can only meet at a vertex. The metric $\mathfrak{d}$ is defined in the canonical way as the length of a shortest path between two points in $\mathfrak{G}$ along the edges and the length along each edge is measured with the usual Euclidian metric.

The semi-infinite edges isomorphic to $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ are called external, while the finite edges isomorphic to a finite open interval are called internal. We assign the initial vertex and the terminal vertex for each edge $e \in \mathfrak{E}$ via a map δ. The map δ associates each internal edge e to a pair $(\delta_1(e), \delta_2(e)) \in \mathfrak{V} \times \mathfrak{V}$ with its initial vertex $\delta_1(e)$ and its terminal vertex $\delta_2(e)$. An external edge e has only the initial vertex $\delta_1(e) \in \mathfrak{V}$ and we define $\delta_2(e) = +\infty$ formally. We call $\delta_i(e)\,,\ i = 1, 2$ the end points of $e \in \mathfrak{E}$. We write $v \sim e$, if $v \in \mathfrak{V}$ is one of the end points of $e \in \mathfrak{E}$, and define the set $\mathfrak{E}(v) := \{e \in \mathfrak{E} : v \sim e\}$ for each $v \in \mathfrak{V}$. We also assume that for each point $x \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{V}$ there exist unique $e \in \mathfrak{E}$, $v \in \mathfrak{V}$ and $r \in \mathbb{R}_+$, such that x belongs to the edge $e(x)$ with the initial vertex $v(x)$, the terminal vertex $\delta_2(e(x))$, and the length between x and the initial vertex is $r(x)$ defined by

$$v(x) := \delta_1(e(x))\,, \quad r(x) := \mathfrak{d}(v(x), x)\,; \quad x \in \mathfrak{G}\,. \tag{1}$$

Thus we identify the point $x \in \mathfrak{G}$ in terms of such triplet $(e, v, r) \in \mathfrak{E} \times \mathfrak{V} \times \mathbb{R}_+$, and define each function $g : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ with this coordinate, i.e., $g(x) \equiv g(e, v, r)$, $x \in \mathfrak{G}$.

We consider the class $\mathfrak{D}$ of BOREL-measurable functions $g : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ with the following properties: (i) they are continuous in the topology induced by the metric $\mathfrak{d}$; (ii) for every e, v, the function $r \mapsto g_{e,v}(r) := g(e, v, r)$ is twice continuously differentiable on $(0, \infty)$ and has finite first and second right-derivatives at the origin; (iii) the resulting functions $(e, v, r) \mapsto g'_{e,v}(r)$ and $(e, v, r) \mapsto g''_{e,v}(r)$ are BOREL measurable; and (iv) $\sup_{0<r<K, e\in\mathfrak{E}(v), v\in\mathfrak{V}} |g'_{e,v}(r)| + |g''_{e,v}(r)| < +\infty$ holds for all finite K. For notational simplicity we write

$$G'(x) := g'_{e,v}(r)\,, \quad G''(x) := g''_{e,v}(r) \quad \text{for } x = (e, v, r) \quad \text{with } r > 0 \tag{2}$$

and for each vertex $v \in \mathfrak{V}$ with $e \in \mathfrak{E}(v)$ we define

$$G'(e, v, 0+) := \lim_{x \to v, x \in \mathfrak{E}(v)} (-1)^{i+1} G'(x)\,, \quad \text{if } v = \delta_i(e)\,,\ i = 1, 2\,. \tag{3}$$

Let us consider the canonical space $\Omega := C([0, \infty); \mathbb{R}^2)$ of $\mathbb{R}^2$-valued continuous functions on $[0, \infty)$ endowed with the σ-algebra $\mathcal{F}$ of its BOREL sets. We consider also its coordinate mapping $\omega(\cdot)$ and the natural filtration $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}(t), 0 \le t < \infty\}$ with $\mathcal{F}(t) := \sigma(\omega(s), 0 \le s \le t)$, $0 \le t < \infty$. For each vertex $v \in \mathfrak{V}$ we shall consider a probability measure $\boldsymbol{\nu}_v(\mathrm{d}e)$, $e \in \mathfrak{E}(v)$ on the set $\mathfrak{E}(v)$ of edges. For example, if the total number of edges at v is finite, the measure $\boldsymbol{\nu}_v(\cdot)$ is a discrete probability measure (cf. [2]). In the following we shall construct the diffusion on $\mathfrak{G}$ with drifts $\boldsymbol{b} := \{\boldsymbol{b}(x), x \in \mathfrak{G}\}$, dispersions $\boldsymbol{\sigma} := \{\boldsymbol{\sigma}(x), x \in \mathfrak{G}\}$ and the vertex measures $\boldsymbol{\nu} := \{\boldsymbol{\nu}_v(\cdot), v \in \mathfrak{V}\}$ via the martingale problem associated with $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu})$.

[1] Department of Statistics and Applied Probability, South Hall, University of California, Santa Barbara, CA 93106

Given the vertex measures $\boldsymbol{\nu}$ and BOREL measurable functions $\boldsymbol{b} : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{\sigma} : \mathfrak{G} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ we define for every $g \in \mathfrak{D}$ the process

$$M^g(\cdot;\omega) := g(\omega(\cdot)) - g(\omega_2(0)) - \int_0^{\cdot} \mathcal{L}g(\omega(t)) \cdot \mathbf{1}_{\{\omega(t)\in\mathfrak{E}\}} \mathrm{d}t\,, \tag{4}$$

where with $\boldsymbol{a}(\cdot) := \boldsymbol{\sigma}^2(\cdot)$ and the derivatives in (2) we define the infinitesimal generator

$$\mathcal{L}g(x) := \boldsymbol{b}(x)G'(x) + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(x)G''(x)\,; \quad x \in \mathfrak{G}\,.$$

Local Martingale Problem: For every fixed $\mathrm{x} \in \mathfrak{G}$ to find a probability measure $\mathbb{P}$ on the canonical space $(\Omega, \mathcal{F})$, such that $\omega(0) = \mathrm{x}$ holds $\mathbb{P}$-a.e.; (ii) $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\omega(t)\in\mathfrak{V}\}}\mathrm{d}t \equiv 0$ holds $\mathbb{P}$-a.e.; (iii) for every function $g \in \mathfrak{D}_+$ (respectively, $\mathfrak{D}_0$), the process $M^g(\cdot)$ in (4) is a continuous local submartingale (resp., martingale) with respect to the filtration $\mathbb{F}^\bullet := \{\mathcal{F}(t+), 0 \le t < \infty\}$, where

$$\mathfrak{D}_+(\text{resp., } \mathfrak{D}_0) := \left\{ g \in \mathfrak{D} : \int_{\mathfrak{E}(v)} G'(e, v, 0+)\boldsymbol{\nu}_v(\mathrm{d}e) \ge 0 \ (\text{resp., } \equiv 0)\,,\ v \in \mathfrak{V} \right\}.$$

Proposition. Suppose that the drifts are identically zero and the reciprocal of the dispersion coefficient $r \mapsto \boldsymbol{\sigma}_{e,v}(r) := \boldsymbol{\sigma}(e,v,r) = \boldsymbol{\sigma}(x)$ is locally square integrable, i.e., $\int_K (1/\boldsymbol{\sigma}^2_{e,v}(r))\mathrm{d}r < +\infty$ for every compact subset K of $\overline{e} := e \cup \{\delta_1(e)\} \cup \{\delta_2(e)\}$, $e \in \mathfrak{E}(v)$, $v \in \mathfrak{V}$. Then the local martingale problem associated with the triplet $(0, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu})$ is well-posed.

More generally, under appropriate conditions, by the method of time-change and the scale functions we may construct the diffusion on the graph $\mathfrak{G}$ associated with the triplet $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu})$.

For a fixed initial vertex $v_* \in \mathfrak{V}$ and its neighborhood B (as a subset of $\mathfrak{E}(v_*)$), the local behavior of the resulting coordinate process $X(\cdot,\omega) := \omega(\cdot)$ in B is characterized by the distance $R(\cdot) := r(X(\cdot))$ (defined as in (1)) from the vertex v_* which satisfies

$$\mathrm{d}R(t) = \boldsymbol{b}(X(t))\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(X(t))\mathrm{d}\beta(t) + \mathrm{d}L^R(t)\,; \quad t \ge 0 \tag{5}$$

locally for some Brownian motion $\beta(\cdot)$ and the local time growths

$$\mathrm{d}L^{R^A}(t) = \boldsymbol{\nu}_{v_*}(A) \cdot \mathrm{d}L^R(t)\,; \quad t \ge 0\,, \tag{6}$$

where $L^\xi(\cdot)$ is the semimartingale local time at the origin for the generic semimartingale $\xi(\cdot)$ and $R^A(\cdot) := R(\cdot)\mathbf{1}_{\{e(X(\cdot))\in A\}}$ for every BOREL subset A of $\mathfrak{E}(v_*)$.

This is an extension of the results in [2] from the graph with a finite number of edges to that with possibly uncountable number of edges but still with a finite number N of vertices. We shall also discuss some examples (including the WALSH diffusions with $N = 1$) and further extensions.

References

[1] BARLOW, M., PITMAN, J. & YOR, M. (1989) On Walsh's Brownian motions. *Séminaire de Probabilités XXIII.* Lecture Notes in Mathematics **1372**, 275-293.

[2] FREIDLIN, M. & SHEU, S. (2000) Diffusion processes on graphs: stochastic differential equations, large deviation principle. *Probab. Theory and Relat. Fields* **116** 181-220.

[3] ICHIBA, T., KARATZAS, I., PROKAJ, V. & YAN, M. (2015) Stochastic integral equations for Walsh semimartingales. Preprint available at arXiv: 1515.02504.

[4] WALSH, J. (1978) A diffusion with a discontinuous local time. *Astérisque* **52-53**, 37-45.

保険会社の存続問題 2

西岡 國雄 (中央大学商学部),　中島 禎志 (東京電機大学理工学部),
佐藤 定夫 (東京電機大学理工学部)

1　保険会社の存続問題とは

正の定速ドリフトから, 正の飛躍を持つ複合 Poisson 過程を減じた加法過程 $\{X(t)\}$ (以降 Surplus 過程と呼ぶ) を考える:

$$X(t) = x + \kappa_0\, t - \int_0^t dN(s)\, Z_{N(s)}, \quad x \geq 0. \tag{1.1}$$

ここで, $\kappa_0 > 0$ は定数, $\{N(t), t \geq 0\}$ は平均 γ_0 の Poisson 過程, $\{Z_k, k = 1, 2, \cdots\}$ は共通分布が F の *i.i.d.* r.v.'s で $\{N(t)\}$ とは独立とする.

$\{X(t)\}$ が, 負領域へ到達する最小時刻を T_0 とする. 保険会社の存続問題を扱う Lundberg model では, これが保険会社が倒産する時刻となる. "保険会社の存続問題" とは, "倒産時刻 T_0 および倒産額 $X(T_0)$" と κ_0, x, γ_0 との関数関係を明らかにすることである.

従来は F が, 指数分布およびその類似物以外では 倒産時刻と破産額の同時分布の Laplace–Fourier 変換 $v(x, \alpha, \beta) \equiv \mathbf{E}_x[\exp\{-\alpha\, T_0 + i\,\beta\, X_{T_0}\}]$, $(\alpha > 0,\ \beta \in \mathbf{R}^1)$ の具体型は知られていない (今後 v を "同時分布" と呼ぶ). 本講演では "δ 分布の線形結合" (*cf.*, 定義 2.3, この空間を $\mathcal{D}$ と表記する) であるとき, 倒産時刻と破産額の同時分布の具体型を与える. 更に, $\mathcal{D}$ は確率分布空間で dense であることから, これにより, "一般の F に対する同時分布の具体型" に対する精密な近似定理が得られる.

2　主結果

Surplus 過程 (1.1) に Ito の公式を用いて, 次が得られる.

命題 2.1 (積分微分方程式)**.** $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbf{R}^1$ とするとき, $v(x, \alpha, \beta) = \mathbf{E}_x[\exp\{-\alpha\, T_0 + i\,\beta\, X(T_0)\}]$ は次の積分微分方程式の解: $\widehat{F}(\lambda) \equiv \int_0^\infty dF(y)\; e^{-\lambda\, y}$ とおき

$$\begin{cases} \alpha\, v(x, \alpha, \beta) = \kappa_0\; \partial_x v(x, \alpha, \beta) + \gamma_0 \Big[\displaystyle\int_0^x dF(y)\; \big\{v(x-y, \alpha, \beta) - e^{i\,\beta\,(x-y)}\big\} + \\ \qquad\qquad + e^{i\,\beta\, x}\; \widehat{F}(i\,\beta) - v(x, \alpha, \beta) \Big], \quad x \geq 0, \\ v(x, \alpha, \beta) = e^{i\,\beta\, x}, \quad x < 0. \quad \diamond \end{cases}$$

この積分微分方程式を解くために, x に関して Laplace 変換を行う. $\rho_0 \equiv \gamma_0/\kappa_0$ とおくと,

$$\widehat{v}(\lambda, \alpha, \beta) = \frac{v(0, \alpha, \beta) - \rho_0 \big\{\widehat{F}(i\,\beta) - \widehat{F}(\lambda)\big\}/(\lambda - i\,\beta)}{\lambda - \rho_0 \big\{1 - \widehat{F}(\lambda)\big\} - \alpha/\kappa_0}. \tag{2.1}$$

ただし, (2.1) の右辺, $v(0, \alpha, \beta)$ はまだ未知関数である.

$\{X(t)\}$ の random walk 近似を行い, Feller の補題 ([2], Ch 18, Lemma 1) を適用すると, この $v(0,\alpha,\beta)$ の具体型が得られる:

命題 2.2. 共通分布 F の Fourier 変換を $\widetilde{F}(\xi) = \mathbf{E}[e^{i\,\xi\,Z_1}]$ とおくと,

$$\log\frac{1}{1-v(0,\alpha,\beta)} = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_\alpha^\infty ds\int_{-\infty}^{0-}dx\;e^{i\beta x}\int_{-R}^{R}d\xi\;\frac{e^{-i\xi\,x}}{s-h(\xi)}. \tag{2.2}$$

ここで $h(\xi) \equiv i\xi\,\kappa_0 - \gamma_0 + \gamma_0\,\widetilde{F}(-\xi)$. $\diamond$

定義 2.3. F が "δ 分布の線形結合" とは, ある整数 $M>0$, 定数 $0<a_1<a_2<\ldots<a_M$, および, 定数 $0\le p_k<1,\ k=1,2,\ldots,M\ (p_1+\cdots+p_M=1)$ に対し,

$$dF(x) = \sum_{k=1}^{M} p_k\,\delta(x,a_k)\,dx. \tag{2.3}$$

となることである. 但し $\delta(x,a)$ は "位置 a に単位質量がある δ 関数" を表す. $\diamond$

(2.1) と (2.2) から, 我々の主定理が導かれる. 多重指数の記法を用いて,

定理 2.4 (主定理)**.** 共通分布 F は δ 分布の線形結合 (2.3) とし, $\rho_0 \equiv \dfrac{\gamma_0}{\kappa_0}$, $\zeta \equiv \rho_0 + \dfrac{\alpha}{\kappa_0}$ とする.

$$v(0,\alpha,\beta) = 1-\exp\Big\{-\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}\frac{\mathbf{p}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}\,!}\,\rho_0^{|\mathbf{k}|}\,e^{-i\,\beta\,\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle}\int_0^{\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle}dy\;e^{(i\,\beta-\zeta)\,y}\;y^{|\mathbf{k}|-1}\Big\},$$

$$\begin{aligned}
v(x,\alpha,\beta) &= \mathbf{E}_x\big[\exp\{-\alpha\,T_0 + i\,\beta\,X(T_0)\,\}\big]\\
&= v(0,\alpha,\beta)\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}\frac{\mathbf{p}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}\,!}\,(-\rho_0)^{|\mathbf{k}|}\,\big(x-\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle\big)^{|\mathbf{k}|}\,e^{\zeta\,(x-\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle)}\,I_{\{x>\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle\}} - \\
&\quad +\sum_{\ell=1}^{M}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}\frac{\mathbf{p}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}\,!}\,(-\rho_0)^{|\mathbf{k}|+1}\,p_\ell\times\\
&\quad\times\int_0^\infty dy\;e^{\zeta\,(y-\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle)+i\,\beta\,(x-y-a_\ell)}\,(y-\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle)^{|\mathbf{k}|}\;I_{\{y>\langle\mathbf{k},\mathbf{a}\rangle\}}\;I_{\{0<x-y<a_\ell\}}.
\end{aligned}$$

ここで, $v(x,\alpha,\beta)$ の右辺に現れる $\displaystyle\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}(\quad)$ は有限和であることを注意する. $\diamond$

文献

[1] Cramér, H., Historical review of Fillip Lundberg's work on risk theory, Skand. Aktua. (Suppl.), 52 (1969), 6-12.

[2] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Aplications, Vol. II, John Wiley & Sons, 1971.

[3] Lundberg, F., Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse. Skand. Aktua., 13 (1930), 1-83.

[4] Nishioka, K. and Igarashi, T., Non-ruin probability of an insurer under the Lundberg model, 京都大学, 数理研考究録, 1903 (2014), 140–147.

二つ時間軸を持つ拡散過程の数理人口学への応用

[1] 大泉嶺*, [2] 國谷紀良, [3] 江夏洋一

Ryo Oizumi*, Toshikazu Kuniya, Yoichi Enatsu

[1] 厚生労働省　社会保障・担当参事官室,

[2] 神戸大学システム情報学研究科,[3] 東京理科大学数理情報科学科.

oizumi@ms.u-tokyo.ac.jp

1　概要

数理人口学とは人間に限らず様々な生物個体の持つ性質（年齢、サイズや空間的位置など）からその生物集団全体の動態（人口の増減）を議論の数理生物学分野の一つである．ミクロな粒子の相互作用からマクロな現象（熱力学など）の説明を試みる統計力学の生物学版と考える事も出来る．統計力学との大きな違いは、まず粒子に当たる生物個体の動態は物理的な時刻以外に年齢というもう一つの時刻をもつところにある．物理的な時刻は生物集団全体のマクロ的構造変化に関わる一方、年齢は生物個体の 1 個体の生涯に関わる重要なパラメータである．また、これらの解析にあたり数理生物学者の最大の関心事はどのような生物個体の性質がその集団の中で支配的になるか、という所謂進化を考える事である．また、人口政策からも、施策による生活史の変化と人口動態への影響を調べる事は将来の政治的意思決定に重要な役割を果たすのは明らかである．そこで個体の性質が取り得る空間を $A \subseteq \mathbb{R}^d$ とし、年齢 $a \in (0,\alpha)$ での状態を $X_a \in A$ とする．初期状態を $X_0 = x \in A$ と固定し、一個体の発展方程式は Ito 型確率微分方程式を用いて

$$\begin{cases} dX_a^j(t) = g_j(X_a(t), v_a, \Gamma_{t,x})\,da + \sum_{k=1}^{N} \sigma_{jk}(X_a(t), v_a, \Gamma_{t,x})\,dB_a^k, \quad 1 \le j \le d \\ X_0^j = x^j \end{cases} \tag{1}$$

と書き表せるとする．このとき、

$$dX_a^j(t) := X_{a+\varepsilon}^j(t+\varepsilon) - X_a^j(t)$$

個体が持つ発展過程の制御（繁殖のタイミングや餌を選択する割合）を

$$v = v_a := (v_1(a), v_2(a), \cdots, v_l(a))$$

とし [1]、時刻 t での集団の密度による統計的効果を $\Gamma_{t,x} := \left(\Gamma^1_{t,x}, \Gamma^2_{t,x}, \cdots, \Gamma^m_{t,x}, \cdots, \Gamma^M_{t,x}\right)$ とする．つまり、時刻は各同世代（コホートという）の統計法則を与える役割を果たし、その後、年齢と時刻は同じスケールで変化する（これは例えば、社会的出来事を何歳で経験するかという事などを意味する）．

時刻 t において年齢 a で状態 $y \in A$ にいる集団の密度を $P_t\left(a, x \to y\right)$ とすればその発展過程は以下で与えられる；

$$
\begin{aligned}
P_{t+\varepsilon}\left(a+\varepsilon, x \to y\right) &= \int_A d\xi \; K_{\varepsilon,t}\left(\xi \to y\right) P_t\left(a, x \to \xi\right) \\
P_t\left(0, x \to y\right) &= \underbrace{n_t\left(x\right)}_{\text{新規個体密度}} \times \delta^d\left(x-y\right) \\
n_t\left(x\right) &= \int_0^\alpha \int_A dady \; \underbrace{F\left(y, \Gamma_{t,x}\right)}_{\text{繁殖率}} P_t\left(0, x \to y\right)
\end{aligned}
\quad . \tag{2}
$$

t と a が異なっていても、ε を時刻変数と思えば、1 変数の時間のモデルとみなせる．この時刻を採用して Ito の補題などを用いると nonlocal な非線形偏微分方程式として集団の密度のダイナミクスを確率微分方程式 Eq.(1) と結びついた方程式をえられる．その方程式に関する詳細は本講演に回すが、本研究では上記の方程式における定常状態の進化動態および最適制御を以下の Hamilton–Jacobi–Bellman 方程式

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial a} \tilde{w}_{\lambda,a}\left(x, \Gamma\right) - \inf\limits_{v \in \mathcal{V}} \left\{ \left[\bar{\mathcal{H}}^v_x\left(\Gamma\right) + \lambda \right] \tilde{w}_{\lambda,a}\left(x, \Gamma\right) \right\} = 0 \\
\tilde{w}_{\lambda,\alpha}\left(x, \Gamma\right) = F\left(x, \Gamma\right) \\
\bar{\mathcal{H}}^v_x\left(\Gamma\right) := -\displaystyle\sum_{j=1}^d g_j\left(x, v, \Gamma\right) \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^d c_{jj'}\left(x, v, \Gamma\right) \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^{j'}} + \mu\left(x, v, \Gamma\right) \\
\Gamma \in \mathbb{R}^M_+,
\end{cases} \tag{3}
$$

$$
\tilde{\psi}_\lambda\left(x, \Gamma\right) = \int_0^\alpha da \; \tilde{w}_{\lambda,a}\left(x, \Gamma\right) = 1, \tag{4}
$$

によって解析できる事を具体例を挙げることによって示す．

参考文献

[1] R. Oizumi, Unification theory of optimal life histories and linear demographic models in internal stochasticity, PLOS ONE 9 (6) (2014) e98746.

非勾配型の流体力学極限に現れる
無限直積空間上の完全形式と閉形式

佐々田槙子*，亀谷幸生†

非勾配型の系に対する流体力学極限，および平衡揺動問題において，ミクロな系の確率過程を定める作用素に関する無限直積空間上の閉形式の特徴づけが本質的な役割を果たしている．(cf. [1, 2])

特に，スペクトルギャップの sharp な評価もこの閉形式の特徴づけを示すために用いられており，一般的には，この閉形式の特徴づけの証明が Varadhan による非勾配型の系に対するエントロピー法を用いる際の最も重要かつ難しい部分となる．

閉形式の特徴づけは，その名の通り，多様体における微分形式に類似した概念を無限直積空間上の関数空間に定義し，そのうちの閉形式に対応する関数（または形式）を，それぞれ多様体における完全形式と調和形式に対応するものに分解する定理である．すなわち，ある種のコホモロジー群の特徴づけの問題である．ここで，調和形式の空間の次元とその具体形が重要である．この次元や調和形式の具体形は，ミクロな系を定める確率過程の詳細な性質にはよらない普遍的なものであると考えられているが，これまでの証明ではこの普遍性がなぜ現れるのか明らかになっていなかった．

そこで，本研究では，非勾配型の流体力学極限に現れる閉形式の特徴づけの問題を動機とし，より一般に，無限直積空間上に定まるいくつかの関数空間における "微分 1 形式" を定義し，その閉形式の完全形式と調和形式への分解を具体的に与えた．

本研究により，調和形式の次元や具体形が普遍的である構造が明らかになった．また，これまで $\mathbb{Z}$ および $\mathbb{Z}^d$ による直積空間のみの結果が知られていたが，これを結晶格子による直積空間まで拡張することができた．これにより，結晶格子上の非勾配型排他過程に対する流体力学極限のアプローチが可能になると思われる．

本講演では，Bernoulli 直積測度を可逆測度として持つ排他過程に対応する作用素と，Ginzburg-Landau モデルに対応する作用素についての結果を中心に述べる．他の例については時間が許せば紹介したい．

参考文献

[1] C. Kipnis and C. Landim, *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*, 1999, Springer.

[2] S.R.S. Varadhan, *Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions II*, in Asymptotic Problems in Probability Theory, Stochastic Models and Diffusions on Fractals, Pitman Res. Notes Math. Ser., **283** (1994), 75-128.

*東京大学大学院数理科学研究科, sasada@ms.u-tokyo.ac.jp

†慶應義塾大学理工学部数理科学科

On fluctuations of eigenvalues of Gaussian beta ensembles at high temperature

Trinh Khanh Duy
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

1 Introduction

Gaussian beta ensembles, as generalizations of Gaussian orthogonal ensembles, Gaussian unitary ensembles and Gaussian symplectic ensembles, were initially defined as eigenvalues ensembles with the joint density,

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \propto |\Delta(\lambda)|^\beta e^{-\beta \sum_{i=1}^n V(\lambda_i)} d\lambda = \exp\left(\beta\Big(\sum_{i<j} \ln|\lambda_j - \lambda_i| - \sum_{i=1}^n V(\lambda_i)\Big)\right) d\lambda,$$

where $V(\lambda) = \lambda^2/4$ and $\Delta(\lambda) = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)$ denotes the Vandermonde determinant. They can be also viewed as the equilibrium measure of a one dimensional Coulomb log-gas at the inverse temperature β.

Let

$$L_{n,\beta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{\lambda_j/\sqrt{n}}$$

be the empirical distributions of the scaled Gaussian beta ensembles. Then for fixed β, it is well known that the empirical measures $L_{n,\beta}$ converge weakly to the semicircle distribution, where the semicircle distribution, denoted by sc, is a probability measure supported on $[-2, 2]$ with the density $\sqrt{4-x^2}/(2\pi)$. This means that for any bounded continuous function f,

$$\langle L_{n,\beta}, f\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(\lambda_j/\sqrt{n}) \to \langle sc, f\rangle = \int_{-2}^2 f(x)\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}dx \text{ a.s. as } n \to \infty.$$

The fluctuations around the semicircle distribution were also investigated. More precisely, it was shown in [7] that for a sufficiently nice function f with $\langle sc, f\rangle = 0$,

$$\sum_{j=1}^n f(\lambda_j/\sqrt{n}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2) \text{ as } n \to \infty.$$

Here $\xrightarrow{d}$ denotes the convergence in distribution. Note that beta ensembles with general potential V were considered in [7].

Matrix models for Gaussian beta ensembles were introduced by Dumitriu and Edelman [4]. They are symmetric tridiagonal matrices, also called Jacobi matrices, whose components are independent and are distributed as

$$T_{n,\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}\begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,1) & \tilde\chi_{(n-1)\beta} & & \\ \tilde\chi_{(n-1)\beta} & \mathcal{N}(0,1) & \tilde\chi_{(n-2)\beta} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \tilde\chi_\beta & \mathcal{N}(0,1) \end{pmatrix}.$$

Here $\tilde{\chi}_k$, for $k > 0$, denotes the $(1/\sqrt{2})$-chi distribution with k degrees of freedom or the square root of the gamma distribution $\Gamma(k, 1)$. By those matrix models, Dumitriu and Edelman [5] established the above central limit theorem for polynomials f by different methods.

The limiting behaviour of Gaussian beta ensembles in the regime where $n \to \infty$ with $\beta = 2\alpha/n \to 0$ (α being a positive constant) has been considered recently. It was shown first in [1, 6] that the mean empirical distribution (also the mean spectral measure) converges weakly to a deterministic distribution μ_α, and then in [3] that the empirical distributions $L_{n,\beta}$ themselves converge weakly to the same limit. Namely, for any polynomial p, as $n \to \infty$ with $n\beta = 2\alpha$,

$$\langle L_{n,\beta}, p\rangle \to \langle \mu_\alpha, p\rangle \text{ in probability.}$$

The probability measure μ_α here is the (scaled) measure of associated Hermite polynomial [2]. Note that the support μ_α is the whole real line and the measure μ_α is determined by its moments.

It is the purpose of this talk to investigate the fluctuations of the empirical distributions around μ_α. The main result is as follows.

Theorem 1.1. *For a polynomial p of positive degree, as $n \to \infty$ with $n\beta = 2\alpha$,*

$$\frac{\langle L_n, p\rangle - \mathbb{E}[\langle L_n, p\rangle]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}_p^2).$$

The main tool used here is the martingale difference central limit theorem. It is expected that the central limit theorem should hold for a larger class of 'nice' function f.

References

[1] R. Allez, J-P. Bouchaud, and A. Guionnet: *Invariant beta ensembles and the Gauss-Wigner crossover,* Physical review letters **109** (2012), no. 9, 094102.

[2] R. Askey and J. Wimp: *Associated Laguerre and Hermite polynomials*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **96** (1984), no. 1-2, 15–37.

[3] F. Benaych-Georges, S. Péché: *Poisson statistics for matrix ensembles at large temperature,* J. Stat. Phys. **161** (2015), no. 3, 633–656.

[4] I. Dumitriu and A. Edelman: *Matrix models for beta ensembles,* J. Math. Phys. **43** (2002), no. 11, 5830–5847.

[5] I. Dumitriu and A. Edelman: *Global spectrum fluctuations for the β-Hermite and β-Laguerre ensembles via matrix models,* J. Math. Phys. **47** (2006), 063302.

[6] T.K. Duy and T. Shirai: *The mean spectral measures of random Jacobi matrices related to Gaussian beta ensembles,* Electron. Commun. Probab. **20** (2015), no. 68, 1–13.

[7] K. Johansson: *On fluctuations of eigenvalues of random Hermitian matrices,* Duke Math. J. **91** (1998), no. 1, 151–204.