

Feynman-Kac penalization problem for critical measure of symmetric stable processes

東北大学大学院理学研究科 和田正樹

2015 年 12 月 16 日

1 考えたい問題及び準備

$\mathbb{M} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \{\mathbb{P}_x\}, \{X_t\})$ を生成作用素 $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ とする $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称 α -安定過程とする。 $p(t, x, y)$ を推移確率密度関数とすると、グリーン核 $G(x, y) = \int_0^\infty p(t, x, y) dt$ が定められる。以下、非負測度 μ はグリーン緊密、すなわち以下の 2 条件が成立しているとする。

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq a} G(x, y) \mu(dy) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|y| > R} G(x, y) \mu(dy) = 0$$

測度 μ と 1 対 1 にルヴューズ対応するような正值連続加法汎関数を A_t^μ とするときファインマン・カッツ汎関数が $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ により与えられ、新たな確率測度 $\mathbb{Q}_{x,t}^\mu$ が次のように定められる。

$$\mathbb{Q}_{x,t}^\mu(B) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]} \int_B \exp(A_t^\mu) \mathbb{P}_x(d\omega), \quad B \in \mathcal{F}_t$$

本講演では、 $\mathbb{Q}_{x,t}^\mu$ の $t \rightarrow \infty$ における極限分布を考察する (以下、ファインマン・カッツ処罰問題という)。そのための準備として、 $\mathbb{M}$ に対応するディリクレ形式を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ とし、測度 μ の大きさを表すための指標を

$$\lambda(\mu) = \inf \left\{ \mathcal{E}(u, u) \mid u \in \mathcal{F}, \quad (u, u)_\mu := \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x) \mu(dx) = 1 \right\}$$

と定め、シュレディンガー形式を $\mathcal{E}^\mu(u, u) = \mathcal{E}(u, u) - (u, u)_\mu$ で与える。

2 先行結果及び主結果

対称安定過程の枠組みでのファインマン・カッツ処罰問題を扱った先行研究の 1 つに、以下の結果がある。

定理 2.1. (竹田 [1, Theorem 1.1])

- (1) $\lambda(\mu) > 1$ (μ が劣臨界的) のとき、シュレディンガー形式 $\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素における調和関数が $h(x) = \mathbb{E}_x[\exp(A_\infty^\mu)]$ で与えられる。乗法汎関数 $L_t^h = \frac{h(X_t)}{h(X_0)} \exp(A_t^\mu)$ により、新たな確率測度 $\mathbb{P}_x^h$ を、有界な $\mathcal{F}_s$ -可測確率変数 Z に対して $\mathbb{P}_x^h[Z] = \mathbb{P}_x[L_s^h Z]$ を満たすものとして定める。このとき、 $t \rightarrow \infty$ で $\frac{\mathbb{E}_x[Z \exp(A_t^\mu)]}{\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]} \rightarrow \mathbb{E}_x^h[Z]$ が成立する (以下、 $\mathbb{Q}_{x,t}^\mu \rightarrow \mathbb{P}_x^h$ と略記する)。

- (2) $\lambda(\mu) < 1$ (μ が優臨界的) のとき、 $\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素の最大固有値 $C(\mu)$ は正である。 $h(x)$ を固有値 $C(\mu)$ に対応する固有関数、乗法汎関数を $L_t^h = e^{-C(\mu)t} \frac{h(X_t)}{h(X_0)} \exp(A_t^\mu)$ とすると、 $\mathbb{Q}_{x,t}^\mu \rightarrow \mathbb{P}_x^h$ である。
- (3) $\lambda(\mu) = 1$ (μ が臨界的) のとき、更に

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(|x|^{d-\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(dy)}{|x-y|^{d-\alpha}} \right) < \infty \quad (2.1)$$

を満たすとする。このとき、 $h(x)$ を $\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素における調和関数、すなわち $\mathcal{E}^\mu(h, h) = 0$ を満たす関数として、乗法汎関数を $L_t^h = \frac{h(X_t)}{h(X_0)} \exp(A_t^\mu)$ とすると、 $\mathbb{Q}_{x,t}^\mu \rightarrow \mathbb{P}_x^h$ である。

μ が臨界的な場合に課される条件 (2.1) はチャコン・オルンシュタイン型のエルゴード定理を適用する上での十分条件としての役割を果たしていた。更に [1] では、この処罰問題の結果を応用して $d/\alpha > 2$ におけるファインマン・カッツ汎関数 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の $t \rightarrow \infty$ での増大度を求めている。然るに、[2] では $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の増大度が $d/\alpha > 2$ の場合以外にも確立されており、その結果を応用すれば、チャコン・オルンシュタイン型のエルゴード定理を適用することなく、条件 (2.1) を緩めた条件下で処罰問題の結果が得られた。

定理 2.2. (W. 2015) 定理 2.1 (3) は、 μ が次の条件を満たすときにも正しい。

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} G(x, y) \mu(dy) \mu(dx) < \infty. \quad (2.2)$$

尚、(2.1) $\Rightarrow$ (2.2) は、 $G(x, y) = c_1 |x - y|^{\alpha-d}$ 及びグリーン緊密の定義から得られるが、逆が成立しない例は次のように構成できる。

例 2.3. (W. 2015) m をルベグ測度、 $\mu(dx) = \frac{m(dx)}{1 + |x|^d}$ とすると、 μ は (2.1) を満たさず (2.2) を満たす。

定理 2.2 を示すためには、ファインマン・カッツ汎関数の時間無限大での増大度を扱った [2, Theorem 1.1] を拡張して得られる以下の補題がカギになる。

補題 2.4. (W. 2015) μ は臨界的で (2.2) を満たすとする。このとき、 $h(x)$ を $\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素における調和関数とし、 ν をグリーン緊密で有限な非負測度とすると、 $t \rightarrow \infty$ で以下の漸近挙動が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[e^{A_t^\mu} \right] &\sim \frac{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha} - 1)\pi)}{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{\alpha}) \langle \mu, h \rangle} h(x) t^{\frac{d}{\alpha}-1}, & \mathbb{E}_\nu \left[e^{A_t^\mu} \right] &\sim \frac{\alpha \Gamma(\frac{d}{2}) \sin((\frac{d}{\alpha} - 1)\pi) \langle \nu, h \rangle}{2^{1-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{\alpha}) \langle \mu, h \rangle} t^{\frac{d}{\alpha}-1}, & (1 < d/\alpha < 2) \\ \mathbb{E}_x \left[e^{A_t^\mu} \right] &\sim \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \langle \mu, h \rangle} h(x) \frac{t}{\log t}, & \mathbb{E}_\nu \left[e^{A_t^\mu} \right] &\sim \frac{\Gamma(\alpha + 1) \langle \nu, h \rangle}{2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \langle \mu, h \rangle} \frac{t}{\log t}, & (d/\alpha = 2) \\ \mathbb{E}_x \left[e^{A_t^\mu} \right] &\sim \frac{\langle \mu, h \rangle}{(h, h)_m} h(x) t, & \mathbb{E}_\nu \left[e^{A_t^\mu} \right] &\sim \frac{\langle \mu, h \rangle \langle \nu, h \rangle}{(h, h)_m} t, & (d/\alpha > 2) \end{aligned}$$

定理 2.2 は、 $\mathcal{F}_s$ -可測な有界確率変数 Z に対し、 $\nu(B) = \mathbb{E}_x[Z \exp(A_s^\mu) : X_s \in B]$ として補題 2.4 を適用すれば得られる。尚、[2, Theorem 1.1] では、コンパクトな台をもつ μ について、 $\mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu)]$ の漸近挙動のみを扱っていた点で補題 2.4 よりも限定的であった。時間が許す限り、その拡張方法についても触れたい。

参考文献

- [1] Takeda, M.: Feynman-Kac penalisations of symmetric stable processes, Elect. Comm. in Probab. 15, 32–43, (2010).
[2] Takeda, M and Wada, M.: Large time asymptotics of Feynman-Kac functionals for symmetric stable processes, preprint.

ON DOUBLY FELLER PROPERTY OF RESOLVENT

MILA KURNIAWATY, KAZUHIRO KUWAE AND KANEHARU TSUCHIDA
KUMAMOTO UNIVERSITY, FUKUOKA UNIVERSITY AND NATIONAL DEFENSE ACADEMY

1. PRELIMINARY

Let (E, d) be a locally compact separable metric space, $E_\partial := E \cup \{\partial\}$ its one point compactification, $\mathcal{B}(E)$ its Borel σ -field on E , and $\mathcal{B}(E_\partial)$ Borel σ -field on E_∂ . It is well-known that $\mathcal{B}(E_\partial) = \mathcal{B}(E) \cup \{B \cup \{\partial\} \mid B \in \mathcal{B}(E)\}$. Any function f defined on E is extended to E_∂ by setting $f(\partial) = 0$. Denote by $\mathcal{B}_b(E)$ (resp. by $C_b(E)$), the family of bounded Borel functions on E (resp. the family of bounded continuous functions on E), and by $C_0(E)$ (resp. by $C_\infty(E)$), the family of continuous functions on E with compact support (resp. the family of continuous functions on E vanishing at infinity). Consider a Hunt process $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_\infty, X_t, \zeta, \mathbf{P}_x)_{x \in E_\partial}$ defined on E_∂ and denote by $(P_t)_{t \geq 0}$ (resp. $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$) its transition semigroup (resp. its resolvent kernel), that is, $P_t f(x) = \mathbf{E}_x[f(X_t)] = \int_\Omega f(X_t(\omega)) \mathbf{P}_x(d\omega)$ (resp. $R_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x) dt$) for $f \in \mathcal{B}_b(E_\partial)$. Here $\zeta := \inf\{t \geq 0 \mid X_t = \partial\}$ is the life time of $\mathbf{X}$ and ∂ is a cemetery point of $\mathbf{X}$, that is, $X_t = \partial$ for all $t \geq \zeta$ under $\mathbf{P}_x$ for $x \in E$. The resolvent $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ of $\mathbf{X}$ is said to have the *Feller property* if the following two conditions are satisfied:

- (i)' For each $\alpha > 0$ and $f \in C_\infty(E)$, we have $R_\alpha f \in C_\infty(E)$.
- (ii)' For each $f \in C_\infty(E)$ and $x \in E$, we have $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha R_\alpha f(x) = f(x)$.

It is known that (i)' and (ii)' together imply

- (iii)' For each $f \in C_\infty(E)$, we have $\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\|_\infty = 0$.

The resolvent $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ is said to have the *strong Feller property* if

- (iv)' For each $f \in \mathcal{B}_b(E)$ and $\alpha > 0$, we have $R_\alpha f \in C_b(E)$.

The Hunt process $\mathbf{X}$ is said to have the *doubly resolvent Feller property* if its resolvent enjoys the both of Feller property and strong Feller property. $\mathbf{X}$ is said to be a *doubly resolvent Feller process* if it enjoys the doubly resolvent Feller property.

For each $B \in \mathcal{B}(E)$, denote by σ_B the *hitting time to B*; $\sigma_B := \inf\{t > 0 \mid X_t \in B\}$ and by τ_B the *first exit time from B*; $\tau_B := \inf\{t > 0 \mid X_t \notin B\}$. Note that $\tau_B = \sigma_{E \setminus B} \wedge \zeta$.

Let $\partial^* B$ be the boundary of B in E_∂ . We set $C_\infty(B) := \{f \in C(B) \mid \lim_{x \rightarrow z \in \partial^* B} f(x) = 0\}$. The open set B is said to be *regular* if for each $z \in \partial^* B \cap E$, we have $\mathbf{P}_z(\sigma_{E \setminus B} = 0) = 1$.

2. DOUBLY RESOLVENT FELLER PROPERTY WITH MULTIPLICATIVE FUNCTIONALS

Let $(Z_t)_{t \geq 0}$ be a multiplicative functional associated with $\mathbf{X}$. Namely, for each $x \in E$, $\mathbf{P}_x$ -a.s.: $Z_0 = 1$, $0 \leq Z_t < \infty$, $Z_t \in \mathcal{F}_t$ for $t \geq 0$; and $Z_{t+s} = Z_s \cdot (Z_t \circ \theta_s)$, for all $t, s \geq 0$. Fix a non-empty open set B . We now impose a set of special conditions to $(Z_t)_{t \geq 0}$ as follows:

- (a)_B For some $t > 0$, $a_t^B := \sup_{x \in B} \sup_{s \in [0, t]} \mathbf{E}_x[Z_s : s < \tau_B] < \infty$.
- (a)_B^{*} There exists $p > 1$ such that $a_t^B(p) := \sup_{x \in B} \sup_{s \in [0, t]} \mathbf{E}_x[Z_s^p : s < \tau_B] < \infty$ for some $t > 0$.

- (b) $_B^w$ For each $t > 0$ and any compact subset K of B , there exists a number $p = p(K, t) > 1$ such that $\sup_{x \in K} \mathbf{E}_x [Z_t^p] < \infty$.
- (b) $_B^s$ For each $t > 0$, there exists a number $p = p(t) > 1$ such that $\sup_{x \in B} \mathbf{E}_x [Z_t^p] < \infty$.
- (c) $_B^w$ For any relatively compact open subset D of B , we have $\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in D} \mathbf{E}_x [|Z_t - 1| : t < \tau_D] = 0$.
- (c) $_B^s$ $\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in B} \mathbf{E}_x [|Z_t - 1| : t < \tau_B] = 0$.

Theorem 2.1 (Compare [1, Theorem 1.4]). *Let $\mathbf{X}$ be a doubly resolvent Feller process and B an open subset of E . Under (a) $_B$, (b) $_B^w$ and (c) $_B^w$, for any $\alpha > \alpha_0^B := \inf_{s \in]0, \infty[} \log(a_s^B)^{1/s} \geq 0$, $S_\alpha^B f(x) := \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau_B} e^{-\alpha t} Z_t f(X_t) dt \right]$ satisfies $S_\alpha^B f \in C_b(B)$ for $f \in \mathcal{B}_b(B)$.*

Theorem 2.2 (Compare [1, Theorem 1.4]). *Let $\mathbf{X}$ be a doubly resolvent Feller process and B an open subset of E . Suppose that B is regular. Under (a) $_B$, (b) $_B^s$ and (c) $_B^s$, for any $\alpha > \alpha_0^B := \inf_{s \in]0, \infty[} \log(a_s^B)^{1/s} \geq 0$, we have $S_\alpha^B f \in C_\infty(B)$ and $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha S_\alpha^B f(x) = f(x)$ for $f \in C_\infty(B)$ and $x \in B$. Suppose further that B is relatively compact and assume (a) $_B^*$ or there exists an open set C with $\overline{B} \subset C$ such that (c) $_C^s$ holds. Then $S_\alpha^B f \in C_\infty(B)$ for $f \in \mathcal{B}_b(B)$.*

3. DOUBLY RESOLVENT FELLER PROPERTY OF TIME CHANGED PROCESS

Assume that $\mathbf{X}$ is an $\mathbf{m}$ -symmetric Markov process on E whose Dirichlet form $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ on $L^2(E; \mathbf{m})$ is regular. Let $S_1(\mathbf{X})$ be the family of positive smooth measures in the strict sense, that is, any $\nu \in S_1(\mathbf{X})$ is a Revuz measure of a PCAF B_t in the strict sense: $\int_E f(x) \nu(dx) = \uparrow \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbf{E}_\mathbf{m} \left[\int_0^t f(X_s) dB_s \right]$. A measure $\nu \in S_1(\mathbf{X})$ is said to be in the *Kato class* of $\mathbf{X}$ if $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} R_\alpha \nu(x) = 0$ and $\nu \in S_1(\mathbf{X})$ is said to be in the *local Kato class* of $\mathbf{X}$ if $\mathbf{1}_G \nu$ is of Kato class for any relatively compact open set G . Denote by $S_K^1(\mathbf{X})$ (resp. $S_{LK}^1(\mathbf{X})$) the family of measures of Kato class (resp. local Kato class).

For $\nu \in S_1(\mathbf{X})$ and its associated PCAF B in the strict sense, let $(\tilde{\mathbf{X}}, \nu)$ be the time changed process defined by $(\tilde{\mathbf{X}}, \nu) := (\Omega, X_{\tau_t}, \mathbf{P}_x)_{x \in \tilde{Y}}$, where $\tau_t := \inf\{s > 0 \mid B_s > t\}$ is the right continuous inverse of the PCAF B_t and $\tilde{Y}$ is the fine support of ν defined by $\tilde{Y} := \{x \in E \mid \mathbf{P}_x(R = 0) = 1\}$ with $R := \inf\{t > 0 \mid B_t > 0\}$. It is known that $(\tilde{\mathbf{X}}, \nu)$ is a ν -symmetric right process on $\tilde{Y}$ and it can be realized as a Hunt process on $Y := \text{supp}[\nu]$ (consequently on $\tilde{Y}$) (see [2, 3]).

Theorem 3.1. *Suppose that $\mathbf{X}$ enjoys the doubly Feller property of resolvent. Assume $\nu \in S_{LK}^1(\mathbf{X})$. Then the time changed process $(\tilde{\mathbf{X}}, \nu)$ enjoys the doubly Feller property of resolvent. More strongly, $\tilde{R}_\beta \varphi(x) := \mathbf{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\beta B_t} \varphi(X_t) dB_t \right]$ satisfies $\tilde{R}_\beta \varphi \in C_b(E)$ (resp. $\tilde{R}_\beta \varphi \in C_\infty(E)$) for $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$ (resp. $\varphi \in \mathcal{B}_b(E)$ having compact support) and $\beta > 0$.*

REFERENCES

- [1] Z.-Q. Chen and K. Kuwae, *On doubly Feller property*, Osaka J. Math. **46**, (2009), no. 4, 909–930.
- [2] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Second revised and extended edition. de Gruyter Studies in Mathematics, **19**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.
- [3] K. Kuwae and S. Nakao, *Time changes in Dirichlet space theory*, Osaka J. Math. **28** (1991), no. 4, 847–865.

A REFINEMENT OF ANALYTIC CHARACTERIZATIONS OF GAUGEABILITY FOR GENERALIZED FEYNMAN-KAC FUNCTIONALS

桑江一洋 (K. Kuwae) 福岡大学理学部

1. STATEMENT OF RESULT

この講演では金大弘氏と Mila Kurniawaty 氏との共同研究 [2] に基づき、金氏との結果 [3] における条件が改善できたことを報告する。\$(E, d)\$ を局所コンパクト可分距離空間、\$E_\partial\$ をその一点コンパクト化とし、\$\mathbf{m}\$ を \$\text{supp}[\mathbf{m}] = E\$ を満たす \$E\$ 上の正值 Radon 測度とする。\$\mathcal{B}(E)\$ を \$E\$ 上のボレル集合の全体、\$\mathcal{B}(E)\$ を \$E\$ 上のボレル関数の全体、\$\mathcal{B}_b(E)\$ を \$E\$ 上の有界ボレル関数の全体とする。\$\mathbf{X} = (\Omega, X_t, \zeta, \{\mathbf{P}_x\}_{x \in E})\$ を \$E\$ 上の \$\mathbf{m}\$-対称で**過渡的** (transient) なマルコフ過程とし、**既約性**の条件 **(I)** と**絶対連続性**の条件 **(AC)** を仮定する (これらの条件は講演内で言及する)。\$(\mathcal{E}, \mathcal{F})\$ を \$\mathbf{X}\$ に対応する正則な対称ディリクレ形式とする。

\$A_t^\mu\$ を時間に関して局所有界変動な連続加法的汎関数で \$\mu = \mu_1 - \mu_2\$ を対応する符号値 smooth 測度とし、\$A_t^F := \sum_{s \leq t} F(X_{s-}, X_s)\$ を直積空間 \$E \times E\$ 上の対称で対角線上で退化する非負有界ボレル関数 \$F_1, F_2\$ で定義される \$F = F_1 - F_2\$ に対応する非局所型加法汎関数とする。\$(N, H)\$ をマルコフ過程 \$\mathbf{X}\$ の Lévy 系とする。\$R_\alpha(x, y) := \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x, y) dt\$ を \$\alpha\$-位のレゾルヴェント核、0-位のレゾルヴェント核を**グリーン核**または**グリーン関数**という。

\$S_K^1(\mathbf{X})\$ (resp. \$S_D^1(\mathbf{X})\$) を**加藤クラス** (resp. **ディンキンクラス**) の測度の全体とする：

- \$\mu \in S_K^1(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} \int_E R_\beta(x, y) \mu(dy) = 0\$.
- \$\mu \in S_D^1(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{\iff} \sup_{x \in E} \int_E R_\alpha(x, y) \mu(dy) < \infty\$ for \$\forall / \exists \alpha > 0\$.

0-位のディンキンクラス測度を**グリーン有界測度**といい、その全体を \$S_{D_0}^1(\mathbf{X})\$

で表す： \$\mu \in S_{D_0}^1(\mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{\iff} \sup_{x \in E} \int_E R(x, y) \mu(dy) < \infty\$.

\$u \in \mathcal{F} \cap C_\infty(E)\$ で \$\mu_{\langle u \rangle} \in S_D^1(\mathbf{X})\$ を満たすものに対し、\$N_t^u\$ を \$u(X_t) - u(X_0)\$ の**福島分解公式** ([1]) で出現するエネルギー零の連続加法的汎関数とする：

$$(1.1) \quad u(X_t) - u(X_0) = M_t^u + N_t^u \quad t \in [0, +\infty[\quad \mathbf{P}_x\text{-a.s. for all } x \in E.$$

ここで \$M_t^u\$ は福島分解 (1.1) の**エネルギー有限なマルチンゲール加法的汎関数** と呼ばれる。加法的汎関数 \$A_t := N_t^u + A_t^\mu + A_t^F\$ を考え、

$$(1.2) \quad e_A(t) := \exp(A_t), \quad t \geq 0$$

とする。乗法的汎関数 (1.2) は一般化されたファインマン・カッツ半群 \$(P_t^A)_{t \geq 0}\$ を定める：

$$(1.3) \quad P_t^A f(x) := \mathbf{E}_x[e_A(t) f(X_t)], \quad f \in \mathcal{B}_b(E), \quad t \geq 0.$$

\$\mu_{\langle u \rangle} + \mu_1 + \mu_2 + N(F_1 + F_2) \mu_H \in S_D^1(\mathbf{X})\$ とする。\$(\mathcal{Q}, \mathcal{F})\$ を (1.3) に対応する \$L^2(E; \mathbf{m})\$ 上の閉 2 次形式とする。それは \$u\$ のエネルギー測度 \$\mu_{\langle u \rangle}\$ と Lévy

系 (N, H) を用いて次で与えられる:

$$(1.4) \quad \mathcal{Q}(f, g) := \mathcal{E}(f, g) + \mathcal{E}(u, fg) - \mathcal{H}(f, g) \quad f, g \in \mathcal{F}.$$

ここで

$$\mathcal{E}(u, fg) := \frac{1}{2} \int_E f d\mu_{\langle u, g \rangle} + \frac{1}{2} \int_E g d\mu_{\langle u, f \rangle},$$

$$\mathcal{H}(f, g) := \int_E f(x)g(x)\mu(dx) + \int_E \int_E f(x)g(y)(e^{F(x,y)} - 1)N(x, dy)\mu_H(dx).$$

測度 $\eta \in S_{D_0}^1(\mathbf{X})$ に対し,

$$(1.5) \quad \lambda^{\mathcal{Q}}(\eta) := \inf \left\{ \mathcal{Q}(f, f) \mid f \in \mathcal{F} \cap C_0(E), \int_E f^2 d\eta = 1 \right\}.$$

測度 $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_1^*$ を $\bar{\mu}_1 := N(e^{F+U} - (F+U) - 1 + F_1)\mu_H + \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_{\langle u \rangle}^c$, $\bar{\mu}_1^* := N(e^{F_1+U} - (F_1+U) - 1 + F_1)\mu_H + \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_{\langle u \rangle}^c$ で定める. ここで $U(x, y) := u(x) - u(y)$ であり, $\mu_{\langle u \rangle}^c$ は u のエネルギー測度 $\mu_{\langle u \rangle}$ の連続部分である.

$S_{NK_1}^1(\mathbf{X})$ を自然な半グリーン緊密な拡張加藤クラス測度の全体, $S_{NK\infty}^1(\mathbf{X})$ を自然なグリーン緊密な加藤クラス測度の全体とする (これらは講演の中で正確な定義を与える).

定理 1.1 (計測可能性の解析的特徴付). $\bar{\mu}_1^* \in S_{NK_1}^1(\mathbf{X})$, $\mu_{\langle u \rangle} \in S_K^1(\mathbf{X})$ と $\mu_2 + N(F_2)\mu_H \in S_{D_0}^1(\mathbf{X})$ を仮定する. このとき以下は同値になる. (1) $\lambda^{\mathcal{Q}}(\bar{\mu}_1) > 0$. (2) $\sup_{x \in E} \mathbf{E}_x[e_A(\zeta)] < \infty$ (計測可能性).

$S_{CS_1}^1(\mathbf{X})$ を条件付半グリーン緊密な拡張加藤クラス測度の全体, $S_{CS\infty}^1(\mathbf{X})$ を条件付きグリーン緊密な加藤クラス測度の全体, $S_{DS_0}^1(\mathbf{X})$ を条件付きグリーン有界な測度の全体, , また $\text{semi-}S_K^1(\mathbf{X})$ を半条件付加藤クラス測度の全体とする (これらも講演の中で正確な定義を与える).

定理 1.2 (劣臨界性の解析的特徴付). $\bar{\mu}_1^* \in S_{CS_1}^1(\mathbf{X})$, $\mu_{\langle u \rangle} \in S_K^1(\mathbf{X}) \cap \text{semi-}S_K^1(\mathbf{X})$ と $\mu_2 + N(F_2)\mu_H \in S_{DS_0}^1(\mathbf{X})$ を仮定する. $R^A(x, y)$ を P_t^A に対応するグリーン核とする. このとき以下は同値になる.

- (1) $\lambda^{\mathcal{Q}}(\bar{\mu}_1) > 0$. (2) $\sup_{x \in E} \mathbf{E}_x[e_A(\zeta)] < \infty$ (計測可能性).
(2) $R^A(x, y) < \infty$ for $(x, y) \in E \times E \setminus d$ (劣臨界性).

ここで $d := \{(x, y) \mid R(x, y) = +\infty\}$. さらに追加条件を仮定すれば (1)-(3) は R^A と R が比較可能な条件と **条件付計測可能性** $\sup_{(x,y) \in E^2 \setminus d} \mathbf{E}_x^y[e_A(\zeta^y)] < \infty$ とも同値になる.

REFERENCES

- [1] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Second revised and extended edition. de Gruyter Studies in Mathematics, **19**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.
- [2] D. Kim, M. Kurniawaty and K. Kuwae, *A refinement of analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals*, preprint, 2015.
- [3] D. Kim and K. Kuwae, *Analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals*, 2015, to appear in Transactions of Amer. Math. Soc.
- [4] D. Kim and K. Kuwae, *General analytic characterization of gaugeability for Feynman-Kac functionals*, preprint (2013).

直積加法的汎関数の大偏差原理

防衛大学校 土田兼治

1 序

本講演では、二種類の加法的汎関数の直積についての大偏差原理を考える。ある確率過程の大偏差原理を証明するための有効な方法として Gärtner-Ellis の定理 [2, Theorem 2.3.6] がある。その定理は、

「その確率過程に対する対数モーメント母関数の微分可能性は、その確率過程に対する大偏差原理が成り立つための十分条件である」

ことを主張している。しかし、これは十分条件なので対数モーメント母関数の微分可能性が成立しなくても大偏差原理が成り立つことがある。ここでは、直接的には Gärtner-Ellis の定理は使えないが、その定理を援用することにより加法的汎関数の大偏差原理を証明できることを述べる。

本講演では、Lusin 空間 E 上の既約で過渡的な右過程 $\mathbf{M} = (P_x, X_t, \zeta)$ を考え (ζ は $\mathbf{M}$ の生存時間), $\mathbf{M}$ に関するある滑らかな測度 μ と $E \times E$ 上の有界対称関数 $F(x, y)$ に対する加法的汎関数の大偏差原理を考える。ここで、 A_t^μ は μ に Revuz 対応する連続加法的汎関数とし、 $A_t^F = \sum_{0 < s \leq t} F(X_{s-}, X_s)$ とする。ここではその直積 (A_t^μ, A_t^F) を直積加法的汎関数と呼ぶことにし、その大偏差原理について得た結果を紹介する。 m を E 上の full support な σ -有限測度とし、 $\mathbf{M}$ は m -対称であるものとする。 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $(\mathbf{M}, X_t, \zeta)$ に関する準正則 Dirichlet 形式とする。そして、以下のような非局所的摂動をもつ形式的な Schrödinger 型作用素を考える:

$$\mathcal{H}^{\theta_1 \mu, \theta_2 F} = \mathcal{H} + \theta_1 \mu + \mu_H \mathbf{F}^{\theta_2}, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

ここで、 $\mathcal{H}$ は $\mathbf{M}$ の生成作用素とし、(1) の非局所的摂動項は

$$\mu_H \mathbf{F}^{\theta_2} f(x) := \int_E (e^{\theta_2 F(x, y)} - 1) f(y) N(x, dy), \quad x \in E$$

と表される。また $(N(x, \cdot), H_t)$ は $\mathbf{M}$ に関する Lévy system とし、 μ_H は H の Revuz 測度とする。

2 クラス $\mathbf{K}_\infty, \mathbf{J}_\infty$

ここでは符号付き測度 μ と関数 F のクラスを定義する。

$$\mu_F(dx) = \left(\int_E F(x, y) N(x, dy) \right) \mu_H(dx) \quad (2)$$

とおく。

定義 2.1. (1) μ がクラス $\mathbf{K}_\infty$ に属するとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $|\mu|$ -有限なある Borel 集合 $K = K(\epsilon)$ と定数 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在して、 $|\mu|(B) < \delta$ となるすべての可測集合 $B \subset K$ に対して、

$$\|G(1_{K^c \cup B} |\mu|)\|_\infty < \epsilon$$

(2) F が $E \times E$ 上の有界対称関数で任意の $x \in E$ に対して $F(x, x) = 0$ とする。 μ_F を (2) と定義したとき、 $\mu|_F \in \mathbf{K}_\infty$ であるならば、 F は $\mathbf{J}_\infty$ に属するという。

$\mu \in \mathbf{K}_\infty$, $F \in \mathbf{J}_\infty$ のとき、 $u \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{H}^{\theta_1 \mu + \theta_2 F}$ の二次形式 $(-\mathcal{H}^{\theta_1 \mu, \theta_2 F} u, u)$ が定義でき、

$$\mathcal{E}^{\theta_1 \mu, \theta_2 F}(u, u) = \mathcal{E}(u, u) - \theta_1 \int_E u(x)^2 \mu(dx) - \int_E u(x)^2 \left(\int_E (e^{\theta_2 F(x, y)} - 1) N(x, dy) \right) \mu_H(dx)$$

と表されることが知られている。以下では、 $\mu \in \mathbf{K}_\infty$, $F \in \mathbf{J}_\infty$ の場合だけを考える。

3 対数モーメント母関数

Schrödinger 型作用素 $\mathcal{H}^{\mu, F}$ に対する Feynman-Kac 半群を $T_t^{\mu, F}$ とおくと

$$T_t^{\mu, F} f(x) = \mathbb{E}_x [\exp (A_t^\mu + A_t^F) f(X_t)]$$

となり, これは $L^p(E; m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) 上で定義され強連続対称半群となる. そしてその L^p -スペクトルの下限が存在し, それを

$$\lambda_p(\mathbf{M}, \mu, F) := - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T_t^{\mu, F}\|_{p, p}$$

と書くことにする. 直積加法的汎関数 (A_t^μ, A_t^F) に対する対数モーメント母関数を

$$C(\theta_1, \theta_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x [\exp (\theta_1 A_t^\mu + \theta_2 A_t^F); t < \zeta]$$

と定義する.

4 主定理

$C^*(\lambda_1, \lambda_2)$ を $C(\theta_1, \theta_2)$ の Fenchel-Legendre 変換, つまり,

$$C^*(\lambda_1, \lambda_2) = \sup_{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2} (\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 - C(\theta_1, \theta_2))$$

とする.

定理 4.1 (直積加法的汎関数の大偏差原理). $\mathbf{M}$ を右過程とし, その準正則 *Dirichlet* 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対して, すべての $k \geq 1$ に対して $m(E_k) < \infty$ である E の部分集合からなるコンパクトな $\mathcal{E}$ -nest $\{E_k\}_{k \geq 1}$ が存在するものとする. また, $\mathbf{M}$ はある $t = t_0$ と任意の $k \geq 1$ において $E_k \times E_k$ 上有界であるような推移密度関数 $p(t, x, y)$ をもつものとする. そしてすべての $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\lambda_2(\mathbf{M}; \theta_1 \mu, \theta_2 F) = \lambda_\infty(\mathbf{M}; \theta_1 \mu, \theta_2 F)$ が成り立つと仮定する. そのとき, すべての $x \in E$ とすべての *Borel* 集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ に対し,

$$\begin{aligned} - \inf_{(\lambda_1, \lambda_2) \in B^o} C^*(\lambda_1, \lambda_2) &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\left(\frac{A_t^\mu}{t}, \frac{A_t^F}{t} \right) \in B^o; t < \zeta \right) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x \left(\left(\frac{A_t^\mu}{t}, \frac{A_t^F}{t} \right) \in \overline{B}; t < \zeta \right) \\ &\leq - \inf_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \overline{B}} C^*(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

が成り立つ.

注意 4.1. (1) この定理の証明の概要は講演で述べるが, 先に述べたように直接的に Gärtner-Ellis の定理を用いることはできない.

(2) [1, Theorem 5.4] より, $\lambda_2(\mathbf{M}; 0, 0) \leq 0$ であるとき, 定理 4.1 の仮定 $\lambda_2(\mathbf{M}; \theta_1 \mu, \theta_2 F) = \lambda_\infty(\mathbf{M}; \theta_1 \mu, \theta_2 F)$ が成り立つことが知られている.

参考文献

- [1] Chen, Z.-Q.: Uniform integrability of exponential martingales and spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups, In Stochastic Analysis and Applications to Finance, Essays in Honor of Jia-an Yan. (Eds by T. Zhang and X. Zhou), 2012. pp.55-75.
- [2] Dembo, A., Zeitouni, O.: Large deviations techniques and applications, Second edition, Applications of Mathematics, **38**, Springer-Verlag, New York, (1998).

Free probabilistic analysis of random matrices converging to compact operators

Takahiro Hasebe (Hokkaido University)

Joint work with

Benoit Collins (Kyoto University)

Noriyoshi Sakuma (Aichi University of Education)

Free probability theory was originally developed to attack a problem in operator algebras, but in 1991 Voiculescu has found an unexpected application of free probability to eigenvalues of large random matrices [6]. Among random matrices, the most famous one is the GUE (Gaussian Unitary Ensemble) $G_n = (G_{ij}(n))_{i,j=1}^n$, that is, an $n \times n$ Hermitian matrices whose entries are i.i.d. complex Gaussian random variables. A lot of research has been done on how the random eigenvalues of G_n behave as $n \rightarrow \infty$. A recent progress is a deformation of GUE by a finite-rank perturbation:

$$X_n = G_n + A_n, \tag{*}$$

where G_n is a normalized A_n is an $n \times n$ matrix whose rank is bounded as $n \rightarrow \infty$. The eigenvalues of this model has been studied extensively in the last 10 years, e.g. in [1, 2, 3, 5].

In a recent preprint in 2015 [4], Shlyakhtenko found a free probabilistic method to analyze the above deformation of GUE. We will strengthen Shlyakhtenko's result and allow the rank of the perturbation A_n in (*) to be unbounded. Then we analyze purely discrete eigenvalues of random matrices, e.g. of the form

$$Z_n = G_n A'_n G_n + A_n,$$

where A_n, A'_n are deterministic matrices converging to compact operators as $n \rightarrow \infty$. Since A_n, A'_n converge to compact operators, we show that the eigenvalues of Z_n converge almost surely to a purely discrete spectrum as $n \rightarrow \infty$. We establish a basic free probabilistic method to analyze this kind of purely discrete eigenvalues and then compute explicitly the limiting eigenvalues.

References

- [1] Capitaine, M., Donati-Martin, C. and Féral, D. The largest eigenvalues of finite rank deformation of large Wigner matrices: convergence and nonuniversality of the fluctuations. *Ann. Probab.* 37 (2009), no. 1, 1–47.

- [2] P     , S. The largest eigenvalues of small rank perturbations of Hermitian random matrices. *Probab. Theory Related Fields* **134** (2006), 127–174.
- [3] Pizzo, A., Renfrew, D and Soshnikov, A. On finite rank deformations of Wigner matrices. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **49** (2013), no. 1, 64–94.
- [4] Shlyakhtenko, D. Free probability of type B and asymptotics of finite-rank perturbations of random matrices. arXiv:1509.08841v1
- [5] Tao, T. Outliers in the spectrum of iid matrices with bounded rank perturbations. *Probab. Theory Related Fields*, **155** (2013), no. 1-2, 231–263.
- [6] Voiculescu, D. Limit laws for random matrices and free products. *Invent. Math.* **104** (1991), no. 1, 201–220.

自由レヴィ過程の分布の単峰性について

佐久間紀佳

長谷部 高広 氏（北海道大学）との共同研究 *

平成 27 年 12 月 16 日（水）14:30～15:10

1 背景・概要

$\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 μ が単峰であるとはある $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\mu(dt) = \mu(\{c\})\delta_c(dt) + f(t) dt, \quad (1.1)$$

であることをいう。ここで $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ は $(-\infty, c)$ 上非減少, (c, ∞) 上非増加であるとする。このとき c はモードと呼ばれる。確率過程が単峰であるとはすべての周辺分布が単峰であることとする。自由確率論において単峰性の研究は Biane (1999) によりすべての安定分布が単峰であることを示されたことから始まり、その後, Haagerup and Thorbjørnsen (2014) により自由ガンマ分布が単峰であることが示された。その技術を用いて, Hasebe and Thorbjørnsen (2015) によりすべての自由自己分解可能分布が単峰であることを示された。今回の講演では次のことを解説する

- (U1) 対称自由 Lévy 過程が単峰であることとその周辺分布が自由 Jurek クラスに入ることが同値である。
- (U2) すべての自由 Lévy 過程で有界な台をもつレヴィ測度を持つものは十分大きい時間で単峰な周辺分布を持つようになる。

このことを示すにあたり下記の自由 Lévy 過程の周辺分布の性質も示せた:

- (At) 自由 Lévy–Khintchine 表現を用いて分布が atom を持つ時を特徴づける
- (De) 自由 Lévy–Khintchine 表現を用いて連続な分布になる時を特徴づける

2 自由無限分解可能分布

G_μ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ の Cauchy 変換とする:

$$G_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - x} \mu(dx), \quad z \in \mathbb{C}^+, \quad (2.1)$$

F_μ を G_μ の逆数とする:

$$F_\mu(z) := \frac{1}{G_\mu(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^+, \quad (2.2)$$

* T. Hasebe was supported by Marie Curie Actions – International Incoming Fellowships (Project 328112 ICNCP) and Grant-in-Aid for Young Scientists (B) 15K17549, JSPS. N. Sakuma is supported by Scientific Research(C) 15K04923, JSPS.

これは μ の reciprocal Cauchy transform と呼ばれる.

$$\Gamma_{\lambda,M} := \{z \in \mathbb{C}^+ \mid \operatorname{Im}(z) > M, |\operatorname{Re}(z)| < \lambda \operatorname{Im}(z)\}. \quad (2.3)$$

に対して, Bercovici and Voiculescu (1993) で任意の $\lambda > 0$ に対してある $\alpha, \beta, M > 0$ が存在して F_μ が $\Gamma_{\alpha,\beta}$ で univalent で $F_\mu(\Gamma_{\alpha,\beta}) \supset \Gamma_{\lambda,M}$ であることが示された. そして合成に対する右逆元写像 $F_\mu^{-1}: \Gamma_{\lambda,M} \rightarrow \mathbb{C}^+$, すなわち $\Gamma_{\lambda,M}$ 上 $F_\mu \circ F_\mu^{-1} = \operatorname{Id}$ であるものが取れることを示した.

free cumulant transform (または R -transform と呼ばれる) は以下で定義される:

$$C_\mu(z) = zF_\mu^{-1}(1/z) - 1, \quad 1/z \in \Gamma_{\lambda,M}. \quad (2.4)$$

これは Voiculescu transform の変形でもある:

$$\varphi_\mu(z) := F_\mu^{-1}(z) - z = zC_\mu(1/z), \quad z \in \Gamma_{\lambda,M}. \quad (2.5)$$

C_μ は自由確率論における $\log \hat{\mu}$ の対応物で自由加法畳み込み 田 を線形化する:

$$C_{\mu \boxplus \nu}(z) = C_\mu(z) + C_\nu(z) \quad (2.6)$$

ここで z は両方の定義域の共通部分をとる.

$\mathbb{R}$ 上の確率測度が FID (自由無限分解可能分布) であるとは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して自由畳み込みに関する n^{th} 乗根が存在することである. 自由無限分解可能分布 μ の free cumulant transform に対して自由 Lévy–Khintchine 表現が与えられる:

$$C_\mu(z) = \eta_\mu z + a_\mu z^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-tz} - 1 - tz1_{[-1,1]}(t) \right) \nu_\mu(dt), \quad z \in \mathbb{C}^-, \quad (2.7)$$

ここで $\eta_\mu \in \mathbb{R}, a_\mu \geq 0, \nu_\mu$ は $\mathbb{R}$ 上の測度で以下をみたすもの:

$$\nu_\mu(\{0\}) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \min\{1, t^2\} \nu_\mu(dt) < \infty. \quad (2.8)$$

定義 2.1. μ が FID で ν はその自由 Lévy 測度とする. μ が自由 s -selfdecomposable であるとは ν がモード 0 をもつ単峰な測度であるときとする. 自由 s -selfdecomposable である分布全体の集合を $U(\boxplus)$ と記す. これを自由 Jurek クラスとよぶ.

自由自己分解可能分布は $U(\boxplus)$ の部分集合である.

定理 2.2. μ を対称かつ FID とする. 以下は同値である:

- (1) $\mu^{\boxplus s}$ はすべての $s > 0$ で単峰.
- (2) μ は $U(\boxplus)$ に属する.

定理 2.3. μ を FID で自由レヴィ Lévy 測度 ν が $\operatorname{supp}(\nu) \subset [-M, M]$ をある $M > 0$ に対して満たしているとする. μ は一点分布でないとする. このとき $\mu^{\boxplus s}$ は $s \geq \frac{4M^2}{\sigma^2(\mu)}$ において単峰である. 定数 4 は optimal である.

講演においてはこの結果を得るにあたって示せたこと, 関連する例を交えて上記 2 定理を紹介したい.

参考文献

- [1] T. Hasebe and N. Sakuma(2015+). Unimodality for free Lévy processes. arXiv:1508.01285.

サイクル上のアダマルウォークの周期性について

横浜国立大学大学院工学研究院 竹居 正登

本講演は、今野紀雄氏・清水雄樹氏（横浜国立大学）との共同研究 ([4]) に基づく。

1 サイクル上のアダマルウォーク

$N \geq 3$ に対して、長さ N のサイクルを考える：頂点集合を $C_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ と表すことにする。 2×2 のユニタリ行列 $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U(2) = U(2, \mathbb{C})$ に対応する、サイクル C_N 上の 2 状態量子ウォークを次のように定義する。

- $P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ を用いて $P + Q = U$ と分解する。

- 時刻 $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, 位置 $x \in C_N$ における振幅 (amplitude) を

$$\Psi_n(x) = \begin{bmatrix} \Psi_n^L(x) \\ \Psi_n^R(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ で表し, } \mu_n(x) = |\Psi_n^L(x)|^2 + |\Psi_n^R(x)|^2 \text{ を,}$$

時刻 n で位置 x にウォーカーが観測される「度合い」と考える。

- 振幅の関係式： $\Psi_{n+1}(x) = P\Psi_n(x+1) + Q\Psi_n(x-1)$,

$$\text{すなわち, } \begin{bmatrix} \Psi_{n+1}^L(x) \\ \Psi_{n+1}^R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\Psi_n^L(x+1) + b\Psi_n^R(x+1) \\ c\Psi_n^L(x-1) + d\Psi_n^R(x-1) \end{bmatrix} \text{ と定める.}$$

($x+1, x-1$ は mod N で考える.)

- 次の記号を導入すると $\Psi_n = (U_N^{(s)})^n \Psi_0$ と表すことができる：

$$U_N^{(s)} := \begin{bmatrix} O & P & O & O & \cdots & O & Q \\ Q & O & P & O & \cdots & O & O \\ O & Q & O & P & \cdots & O & O \\ O & O & Q & O & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \cdots & O & P \\ P & O & O & O & \cdots & Q & O \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_n := {}^T \left[\begin{bmatrix} \Psi_n^L(0) \\ \Psi_n^R(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(1) \\ \Psi_n^R(1) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(N-1) \\ \Psi_n^R(N-1) \end{bmatrix} \right] \in (\mathbb{C}^2)^N.$$

Dukes [1] に従って、 $N = 2$ の場合の「サイクル」 C_2 を、2つの点 $0, 1$ とそれらを結ぶ1本の辺からなるグラフとし、 $U_2^{(s)} = \begin{bmatrix} O & U \\ U & O \end{bmatrix}$ と定める。

量子ウォーク全般について、詳しくは [2, 3] を参照：特に、サイクル上の量子ウォークの基本性質については [2] にまとめられている。

2 周期性

n 次の単位行列を I_n と表し,

$$\mathcal{N} := \left\{ n \geq 1 : U_N^{(s)^n} = I_{2N} \right\}$$

とおく：

- $\mathcal{N} \neq \emptyset$ のとき, 「量子ウォークは周期 $T_N := \min \mathcal{N}$ をもつ」という.
- $\mathcal{N} = \emptyset$ のとき, 「量子ウォークは周期をもたない」といい, $T_N = \infty$ とする.

Dukes [1] は, サイクル上の量子ウォークのいくつかのクラスについて周期性を調べた. 特に, ユニタリ行列 U が Hadamard 行列

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

で与えられるアダマールウォークについては,

$$T_2 = 2, \quad T_3 > 30, \quad T_4 = 8, \quad T_8 = 24$$

であるという結果を得た.

3 主結果

定理 3.1 ([4]). サイクル C_N 上のアダマールウォークの周期 T_N は,

$$T_N = \begin{cases} 2 & (N = 2), \\ 8 & (N = 4), \\ 24 & (N = 8), \\ \infty & (N \neq 2, 4, 8) \end{cases}$$

である.

参考文献

- [1] Dukes, P. R. (2014). Quantum state revivals in quantum walks on cycles, Results in Physics 4, 189–197.
- [2] 今野紀雄 (2008). 量子ウォークの数理, 産業図書.
- [3] 今野紀雄 (2014). 量子ウォーク, 森北出版.
- [4] Konno, N., Shimizu, Y., and Takei, M. (2015). Periodicity for the Hadamard walk on cycles, arXiv:1504.06396

1 次元力学系の ESCAPE RATE を表す公式について

高橋 博樹

This is an excerpt from the paper [8] in preparation.

We are concerned with *open systems*, i.e., systems with orbits that escape from a bounded region of phase space in finite time. Open systems are often used as mathematical models of nonequilibrium processes.

Let M be a compact C^∞ Riemannian manifold equipped with a Lebesgue measure m , and $f: M \rightarrow M$ a continuous map. For a Borel subset B of M define

$$\underline{E}(B) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log m \left(\bigcap_{k=0}^n f^{-k}(B) \right)$$

and

$$\overline{E}(B) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log m \left(\bigcap_{k=0}^n f^{-k}(B) \right).$$

Obviously, $\underline{E}(B) \leq \overline{E}(B) \leq 0$. If f satisfies Axiom A and $U \subset M$ a small neighborhood of a basic set Λ , Bowen and Ruelle [2, 3] proved a formula for escape rate

$$\underline{E}(U) = \overline{E}(U) = \sup \left\{ h(\mu) - \sum \lambda_i^+(\mu) : \mu \text{ is an ergodic measure with } \text{supp}(\mu) \subset U \right\},$$

where $h(\mu)$ denotes the entropy, $\sum \lambda_i^+(\mu)$ the sum of positive Lyapunov exponents of μ counted with multiplicity, and $\text{supp}(\mu)$ denotes the support of μ . This number gives the rate of escape from U . In the case where Λ is an Axiom A attractor, no mass can escape and this number is zero. For non-attracting basic sets such as horseshoes, masses escape at exponential rate and this number is negative.

Eckmann and Ruelle [6] conjectured that this type of formula for escape rate still holds for a large class of dynamical systems which do not satisfy Axiom A. Up to present, however, the formula is known to hold only for a handful of such systems: rational maps or C^∞ maps on the interval with preperiodic critical points [5]; uniformly partially hyperbolic systems [9]; uniformly hyperbolic, Anosov or some Billiard systems with small holes (see e.g., [4, 7] and the references therein). On the other hand, a counterexample of C^∞ non-uniformly hyperbolic surface diffeomorphisms was constructed in [1] in which the conjectured formula does not hold.

The aim of this paper is to prove a formula for escape rate for a certain class of real one-dimensional maps. Let $X = [0, 1]$. A differentiable map $f: X \rightarrow X$ is called *of class C^3 with non-flat critical points* if it satisfies the following properties:

- the *critical set* $\text{Crit}(f) = \{x \in X : Df(x) = 0\}$ is nonempty, and f is C^3 on $X \setminus \text{Crit}(f)$;
- each critical point $c \in \text{Crit}(f)$ is *non-flat*, i.e., there exist a number $\ell > 1$, called *the order of f at c* , and C^3 diffeomorphisms ϕ, ψ of $\mathbb{R}$ such that $\phi(c) = \psi(f(c)) = 0$ and for every x in a small neighborhood of c ,

$$|\psi \circ f(x)| = |\phi(x)|^\ell.$$

Let $\mathcal{M}(f)$ denote the set of f -invariant Borel probability measures. For $\mu \in \mathcal{M}(f)$ let $h(\mu)$ denote the entropy of μ , and define the *Lyapunov exponent* $\lambda(\mu)$ by

$$\lambda(\mu) = \int \max \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x)|, 0 \right\} d\mu(x),$$

which is a nonnegative finite number.

Let K be a closed subinterval of X . We consider an open dynamical system $f|_K: K \rightarrow X$. Define

$$\Lambda(K) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(K).$$

This is a compact, forward f -invariant set unless empty. We assume $\Lambda(K) \neq \emptyset$, and consider a dynamical system $f|_{\Lambda(K)}: \Lambda(K) \rightarrow \Lambda(K)$. In addition, we assume that any connected component of $K \cap f^{-1}(K)$ is not a singleton. We say $f|_{\Lambda(K)}$ is *topologically exact* if for any nonempty (relatively) open subset V of $\Lambda(K)$ there exists an integer $n \geq 1$ such that $f^n(V) = \Lambda(K)$.

Define a *pressure function* $t \in \mathbb{R} \mapsto P(K, t)$ by

$$P(K, t) = \sup \{ h(\mu) - t\lambda(\mu) : \mu \in \mathcal{M}(f), \text{supp}(\mu) \subset K \}.$$

Theorem A. *Let $f: X \rightarrow X$ be a map of class C^3 with non-flat critical points. Let K be a closed subinterval of X such that $f|_{\Lambda(K)}$ is topologically exact and all critical points of f in K are extrema. Then*

$$\underline{E}(K) = \overline{E}(K) = P(K, 1).$$

A proof of Theorem A is briefly outlined as follows. We first show that $\underline{E}(K) = \overline{E}(K) = P(K, 1) = 0$, provided there exists a periodic point in K which is not hyperbolic repelling, or $\Lambda(K)$ contains an interval. We then treat the case where all periodic points are hyperbolic repelling and $\Lambda(K)$ contains no interval. The result of Young [9, Theorem 4(1)] gives a lower estimate $\underline{E}(K) \geq P(K, 1)$. A key ingredient for an upper estimate $\overline{E}(K) \leq P(K, 1)$ is to construct a certain horseshoe *at each large inducing time*, by way of diffeomorphic pull-backs of intervals. We then use a Gibbs measure on the horseshoe to estimate from above the Lebesgue measure of the set of points which remain in K up to the inducing time.

If time permits, I will talk about Theorem B on the Hausdorff dimension of $\Lambda(K)$.

REFERENCES

- [1] Baladi, V., Bonatti, C. and Schmitt, B.: Abnormal escape rates from nonuniformly hyperbolic sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. **19**, 1111–1125 (1999)
- [2] Bowen, R.: *Equilibrium states and the ergodic theory for Anosov diffeomorphisms*, Springer Lecture Notes in Math. **470** (1975).
- [3] Bowen, R. and Ruelle, D.: The ergodic theory of Axiom A flows, *Invent. Math.* **29** (1975) 181–202
- [4] Chernov, N., Markarian, R. and Troubetzkoy, S.: Conditionally invariant measures for Anosov maps with small holes. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **18** (1998), 1049–1073.
- [5] Contreras-Barandiarán, G.: Rate of escape of some chaotic Julia sets. *Commun. Math. Phys.* **133**, 197–215 (1990)
- [6] Eckmann, J.-P. and Ruelle, D.: Ergodic Theory of chaos and strange attractors, *Rev. Modern Physics* **57** (1985), 617–656.
- [7] Lopes, A. and Markarian, R.: Open billiards: invariant and conditionally invariant probabilities on Cantor sets. *SIAM J. Appl. Math.* **56** (1996), 651–680.
- [8] Takahasi, H.: Escape rate in one-dimensional dynamics, in preparation
- [9] Young, L.-S.: Some large deviation results for dynamical systems. *Trans. Amer. Math.* **318** 1990, 525–543.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KEIO UNIVERSITY, YOKOHAMA, 223-8522, JAPAN
E-mail address: hiroki@math.keio.ac.jp

区間力学系における大偏差原理の普遍性について

鄭 容武 (広島大学)*

有界閉区間 $X \subset \mathbb{R}$ 上の可微分写像 $f: X \rightarrow X$ の反復合成によってあたえられる力学系の大偏差原理について考える. 間欠性カオスが現れる Pomeau-Manneville 写像族の力学系に対して, 絶対連続不変確率測度の存在や中心極限定理が成立するかどうかには関わらず, 大偏差原理はいつでも成り立つ [1]. また, 特異点を持つ 2 次写像族の力学系に対して, 十分多くのパラメータにおいて力学系の大偏差原理が成り立つことが知られているが, それは絶対連続不変確率測度が存在して中心極限定理が成立する場合に限られていた [2, 3]. 本講演では, 多項式写像に代表される, 特異点を持つカオス的な可微分力学系に対して, 大偏差原理が成り立つための判定条件について高橋博樹氏 (慶應義塾大学), Juan Rivera-Letelier 氏 (米国 Rochester 大学) との共同研究によって得られた結果を紹介する.

まず, 結果を正確に述べるための準備をする. 有界閉区間 X 上の標準測度として (正規化された) Lebesgue 測度 m をとる. 写像 $f: X \rightarrow X$ に対して (レベル 2 の) 大偏差原理 が成り立つとは, 次を満たす下半連続関数 $I: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ が存在するときをいう:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log m\{x \in X: \delta_x^n \in \mathcal{G}\} \geq -\inf\{I(\nu): \nu \in \mathcal{G}\} \quad \forall \mathcal{G} \subset \mathcal{M} \text{ open};$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log m\{x \in X: \delta_x^n \in \mathcal{K}\} \leq -\inf\{I(\nu): \nu \in \mathcal{K}\} \quad \forall \mathcal{K} \subset \mathcal{M} \text{ closed}.$$

ここで, $\mathcal{M}$ は区間 X 上の Borel 確率測度全体が成すコンパクト距離空間を表し,

$\delta_x^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)}$, ただし δ_y は $y \in X$ に台を持つ Dirac 測度, とする. 大偏差原理

が成り立つとき, 上記の関数 I を レート関数 とよぶ. レート関数のレベル集合がコンパクトであることは $\mathcal{M}$ のコンパクト性から明らかである. 空でない任意の区間 J に対して $f^n(J) = X$ となるように自然数 n がとれるとき $f: X \rightarrow X$ は位相完全 (topologically exact) であるという. 有界閉区間上の位相完全な連続写像は明記性をもつ. 可微分写像 $f: X \rightarrow X$ に対して, $f'(c) = 0$ となる点 $c \in X$ を f の特異点とよび, 有限個の特異点を持つとき f を 多峰写像 (multimodal map) とよぶ. f の特異点 c に対して, 定数 $l_c > 1$ と 微分同相写像 $\phi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ がとれて $\phi(c) = \psi(f(c)) = 0$ かつ c の近傍の点 $x \in X$ について $|\psi(f(x))| = |\phi(x)|^{l_c}$ が成り立つとき c は **non-flat** であるという. また, すべての特異点の組 c_1, c_2 と自然数 j に対して $f^j(c_1) \neq c_2$ のとき f は **critical relation** を持たないという. f の周期点 p に対して, $|(f^k)'(p)| > 1$ のとき p は双曲反発的 (hyperbolic repelling) であるという. ここで, $k \geq 1$ は p の周期, すなわち $f^k(p) = p$ とする.

さて, 本講演の主結果は次のとおりである

定理. 位相完全な C^3 級多峰写像 $f: X \rightarrow X$ は, 特異点がすべて *non-flat* で *critical relation* を持たないとし, 周期点がすべて双曲反発的であると仮定する. このとき,

科学研究費補助金 基盤研究 (C) 課題番号 24540212

*e-mail: chung@amath.hiroshima-u.ac.jp

$f: X \rightarrow X$ に対して大偏差原理が成り立つ. また, レート関数は,

$$I(\mu) = -\inf_{\mathcal{G}} \sup \{F(\nu) : \nu \in \mathcal{G}\}$$

であたえられる. ここで,

$$F(\mu) = \begin{cases} h(\mu) - \int \log |f'| d\mu & \text{if } \mu \text{ is } f\text{-invariant,} \\ -\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$h(\mu)$ は f -不変確率測度 μ に関する測度論的 (Kolmogorov-Sinai) エントロピーである.

この定理では, 従来の可微分力学系のエルゴード論的研究において, 絶対連続不変確率測度の存在や中心極限定理の成立を示すために必要であった Collet-Eckmann 条件や Large derivative 条件といった特異軌道に沿った微分の増大率に関する条件が仮定されていない.

最後に, カオス力学系における大偏差原理の普遍性を示すものとして, 単峰写像の場合について述べておく. 可微分写像 $f: X \rightarrow X$ がただ 1 つの特異点を X の内点として持ち, それが non-flat かつ f の極値点であるとき, f を単峰写像 (**unimodal map**) とよぶ. C^3 級単峰写像 f に対して, その Schwartz 微分 $Sf = (f'''/f') - (3/2)(f''/f')^2$ が負のとき, f を S -単峰写像とよぶ. 例えば, $X = [0, 1]$ 上で 2 次関数 $f(x) = ax(1-x)$, $0 < a \leq 4$ は S -単峰写像である. S -単峰写像の力学系は次の 3 つのタイプに分類される [6]:

- (i) ただ 1 つの吸引周期軌道を持つ;
- (ii) 高々有限回くりこみ可能;
- (iii) 無限回くりこみ可能.

ほとんどすべての S -単峰写像は (i) または (ii) のタイプであり, 絶対連続不変確率測度を持つのは高々有限回くりこみ可能のときである [7]. 一方, 高々有限回くりこみ可能な S -単峰写像が絶対連続不変確率測度を持つとは限らない [5]. それどころか物理測度が存在しない, すなわち (連続関数の時間平均について) 大数の法則が成り立たない例が知られている [4]. 主結果から次のことがわかる.

系. 高々有限回くりこみ可能な S -単峰写像 $f: X \rightarrow X$ に対して (適当なくりこみをとれば) 大偏差原理が成り立つ.

参考文献

- [1] Y. M. Chung, Large deviations on Markov towers. *Nonlinearity* **24** (2011), 1229–1252.
- [2] Y. M. Chung and H. Takahasi, Large deviation principle for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Comm. Math. Phys.* **315** (2012), 803–826.
- [3] Y. M. Chung and H. Takahasi, Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **34** (2014), 1116–1141.
- [4] F. Hofbauer and G. Keller, Quadratic maps without asymptotic measure. *Comm. Math. Phys.* **127** (1990), 319–337.
- [5] S. Johnson, Singular measures without restrictive intervals. *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), 185–190.
- [6] L. Jonker and D. Rand, Bifurcations in one dimension. I. The nonwandering set. *Invent. Math.* **62** (1981), 347–365.
- [7] M. Lyubich, Almost every real quadratic map is either regular or stochastic. *Ann. of Math.* (2) **149** (1999), 319–420.