A Limit Theorem for Superprocesses
超過程に関するある極限定理

Isamu DÔKU
Department of Mathematics, Saitama University

Let $\mathbb{Z}^d$ be a d-dimensional lattice, and each site on $\mathbb{Z}^d$ is occupied by either one of the two species. At each random time, a particle dies and is replaced by a new one, but the random time and the type chosen of the species are assumed to be determined by the environment conditions around the particle. The random function $\eta_t : \mathbb{Z}^d \to \{0,1\}$ denotes the state at time t, and each number of $\{0,1\}$ denotes the label of the type chosen of the two species. When we set $\|y\|_\infty := \max_i y_i$, we define $\mathcal{N}_x := x + \{y : \ 0 < \|y\|_\infty \leqslant r\}$. For $i = 0, 1$, let $f_i(x, \eta)$ be a frequency of type i in the neighborhood $\mathcal{N}_x$ of x for η. For non-negative parameters $\alpha_{ij} \geq 0$, the dynamics of η_t is defined as follows. The state η makes transition

$$0 \to 1 \quad \text{at rate} \quad \frac{\lambda f_1(f_0 + \alpha_{01} f_1)}{\lambda f_1 + f_0}, \tag{1}$$

and it makes transition

$$1 \to 0 \quad \text{at rate} \quad \frac{f_0(f_1 + \alpha_{10} f_0)}{\lambda f_1 + f_0}. \tag{2}$$

The exchange of particles after death is described in the form being proportional to the weighted density between the two species, expressed by a parameter λ. For brevity's sake we shall treat a simple case $\lambda = 1$ only in what follows. For $N = 1, 2, \dots$, let $m_N \in \mathbb{N}$, and we put $\ell_N := m_N \sqrt{N}$, and $\mathbb{S}_N := \mathbb{Z}^d / \ell_N$. While, $W_N = (W_N^1, \dots, W_N^d) \in (\mathbb{Z}^d / m_N) \setminus \{0\}$ is defined as a random vector satisfying

(i) $\mathcal{L}(W_N) = \mathcal{L}(-W_N)$; (ii) $E(W_N^i W_N^j) \to \delta_{ij}\sigma^2 (\geq 0)$ (as $N \to \infty$);
(iii) $\{|W_N|^2\} (N \in \mathbb{N})$ is uniformly integrable.

Here $\mathcal{L}(Y)$ indicates the law of a random variable Y. For the kernel $p_N(x) := P(W_N/\sqrt{N} = x)$, $x \in \mathbb{S}_N$ and $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{S}_N}$, we define the scaled frequency f_i^N as

$$f_i^N(x, \eta) = \sum_{y \in \mathbb{S}_N} p_N(y - x) 1_{\{\eta(y) = i\}}, \qquad (i = 0, 1). \tag{3}$$

We denote by η_t^N the state determined by the scaled frequency depending on α_i^N and p_N. On this account, we may define the associated measure-valued process as

$$X_t^N := \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{S}_N} \eta_t^N(x) \delta_x. \tag{4}$$

For the initial value X_0^N, we assume that $\sup_N \langle X_0^N, 1\rangle < \infty$ and $X_0^N \to X_0$ in $M_F(\mathbb{R}^d)$ as $N \to \infty$, where $M_F(\mathbb{R}^d)$ is the totality of all the finite measures on $\mathbb{R}^d$, equipped with the topology of weak convergence. Let $\{\xi_t^x\}$ be a continuous time random walk with rate N and step distribution p_N starting at a point $x \in \mathbb{S}_N$, and $\{\hat{\xi}_t^x\}$ be a continuous time coalescing random walk with rate N and step distribution p_N starting at a point x. For a finite set $A \subset \mathbb{S}_N$, we denote by $\tau(A)$ the time when all the particles starting from A finally coalesce into a single particle, that is to say, we define $\tau(A) := \inf\{t > 0 : \#\{\hat{\xi}_t^x;\ x \in A\} = 1\}$. Take a sequence $\{\varepsilon_N\}$ of positive numbers such that $\varepsilon_N \to 0$ and $N\varepsilon_N \to \infty$ as $N \to \infty$. Moreover, we suppose that when $N \to \infty$,

$$N \cdot P(\xi^0_{\varepsilon_N} = 0) \to 0 \quad \text{and} \quad \sum_{e \in \mathbb{S}_N} p_N(e, x) \cdot P(\tau(\{0, e\}) \in (\varepsilon_N, t]) \to 0 \quad (\forall t > 0). \tag{5}$$

We also assume now that the following limits exist :

$$\exists \zeta(A) = \lim_{N \to \infty} P\left(\tau(A/\ell_N) \leqslant \varepsilon_N\right) \tag{6}$$

holds for any finite subset $A \subset \mathbb{Z}^d$.

Theorem. Assume that there exists a sequence $\{\varepsilon_N^*\}$ of positive numbers such that $\varepsilon_N^* \to 0$ and $N \cdot \varepsilon_N^* \to \infty$ (as $N \to \infty$), and

$$\gamma_N(x) = \sum_{e \in \mathbb{S}_N} p_N(e, x) \cdot P(\hat{\tau}^N(\{0, e\}) > \varepsilon_N^*), \qquad \gamma_N(x) \to \gamma(x) \quad (N \to \infty).$$

Here $\hat{\tau}^N(A)$ denotes the time at which all particles starting from a set $A \subset \mathbb{S}_N$ have coalesced into a single particle. When P_N denotes the law of a stochastic process $X_\cdot^N$ on the path space Ω_D, then the convergence

$$P_N \quad \Longrightarrow \quad \hat{P}_{X_0} \qquad (N \to \infty) \tag{7}$$

holds, where $\hat{X} = \{\hat{X}_t\} \equiv \{\hat{X}_t^{\gamma(x)}\}$, $t \geq 0$ is an $\mathcal{F}_t$-adapted $M_F(\mathbb{R}^d)$-valued continuous stochastic process defined on the filtered complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, and $\hat{X} = \{\hat{X}_t, \hat{P}_\eta\}$ solves the $(\mathcal{L}_1, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_1))$-martingale problem. Namely, $\hat{X}_0 = \eta \in M_F(\mathbb{R}^d)$ holds $\hat{P}_\eta$ a.s. and

$$F(\hat{X}_t) - F(\hat{X}_0) - \int_0^t \mathcal{L}_1 F(\hat{X}_s) ds \qquad (\forall F = F(\mu) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_1)) \tag{8}$$

is a $\hat{P}_\eta$-martingale with respect to $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. Here $\theta = \theta^1(\beta, \sigma(\cdot)) - \theta^2(\beta, \delta, \sigma(\cdot))$ and

$$\theta^1(\beta, \sigma(\cdot)) := \sum_{A \in S_F} \beta(A)\sigma(A), \qquad \theta^2(\beta, \delta, \sigma(\cdot)) := \sum_{A \in S_F} (\beta(A) + \delta(A))\sigma(A \cup \{0\}).$$

Moreover, $\hat{P}_{X_0}$ is the law of a superprocess $\hat{X}_t^{\gamma(x)}$ with initial measure $\hat{X}_0$. Here $\mathcal{L}_1 F(\mu) = \int A\Phi_1 F d\mu + \int \gamma(x) \Phi_2 F d\mu$ for $\forall F = F(\mu \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_1)$, $\mu \in M_F(\mathbb{R}^d)$, where $A = (\sigma^2/2)\mathit{\Delta} + \theta$, Φ_1 (resp. Φ_2) denotes the first (second) variational derivative w.r.t. μ respectively.

複素葉層構造に付随した拡散過程と葉向正則写像

厚地 淳 (慶応義塾大学経済学部)

$\overline{M}$ を可分距離付け可能空間、S を $\overline{M}$ の閉集合とする。 $M := \overline{M} \setminus S$ が同次元、連結複素多様体 (葉と呼ぶ) の非交和になっている葉層構造を持つとき、$(\overline{M}, \mathcal{L}, S)$ を 特異点を持つ複素葉層構造という。$\mathcal{L}$ は葉の全体を表し, S が特異点集合である。葉層構造に付随した局所座標系の下では、$\dim_{\mathbf{C}} L = l$ とすると M は局所的に $\mathbf{C}^l$ の領域 (葉方向) と横断的方向に対応する位相空間の直積とみることができる。$S = \emptyset$ の時、非特異であるという。この時、単に $(M, \mathcal{L})$ と書くことにする。以下では、$\overline{M}$ はコンパクトであると仮定する。複素葉層構造は、元来、複素領域の微分方程式、力学系の定性的性質の研究から出てきたものであるが、現代の複素解析、複素幾何ではいろいろなところに登場する重要な対象である。このような葉層構造を持つ空間の幾何学的・関数論的性質を拡散過程の目から眺めたい。

1. 葉の上の正則拡散過程.

$L \in \mathcal{L}$ には Hermite 計量 $g = (g_{\alpha\overline{\beta}})$ が与えられており、対応する基本形式を $\omega = \frac{i}{2} g_{\alpha\overline{\beta}} dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$ とする。

g に 対応する複素ラプラシアン (complex Laplacian) を

$$\square_L := 2 \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\overline{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \overline{\partial} z_\beta} \qquad ((g^{\alpha\overline{\beta}}) = g^{-1})$$

で定義する。これを生成作用素にもつ拡散過程を L 上の正則拡散過程と呼ぶことにする。「正則」は holomorphic を意味し、この名は L 上の (局所) 正則関数との合成が複素ブラウン運動の時間変更になることに由来する。また、複素ラプラシアンは L 上の標準接続によるヘッセ行列の g に関するトレースであり、Levi-Civita 接続に対応するリーマン計量に関するラプラシアンとは捩れの分だけ異なる。

2. M 上の葉向正則拡散過程.

g が各葉に沿って滑らかであれば、 各 L 上に正則拡散過程は存在する。これが M 上の拡散過程とみて良いものであるかどうか、例えば、出発点に関しての依存性 - 連続性、可測性 - といったものが成り立つかどうかは自明ではない。g が良い性質を満たし、次項で述べる調和測度が存在すれば、 M 上の拡散過程で各葉上の正則拡散過程と両立するものを構成することができる。なお、本報告では「葉向」=「leafwise」の意味で用いる。最近わが国で使用されるようになった語である。

3. $(M, \mathcal{L}, S)$ に沿った調和カレントと調和測度.

簡単のため、

1) $\overline{M}$ は コンパクト複素多様体 N に含まれており、各 $L \in \mathcal{L}$ は N の複素部分多様体である、とする。

今、U を M の局所座標系 の定義域とし、$U \cong \mathbb{B} \times \mathbb{T}$ ($\mathbb{B}$ は $\mathbf{C}^l$ の領域) とする。$(M, \mathcal{L}, S)$ に沿った (多重) 調和カレント T とは、

$$T = h(a,b)[\mathbb{B} \times \{b\}] d\mu(b).$$

と書けることである。ここで、$[\mathbb{B} \times \{b\}]$ は $\mathbb{B} \times \{b\}$ 上の積分のカレント、$d\mu$ は $\mathbb{T}$ 上の正のラドン測度、$h(a,b)$ は μ-a.e. b に関して変数 a について正の多重調和関数。T は正カレントであり、カレントの意味で $\partial\overline{\partial} T = 0$ が成り立つ。$m := T \wedge \omega^l$ とおくと、g がケーラーならば、L.Garnett の意味で m は調和測度である (ただし、有限測度とは限らない)。

注) $S = \emptyset$ ならば 常に T は存在する。$l = 1$ かつ S が locally pluripolar であれば、調和カレントは存在する。さらに　S が線形化可能であれば、$m(M) < \infty$ となる。

4. ディリクレ形式による構成.

次のような仮定を置く。

2) g は、各葉に沿っては 滑らかな完備ケーラー計量であり、各微分を含めて M 上でボレル可測である。

3) g は次の意味で局所有界である。N 上の連続なエルミート計量の基本形式 ω_0 が存在して、任意の M 上のコンパクト集合 K に対して、$C_K > 0$ があり、 K 上では

$$C_K^{-1} \omega_0 \leq \omega \leq C_K \omega_0.$$

4) 各葉上の g から決まるリッチ曲率は一様に下に有界: $-(2l-1)b^2 \leq Ric_L$.

各葉に沿って C^2 級であり、各階の微分を含めて M 上で連続かつコンパクト台を持つような関数全体を $C^2_{\mathcal{L},o}(M)$ と書くことにする。

$$\mathcal{E}(u,v) := -i \int_M v \partial\overline{\partial} u \wedge \omega^{l-1} \wedge T \qquad (u, v \in C^2_{\mathcal{L},o}(M))$$

とおく。$\mathcal{E}$ の対称部分を $\tilde{\mathcal{E}}$ とすると、$(\tilde{\mathcal{E}}, C^2_{\mathcal{L},o}(M))$ は $L^2(m)$ 上 可閉になることがわかる。$\mathcal{H}^1(T)$ を $C^2_{\mathcal{L},o}(M)$ の $\tilde{\mathcal{E}}$ による閉包とする。

定理 1. $(\mathcal{E}, \mathcal{H}^1(T))$ は $L^2(m)$ 上の強局所正則 (regular) ディリクレ空間となる。対応する拡散過程は保存的である。

5. 葉向正則写像.

この拡散過程を用いて、葉向正則写像を観察する。ボレル可測写像 $f : M \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ が葉向正則とは、各葉上では正則 (holomorphic) であることを言う。例えば次がわかる。

定理 2. 各葉の断面曲率は非正であり、$m := T \wedge \omega^l$ はエルゴード的な確率測度であるとする。$f : M \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を非定数葉向正則写像とすると、f の除外点の個数は $2 + (2l-1)b^2/e(f)$ 以下である. ただし、$e(f) = \int_M T \wedge \omega^{l-1} \wedge f^* \omega_{FS}$ $(\leq \infty)$, ω_{FS} は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ のフビニ-スタディ計量。

なお、$l = 1$ の時はより詳しいことがわかり、例も豊富にある。また、このとき、葉向正則写像 $f : M \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ $(n \geq 2)$ についても類似の結果が得られる。

放物型多様体上の連結和上の熱核評価

石渡　聡 (山形大学理学部)

はじめに

本研究は Bielefeld 大学の Alexander Grigor'yan 氏, Cornell 大学の Laurent Saloff-Coste 氏との共同研究 [2] に基づく.

非コンパクトリーマン多様体上の幾何解析の研究において, 熱核の長時間挙動を明らかにすることは大変重要な意味をもつ. 実際, Ricci 曲率が非負な多様体において, Li-Yau [6] により明らかにされた熱核 $p(t,x,y)$ の Li-Yau 型評価 (LY):

$$p(t,x,y) \asymp \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-b\frac{d^2(x,y)}{t}}$$

はその後 Grigor'yan [1], Saloff-Coste [7] により Poincaré 不等式 (PI) + 体積２倍条件 (VD), および Parabolic Harnack 不等式 (PHI) と同値であることが示され, ベキ零 Lie 群等これらの条件を満たす多様体上の幾何解析の発展に大きく貢献した.

本講演では Li-Yau 型評価が成り立たない多様体の典型的な例である連結和で, 特に end が放物型, 即ち対応するブラウン運動が再帰的であるような場合に, 最近 [2] で得た熱核の詳細な挙動について紹介させて頂きたい.

主結果

M_i, $i=1,\dots,k$ を以下の条件を満たす非コンパクト完備リーマン多様体とする:

(a) 熱核 $p_i(t,x,y)$ が Li-Yau 型評価 (LY) を満たす.

(b) 放物型である. ここでは (a) の仮定から $\int^\infty \frac{sds}{V_i(x,s)} = \infty$ と同値である.

(c) Relative connected annuli 条件. 即ち, ある定数 $A>1$ が存在し, 全ての十分大きな $r>0$ に対して, 円環 $B(x,Ar)\backslash B(x,A^{-1}r)$ が連結である.

(d) 固定された点 $o_i \in M_i$ を中心とするボール $B(o_i,r)$ の体積 $V_i(r)$ が critical 条件, 又は subcritical 条件を満たす. ここで M_i が critical であるとは, 全ての十分大きな $r>0$ に対して $V_i(r)\approx r^2$ のときをいい, subcritical であるとは, ある $C>0$ が存在して

$$\int_1^r \frac{sds}{V_i(s)} \le C\frac{r^2}{V_i(r)}$$

であるときをいう. $\mathbb{R}^2$ は critical, $\mathbb{R}$ は subcritical である.

M を 上記 (a)-(d) を満たす多様体 $M_1,\dots,M_k$ のコンパクト多様体 (中心部分) K による連結和 $K\#M_1\#\cdots\#M_k$ とするとき, M 上の熱核 $p(t,x,y)$ の挙動に関してまず次の結果を得た.

定理 1 ([2]) M の中心部分 K に点 $o\in K$ を固定する. このとき全ての $t>2$ に対して

$$p(t,o,o) \approx \frac{C}{V_{\max}(\sqrt{t})} := \frac{C}{\max_i V_i(\sqrt{t})}$$

が成り立つ.

非放物型多様体の連結和の場合は [5] により $p(t,o,o)\approx \frac{C}{V_{\min}(\sqrt{t})} := \frac{C}{\min_i V_i(\sqrt{t})}$ が得られており, 放物型と非放物型で状況が劇的に異なることに注意する.

定理 1 と [3], [4] および [5] を用いると M の任意の 2 点に関してシャープな熱核評価を得ることができる．主張を述べるためにいくつかの記号を用意する．$x \in M_i$ と $t > 2$ に対し，

$$D_i(x,t) := \begin{cases} 1, & \text{if } |x| > \sqrt{t} \\ \frac{|x|^2 V_i(\sqrt{t})}{t V_i(|x|)}, & \text{if } |x| \le \sqrt{t}, \end{cases} \qquad U(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{\log|x|}, & \text{if } |x| > \sqrt{t} \\ \frac{1}{\log\sqrt{t}} \log\frac{e\sqrt{t}}{|x|}, & \text{if } |x| \le \sqrt{t}, \end{cases}$$

$$W(x,t) := \begin{cases} 1, & \text{if } |x| > \sqrt{t} \\ \frac{\log|x|}{\log\sqrt{t}}, & \text{if } |x| \le \sqrt{t} \end{cases}$$

と定める．ここで $|x| := d(x,K) + e$ とする．このとき次を得た．

定理 2 ([2]) $x \in M_i$, $y \in M_j$ とする．

(i) 全ての *end* が *subcritical* であるとき，

$$p(t,x,y) \asymp \frac{C D_i(x,t) D_j(y,t)}{V_i(x,\sqrt{t})} e^{-b\frac{d^2_{M\setminus K}(x,y)}{t}} + \frac{C}{V_{\max}(\sqrt{t})} e^{-b\frac{|x|^2+|y|^2}{t}}.$$

(ii) 少なくとも一つ *critical* な *end* が存在するとき

$(ii)_1$: M_i と M_j がともに subcritical であるならば，

$$p(t,x,y) \asymp \frac{C D_i(x,t) D_j(y,t)}{V_i(x,\sqrt{t})} e^{-b\frac{d^2_{M\setminus K}(x,y)}{t}} + \frac{C}{t}\left\{1 + (D_i(x,t) + D_j(y,t))\log t\right\} e^{-b\frac{|x|^2+|y|^2}{t}}.$$

$(ii)_2$: M_i が subcritical で M_j が critical ならば，

$$p(t,x,y) \asymp \frac{C}{t}\left(1 + D_i(x,t) U(y,t) \log t\right) e^{-b\frac{|x|^2+|y|^2}{t}}.$$

$(ii)_3$: M_i と M_j が共に critical ならば，

$$\begin{aligned} p(t,x,y) \asymp & \frac{C}{V_i(x,\sqrt{t})} W(x,t) W(y,t) e^{-b\frac{d^2_{M\setminus K}(x,y)}{t}} \\ & + \frac{C}{t}\left\{U(x,t)U(y,t) + W(x,t)U(y,t) + U(x,t)W(y,t)\right\} e^{-b\frac{|x|^2+|y|^2}{t}}. \end{aligned}$$

ここで $i \neq j$ ならば $d_{M\setminus K}(x,y) = \infty$ と定める．

References

[1] A. Grigor'yan, *The heat equation on noncompact Riemannian manifolds* (in Russian). Mat. Sb., 182 (1991) no. 1, 55-87; English translation in Math. USSR-Sb., 72 (1992) no. 1, 47–77.

[2] A. Grigor'yan, S. Ishiwata, L. Saloff-Coste, *Heat kernel estimates on connected sums of parabolic manifolds*, in preparation.

[3] A.Grigor'yan and L. Saloff-Coste, *Dirichlet heat kernel in the exteior of a compact set*. Comm. Pure Appl. Math, 55 (2002), 93–133.

[4] A. Grigor'yan and L. Saloff-Coste, *Hitting probabilities for Brownian motion on Riemannian manifolds*. J. Math. Pures Appl., 81 (2002) no. 2, 115–142.

[5] A. Grigor'yan and L. Saloff-Coste, *Heat kernel on manifolds with ends*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 59 (2009) no. 5, 1917–1997.

[6] P. Li and S.-T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math., 156 (1986) no. 3-4, 153-201.

[7] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities*. Internat. Math. Res. Notices (1992), no. 2, 27–38.

RCD 空間上の Brown 運動の収束について

鈴木 康平

京都大学 理学研究科 数学教室 D3

E-mail: kohei0604@math.kyoto-u.ac.jp

概要

測度距離空間の列 $\mathcal{X}_n = (X_n, d_n, m_n)$ が, Riemann 的曲率次元条件 $\mathrm{RCD}^*(K, N)$ を満たし, $\mathrm{Diam}(X_n) \le D$, $m_n(X_n) = 1$ を満たすとする. この時, 以下が同値になることを報告する.

(A) $\mathcal{X}_n$ が measured Gromov–Hausdorff 収束する.

(B) $\mathcal{X}_n$ 上の Brown 運動 $\mathbb{B}_n$ が法則収束する.

1 導入

完備可分測地距離空間 (X, d) に, 局所有限な Borel 測度 m を備えた測度距離空間 $\mathcal{X} := (X, d, m)$ の枠組みで, "**Ricci 曲率** $\ge K$, **次元** $\le N$" という概念が, 近年幾つかのアプローチで導入されている (e.g. Lott–Villani [3], Sturm [4], Bacher–Sturm [1]). これらの枠組みでは, Cheeger エネルギー Ch と呼ばれる $\mathcal{X}$ 上の汎関数が定義されるが, 一般には 2 次形式にはならない. Erbar–Kuwada–Sturm [2] によって, "**Ricci 曲率** $\ge K$, **次元** $\le N$" に加えて, **Ch が 2 次形式となる**, という条件を加えた, $\mathbf{RCD}^*(K, N)$ 条件 (Riemannian Curvature–Dimension condition) が導入された. 例えば, Ricci 曲率 $\ge K$, 次元 $\le N$ を満たす Riemann 多様体の列の measured Gromov–Hausdorff (mGH) 極限に現れる空間は, $\mathrm{RCD}^*(K, N)$ 条件を満たす. そして, Cheeger エネルギー Ch から定まる Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は, 強局所正則対称形式になることが知られており, 対応する拡散過程は, **Brown 運動**と呼ばれる. 例えば, 完備連結 Riemann 多様体に Riemann 測度を備えた枠組みでは, Laplace–Beltrami 作用素から定まる Bronw 運動と一致する.

$RCD^*(K, N)$ 条件は mGH 収束に関して安定的であることが [2] によって示されている. すなわち, $\mathcal{X}_n$ が $RCD^*(K, N)$ を満たし, $\mathcal{X}_n \stackrel{mGH}{\to} \mathcal{X}_\infty$ ならば, $\mathcal{X}_\infty$ も $RCD^*(K, N)$ 条件を満たす. そこで以下のような問題を考える:

(Q) 空間の収束 $\mathcal{X}_n \stackrel{mGH}{\to} \mathcal{X}_\infty$ から, Brown 運動の法則収束 $\mathbb{B}_n \stackrel{law}{\to} \mathbb{B}_\infty$ が従うか?

ただし, 法則収束は, ある共通の完備距離空間 (X,d) に $\mathcal{X}_n$ を等長に埋め込んで考える (mGH 収束の下では, そういうことが可能である).

2　結果

本講演では, **(Q)** に対する答えとして, 以下の仮定 2.1 のもとで, 「空間の収束と Brown 運動の収束が同値である」事を報告する.

仮定 2.1　N, K, D を $1 < N < \infty$, $K \in \mathbb{R}$, $0 < D < \infty$ を満たす定数とする. 任意の $n \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して, $\mathcal{X}_n = (X_n, d_n, m_n)$ は測度距離空間で以下を満たすとする:

- $\mathrm{RCD}^*(K,N)$;
- $\mathrm{Diam}(X_n) \le D$;
- $m_n(X_n) = 1$.

ここで, $\mathrm{Diam}(X_n)$ は, X_n の直径を表す. 仮定 2.1 の下では, $\mathcal{X}_n$ 上に保存的な Brown 運動が任意の始点に関して一意的に存在することが分かり, これを $(\{B_t^n\}_{t\ge 0}, \{\mathbb{P}_x^n\}_{x\in X_n})$ とする.

主定理　仮定 2.1 の下で, 以下は同値:

(A)　**(空間の収束)**
$\mathcal{X}_n \overset{mGH}{\to} \mathcal{X}_\infty$.

(B)　**(埋め込んだ Brown 運動の法則収束)**
あるコンパクト距離空間 (X,d), 等長埋め込み $\iota_n : X_n \to X$ と, ある点列 $x_n \in X_n$ $(n \in \overline{\mathbb{N}})$ が存在して, 以下を満たす:

$$\iota_n(B_\cdot^n)_\# \mathbb{P}_n^{x_n} \overset{weak}{\to} \iota_\infty(B_\cdot^\infty)_\# \mathbb{P}_\infty^{x_\infty} \quad \text{in} \quad \mathcal{P}(C([0,\infty);X)).$$

ここで, $C([0,\infty);X) := \{w : [0,\infty) \to X : \text{連続}\}$ には, 局所一様距離を入れるものとする. また, $\mathcal{P}(C([0,\infty);X))$ は $C([0,\infty);X)$ 上の Borel 確率測度全体を表す. また, $f_\# m$ は, 可測写像 f による測度 m の押し出しを意味する.

参考文献

[1] K. Bacher and K.-T. Sturm, *J. Funct. Anal.*, **259**(1) (2010), 28–56.
[2] M. Erbar, K. Kuwada, and K.-T. Sturm, to appear in *Invent. math.*
[3] J. Lott and C. Villani, *Ann. Math.,* **169** (2009), no. 3, 903–991.
[4] K.-T. Sturm, *Acta Math.,* **196** (2006), 65–131.

Stability of heat kernel estimates and parabolic Harnack inequalities for jump processes on metric measure spaces

Takashi Kumagai (RIMS, Kyoto)

対称な拡散過程に関して、ガウス型の熱核評価が放物型 Harnack 不等式と同値であり、さらに volume doubling 条件+Poincaré 不等式とも同値であることはよく知られている。一方飛躍型確率過程において、これに相当する問題が研究されるようになったのは今世紀に入ってからであり、強い制約条件のもとで [1],[3] において同値条件が与えられていた。本講演では、volume doubling を満たす一般の測度つき距離空間において熱核評価や Harnack 不等式の同値条件を与えた、Z.-Q. Chen 氏、J. Wang 氏との共同研究 [2] の報告を行う。

1. Framework and definition

Let (M,d) be a locally compact separable metric space, and let μ be a positive Radon measure on M with full support. We assume $diam\, M=\infty$ for simplicity.

Assume that $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ is a conservative regular Dirichlet form on $L^2(M,\mu)$ such that

$$\mathcal{E}(f,g)=\int_{M\times M\setminus d}(f(x)-f(y)(g(x)-g(y))n(dx,dy)=:\int_M d\Gamma(f,g), \qquad \forall f,g\in\mathcal{F}.$$

Let $\{X_t\}_{t\ge 0}$ be the corresponding pure jump process. Assume further that for μ-a.a. $x\in M$ there exists $N(x,\cdot)$ on M such that

$$n(A,B)=\int_A \mu(dx)\int_B N(x,dy), \qquad \forall A,B\in\mathcal{B}(M),\ A\cap B=\emptyset.$$

Volume and time scale

Set $V(x,r):=\mu(B(x,r))$. Assume that there exist $c_1,c_2>0$, $d_2\ge d_1>0$ such that

$$c_1\Big(\frac{R}{r}\Big)^{d_1}\le\frac{V(x,R)}{V(x,r)}\ \le\ c_2\Big(\frac{R}{r}\Big)^{d_2}\qquad\text{for every } 0<r<R<\infty, x\in M. \tag{1}$$

Let $\phi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ be a strictly increasing continuous function with $\phi(0)=0$, $\phi(1)=1$ and there exist constants $c_3,c_4>0$ and $\beta_2\ge\beta_1>0$ such that

$$c_3\Big(\frac{R}{r}\Big)^{\beta_1}\le\frac{\phi(R)}{\phi(r)}\ \le\ c_4\Big(\frac{R}{r}\Big)^{\beta_2}\qquad\text{for every } 0<r<R<\infty. \tag{2}$$

Definition/Condition:

- HK(ϕ): There exists a jointly continuous heat kernel $p_t(x,y)$ such that

$$p(t,x,y)\asymp\frac{1}{\mu(B(x,\phi^{-1}(t)))}\wedge\frac{t}{\mu(B(x,d(x,y)))\phi(d(x,y))},\quad \forall x,y\in M, t>0.$$

We write UHK(ϕ) if $\le$ holds and write UHKD(ϕ) if $p_t(x,x)\le c/\mu(B(x,\phi^{-1}(t)))$.

- J_ϕ: For μ-a.a. $x\in M$, $N(x,\cdot)$ is absolutely continuous w.r.t. μ, and for for μ-a.a. $(x,y)\in M\times M\setminus d$, the Radon-Nikodym derivative $J(\cdot,\cdot)$ satisfies

$$\frac{c_1}{V(x,d(x,y))\phi(d(x,y))}\le J(x,y)\le\frac{c_2}{V(x,d(x,y))\phi(d(x,y))}. \tag{3}$$

We write $J_{\phi,\le}$ (resp. $J_{\phi,\ge}$) if the upper (resp. lower) bound in (3) holds.

- Faber-Krahn inequality FK(ϕ): $\exists C_M,\nu>0$ such that $\forall B(x,r)$, $\forall D\subset B(x,r)$,

$$\lambda_1(D):=\inf\Big\{\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2}: f\in\mathcal{F}_D, f\neq 0\Big\}\ge\frac{C_M}{\phi(r)}\Big(\frac{V(x,r)}{\mu(D)}\Big)^\nu.$$

• CSJ(ϕ): $\exists C_0 \in (0,1]$, $C_1, C_2 > 0$ such that $\forall R \geq r > 0$ and μ-a.a. $x \in M$, $\exists$ a cut-off function $\varphi \in \mathcal{F}_b$ for $B(x,R) \subset B(x,R+r)$ (i.e. $\varphi|_{B(x,R)} = 1$, $\varphi|_{B(x,R+r)^c} = 0$) so that

$$\int_{B(x,R+(1+C_0)r)} f^2\, d\Gamma(\varphi,\varphi) \leq C_1 \int_{U\times U^*} (f(x)-f(y))^2 n(dx,dy) + \frac{C_2}{\phi(r)} \int_{B(x,R+(1+C_0)r)} f^2\, d\mu,$$

for all $f \in \mathcal{F}$ where $U = B(x,R+r)\setminus B(x,R)$, $U^* = B(x,R+(1+C_0)r)\setminus B(x,R-C_0 r)$.

• Parabolic Harnack inequality PHI(ϕ): $\forall \lambda \in (0,1], \exists C_\lambda > 0$ such that $\forall u(t,x)$ caloric function (i.e. satisfies $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{L}u(t,x)$ in the weak sense) in $(t_0, t_0+\lambda\phi(R))\times B(x_0,R)$,

$$\sup_{Q_-} u \leq C_\lambda \inf_{Q_+} u,$$

where $Q_- := (t_0 + \lambda\phi(R)/4, t_0 + \lambda\phi(R)/2) \times B(x_0, R/2)$, $Q_+ := (t_0 + 3\lambda\phi(R)/4, t_0 + \lambda\phi(R)) \times B(x_0, R/2)$.

• UJS: μ-a.a. $x \in M$, $\forall A \in \mathcal{B}(M)$ with $d(x,A) > 0$, it holds that

$$N(x,A) \leq \frac{c}{V(x,r)} \int_{B(x,r)} \int_A N(z,du)\, \mu(dz), \qquad \forall r \leq \frac{1}{2} d(x,A).$$

• NDL(ϕ): $\exists \varepsilon \in (0,1), c > 0$ such that $\forall x_0 \in M$, $r > 0$, $t \leq \phi(\varepsilon r)$ and $B = B(x_0,r)$,

$$p_t^B(x',y') \geq \frac{c}{V(x_0,\phi^{-1}(t))}, \quad x', y' \in B(x_0, \varepsilon\phi^{-1}(t)).$$

• PI(ϕ) (Poincaré inequality): $\exists C_P$ such that $\forall B = B(x,r)$ and $f \in \mathcal{F}$,

$$\int_B \Big(f - \frac{1}{\mu(B)}\int_B f\, d\mu\Big)^2 d\mu \leq C_P \phi(r) \int\int_{B\times B} (f(y)-f(x))^2 N(x,dy)\, \mu(dx).$$

• E_ϕ: $\exists c_1 > 1$ such that $\forall r > 0$, μ-a.a. $x \in M$, $c_1^{-1}\phi(r) \leq \mathbb{E}^x[\tau_{B(x,r)}] \leq c_1\phi(r)$, where $\tau_A := \inf\{t > 0 : X_t \in A^c\}$ for $A \subset M$.

2. Main theorems

Assume that M satisfies (1) and ϕ satisfies (2).

Theorem 1 *The following are equivalent:*
(*i*) HK(ϕ) (*ii*) $J_\phi + E_\phi$ (*iii*) $J_\phi + \mathrm{CSJ}(\phi)$.

Theorem 2 *The following are equivalent:*
(*i*) UHK(ϕ) (*ii*) UHKD(ϕ) $+ J_{\phi,\leq} + E_\phi$ (*iii*) FK(ϕ) $+ J_{\phi,\leq} +$ CSJ(ϕ).

Theorem 3 *The following are equivalent:*
(*i*) PHI(ϕ) (*ii*) UHK(ϕ)+NDL(ϕ)+UJS (*iii*) PI(ϕ)$+J_{\phi,\leq}$+UJS (*iv*) EHI$+E_\phi$+UJS.

Corollary 4 HK(ϕ) $\Longleftrightarrow$ PHI(ϕ) $+ J_{\phi,\geq}$.

参考文献

[1] M.T. Barlow, R.F. Bass and T. Kumagai. Parabolic Harnack inequality and heat kernel estimates for random walks with long range jumps. *Math. Z.* **261** (2009), 297–320.

[2] Z.-Q. Chen, T. Kumagai and J. Wang. Stability of heat kernel estimates and parabolic Harnack inequalities for jump processes on metric measure spaces. In preparation.

[3] A. Grigor'yan, J. Hu and K.-S. Lau. Estimates of heat kernels for non-local regular Dirichlet forms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 6397–6441.

Moduli of continuity of local times of random walks on graphs

D. A. Croydon (University of Warwick)

I will discuss results from the article *Moduli of continuity of local times of random walks on graphs in terms of the resistance metric* (Transactions of the London Mathematical Society 2 (2015), no. 1, 57-79). This establishes universal concentration estimates for the local times of random walks on weighted graphs. As a particular application of these, a modulus of continuity for local times is provided in the case when the graphs in question satisfy a certain volume growth condition with respect to the resistance metric. Moreover, it is explained how these results can be applied to self-similar fractals, for which they are shown to be useful for deriving scaling limits for local times and asymptotic bounds for the cover time distribution.

In order to provide more detail, the framework will now be introduced. In particular, let $G = (V(G), E(G))$ be a finite connected graph, where $V(G)$ denotes the vertex set and $E(G)$ the edge set of G. To avoid trivialities, we always assume that G has at least two vertices. Let $\mu^G : V(G)^2 \to \mathbb{R}_+$ be a weight function that is symmetric, i.e. $\mu^G_{xy} = \mu^G_{yx}$, and satisfies $\mu^G_{xy} > 0$ if and only if $\{x, y\} \in E(G)$. The associated discrete time simple random walk is then the Markov chain $((X^G_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P}^G_x, x \in V(G))$ with transition probabilities $(P_G(x, y))_{x,y\in V(G)}$ defined by

$$P_G(x, y) := \frac{\mu^G_{xy}}{\mu^G_x},$$

where $\mu^G_x := \sum_{y\in V(G)} \mu^G_{xy}$. We note that the invariant probability measure of this process is a multiple of the measure version of μ^G obtained by setting $\mu^G(\{x\}) := \mu^G_x$ for $x \in V(G)$. The process X^G has corresponding local times $(L^G_t(x))_{x\in V(G),t\geq 0}$, given by $L^G_0(x) = 0$ and, for $t \geq 1$,

$$L^G_t(x) := \frac{1}{\mu^G_x} \sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{1}_{\{X^G_i = x\}}.$$

It is providing a modulus of continuity of these random functions in the spatial variable x that is the focus here.

For the statement of the local time bounds, as two important measures of the scale of a graph G, let

$$m(G) := \mu^G(V(G)), \qquad r(G) := \max_{x,y\in V(G)} R_G(x, y),$$

be its total mass with respect to the measure μ^G, and its diameter in the resistance metric (assuming edge $\{x, y\} \in E(G)$ is assigned conductance μ^G_{xy}), respectively. Note that the product $m(G)r(G)$ gives the maximal commute time of the random walk, and so gives a natural time-scaling. We also introduce the rescaled resistance metric $\tilde{R}_G(x,y) := r(G)^{-1}R_G(x,y)$.

The main result that will be presented is that, if a family of graphs $(G_i)_{i\in I}$ satisfy the following volume growth condition, $\tilde{R}_{G_i}(x,y)^{1/2}(1+\ln \tilde{R}_{G_i}(x,y)^{-1})^{1/2}$ provides, with uniformly high probability, a modulus of continuity for the rescaled local times $r(G_i)^{-1}L_t^{G_i}(x)$ in the spatial variable (uniformly over the appropriate time interval). Observe that the particular form of volume growth function that appears in the volume growth condition does not affect the modulus of continuity.

Definition 1. *A collection of finite connected weighted graphs $(G_i)_{i\in I}$ is said to satisfy* uniform volume growth with volume doubling (UVD) *if there exist constants $c_1, c_2, c_3 \in (0,\infty)$ such that*

$$c_1 v(r) \leq \mu^{G_i}\left(B_{G_i}(x,r)\right)$$

for every $x \in G_i$, $r \in [r_0(G_i), r(G_i)]$, $i \in I$, where

$$B_G(x,r) := \{y \in V(G) :\ R_G(x,y) < r\}$$

is the open ball in the resistance metric, and $r_0(G) := \min_{x,y\in V(G):x\neq y} R_G(x,y)$. Moreover,

$$m(G_i) \leq c_2 v(r(G_i))$$

for every $i \in I$, where $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is non-decreasing function with $v(2r) \leq c_3 v(r)$ for every $r \in \mathbb{R}_+$.

Theorem 2. *If $(G_i)_{i\in I}$ is a collection of graphs that satisfies UVD, then, for each $T > 0$,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{i\in I} \max_{z\in V(G_i)} \mathbf{P}_z^{G_i}\left(\max_{x,y\in V(G_i)} \max_{0\leq t\leq Tm(G_i)r(G_i)} \frac{r(G_i)^{-1}\left|L_t^{G_i}(x) - L_t^{G_i}(y)\right|}{\sqrt{\tilde{R}_{G_i}(x,y)\left(1+\ln \tilde{R}_{G_i}(x,y)^{-1}\right)}} \geq \lambda \right) = 0.$$

After explaining the proof of this result, a number of examples will be presented. I will also discuss an application to the study of cover times of random walks on graphs.

安定過程に対する田中の公式

塚田大史（大阪市立大学大学院理学研究科）

1　はじめに

よく知られている田中の公式は，以下のようなブラウン運動 $B = (B_t)_{t\geq 0}$ に関するものである．

$$|B_t - a| - |B_0 - a| = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - a) dB_s + L_t^a.$$

ここで $a = 0$ としておくと，マルチンゲール部分がレヴィの表現定理からブラウン運動だとわかるので，スコロホッド問題から $|B_t|$ がブラウン運動 B の 0 における反射壁過程となる．また, この田中の公式から凸関数に対する伊藤の公式へ一般化もされている．その他にも, 確率微分方程式の弱解の例などの研究が知られている．

ここでの田中の公式とは，局所時間をドゥーブ–メイエー分解によって非負値劣マルチンゲールとマルチンゲールの差で与える式として考える．そこで，局所時間 $L = \{L_t^a; a \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ は以下のように滞在時間密度で定義しておく．

定義 1.1. 非負値確率変数の族 $L = \{L_t^a; a \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ が任意の有界な非負値ボレル可測関数 f と $t \geq 0$ に対して

$$\int_0^t f(X_s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(a) L_t^a da$$

を確率 1 で満たすとき, L を X の局所時間という．

対称安定過程に対しては [2] によって，対称レヴィ過程に対しては [1] によって研究されている．本講演では，指数 α $(1 < \alpha < 2)$ の安定過程に対する田中の公式を構成について報告する．

2　準備

確率過程 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ を指数 α $(1 < \alpha < 2)$ の 1 次元の安定過程とすると, X の $\mathbb{R} - \{0\}$ 上のレヴィ測度 ν_α は以下のように表される．

$$\nu_\alpha(dh) = \begin{cases} c_+ |h|^{-\alpha-1} dh & \text{on } (0, \infty) \\ c_- |h|^{-\alpha-1} dh & \text{on } (-\infty, 0) \end{cases}$$

ここで定数 $c_+, c_- \geq 0$ は，$c_+ + c_- > 0$ を満たすとする．また, X_1 の特性関数を ϕ とすればレヴィ–ヒンチン表現から，任意の $u \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi(u) = \exp\{-d|u|^\alpha (1 - i\beta \mathrm{sgn}(u) \tan \frac{\pi\alpha}{2})\}$$

と書ける．ここで $d>0, \beta\in[-1,1]$ は，$d=\frac{c_+ + c_-}{2c(\alpha)}$，　$\beta=\frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-}$ を満たし，$c(\alpha)=\frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ である．

ここで X の生成作用素 $\mathcal{L}$ は以下のように書ける．

$$\mathcal{L}f(x)=\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\{f(x+h)-f(x)-f'(x)h\}\nu_\alpha(dh).$$

フーリエ変換を用いると以下のようにも表せる．

$$\mathcal{L}f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[\eta(u)\mathcal{F}[f](u)\right](x).$$

定義から局所時間は形式的に

$$L_t^a=\int_0^t\delta_0(X_s-a)ds$$

となることがわかるので，以下の補題と伊藤の公式を用いて田中の公式を構成する．

補題 2.1. 関数

$$F(x)=c(-\alpha)\frac{1-\beta\mathrm{sgn}(x)}{d(1+\beta^2\tan^2\frac{\pi\alpha}{2})}|x|^{\alpha-1}$$

は X の生成作用素 $\mathcal{L}$ の基本解となる．すなわち，$\mathcal{L}F=\delta_0$ となる．

また，マルチンゲール部分については, $\mathbb{E}|X_t|^\gamma<\infty$ $(0<\gamma<\alpha)$ となる指数 α の安定過程の絶対値モーメントの評価を用いる．

3　主結果

以下のような，指数 $\alpha\in(1,2)$ の安定過程に対する田中の公式が構成できる．

定理 3.1. 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$F(x)=c(-\alpha)\frac{1-\beta\mathrm{sgn}(x)}{d(1+\beta^2\tan^2\frac{\pi\alpha}{2})}|x|^{\alpha-1}$$

とする．このとき, 任意の $t\geq 0$, $a\in\mathbb{R}$ に対して

$$F(X_t-a)-F(X_0-a)=N_t^a+L_t^a$$

である．ここで N_t^a は, 2 乗可積分マルチンゲールであり，L_t^a は a に対する局所時間である．

参考文献

[1] P. Salminen and M. Yor. Tanaka formula for symmetric Lévy processes. *Séminaire de Probabilités*, XL, Lecture Notes in Math., No. 1899, pp. 265–285. Springer, 2007.

[2] K. Yamada. Fractional derivatives of local time of α-stable Levy processes as the limits of occupation time problem. *Limit Theorems in Probability and Statistics*, Vol. II, pp. 553–572. J. Bolyai Society Publications, 2002.

PARACONTROLLED CALCULUS AND FUNAKI-QUASTEL APPROXIMATION FOR KPZ EQUATION

MASATO HOSHINO (UNIV. TOKYO)

KPZ equation is the stochastic PDE

$$\partial_t h(t,x) = \frac{1}{2}\partial_x^2 h(t,x) + \frac{1}{2}(\partial_x h(t,x))^2 + \xi(t,x)$$

for $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{T}$. Here ξ is the space-time white noise, which is a family of Gaussian random variables such that

$$\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(s,y)] = \delta(t-s)\delta(x-y).$$

KPZ equation is ill-posed because it contains the square of the distribution $\partial_x h$. Usually the Cole-Hopf solution of KPZ equation is defined by $h_{\mathrm{CH}} = \log Z$, where Z is the solution of

$$\partial_t Z = \frac{1}{2}\partial_x^2 Z + Z\xi.$$

The simplest approximation to the Cole-Hopf solution is

$$\partial_t h_\epsilon = \frac{1}{2}\partial_x^2 h_\epsilon + \frac{1}{2}\{(\partial_x h_\epsilon)^2 - C_\epsilon\} + \xi_\epsilon(t,x),$$

where $\xi_\epsilon(t,x) = (\xi(t) * \eta_\epsilon)(x)$ is a smeared noise with a mollifier η_ϵ, and $C_\epsilon = \int(\eta_\epsilon(x))^2 dx$. Then the solution h_ϵ converges to the Cole-Hopf solution h_{CH}.

To consider the invariant measures, the following approximation is more convenient:

$$\partial_t h_\epsilon = \frac{1}{2}\partial_x^2 h_\epsilon + \frac{1}{2}\{(\partial_x h_\epsilon)^2 - C_\epsilon\} * \eta_\epsilon * \eta_\epsilon + \xi_\epsilon(t,x). \tag{1}$$

Funaki and Quastel ([1]) shows that the "stationary" solution h_ϵ converges to $h_{\mathrm{CH}}(t,x) + \frac{1}{24}t$ by using the following complicated transform:

$$\partial_t Z_\epsilon = \frac{1}{2}\partial_x^2 Z_\epsilon + \frac{1}{2}Z_\epsilon\left\{\left(\frac{\partial_x Z_\epsilon}{Z_\epsilon}\right)^2 * \eta_\epsilon * \eta_\epsilon - \left(\frac{\partial_x Z_\epsilon}{Z_\epsilon}\right)^2\right\} + Z_\epsilon \xi_\epsilon.$$

We consider the equation (1) by the paracontrolled calculus [2], without Cole-Hopf transform. Then the result in [1] can be extended to non-stationary solutions.

Theorem 1. *For every initial condition h_0, the maximal solution h_ϵ to (1) converses to $h_{CH}(t,x) + \frac{1}{24}t$.*

References

[1] Funaki, T., Quastel, J.: KPZ equation, its renormalization and invariant measures. Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. 3 (2015), no. 2, 159—220.

[2] Gubinelli, M., Imkeller, Peter., Perkowski, N.: Paracontrolled distributions and singular PDEs. Forum Math. Pi 3 (2015), e6, 75 pp.

Error analysis for approximations to one-dimensional SDEs via perturbation method *

Nobuaki Naganuma (Mathematical Institute, Tohoku University)

1 Introduction and main result

For a one-dimensional fractional Brownian motion (fBm) B with the Hurst $1/3 < H < 1$, we consider a one-dimensional stochastic differential equation (SDE)

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,d^\circ B_s, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

where $x_0 \in \mathbf{R}$ is a deterministic initial value and $d^\circ B$ stands for the symmetric integral in the sense of Russo-Vallois. In order to approximate the solution to (1), we consider the Crank-Nicholson scheme as real-valued stochastic process on the interval $[0,1]$. In this talk, we study asymptotic error distributions of the scheme.

In what follows, we assume that the coefficients b and σ in (1) are smooth and they are bounded together with all their derivatives. We give the definition of the Crank-Nicholson scheme for the m-th dyadic partition $\{\tau_k^m = k2^{-m}\}_{k=0}^{2^m}$:

Definition 1.1 (The Crank-Nicholson scheme)**.** For every $m \in \mathbf{N}$, the Crank-Nicholson scheme $X^{\mathrm{CN}(m)} : [0,1] \to \mathbf{R}$ is defined by a solution to an equation

$$\begin{cases} X_0^{\mathrm{CN}(m)} = x_0, \\ X_t^{\mathrm{CN}(m)} = X_{\tau_{k-1}^m}^{\mathrm{CN}(m)} + \dfrac{1}{2}\left\{b(X_{\tau_{k-1}^m}^{\mathrm{CN}(m)}) + b(X_t^{\mathrm{CN}(m)})\right\}(t - \tau_{k-1}^m) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\left\{\sigma(X_{\tau_{k-1}^m}^{\mathrm{CN}(m)}) + \sigma(X_t^{\mathrm{CN}(m)})\right\}(B_t - B_{\tau_{k-1}^m}) \quad \text{for } \tau_{k-1}^m < t \le \tau_k^m. \end{cases}$$

Since the Crank-Nicholson scheme is an implicit scheme, we need to restrict the domain of it and assure the existence of a solution to the equation above. Roughly speaking, the existence of the solution is ensured for large m.

In order to state our main result concisely, we set $\mathsf{w} = \sigma b' - \sigma' b$ and

$$J_t = \exp\left(\int_0^t b'(X_u)\,du + \int_0^t \sigma'(X_u)\,d^\circ B_u\right).$$

We assume the following hypothesis in order to obtain an expression of the error of the scheme:

*This talk is based on a joint work with Professor Shigeki Aida.

Hypothesis 1.2. $\inf \sigma > 0$.

The following is our main result:

Theorem 1.3. *Assume that Hypothesis* 1.2 *is satisfied. For* $1/3 < H < 1/2$*, we have*

$$\lim_{m\to\infty} 2^{m(3H-1/2)}\{X^{\mathrm{CN}(m)} - X\} = \sigma(X)U + J\int_0^{\cdot} J_s^{-1}\mathsf{w}(X_s)U_s\,ds$$

weakly with respect to the uniform norm. Here U *a stochastic process defined by*

$$U_t = \sigma_{3,H}\int_0^t f_{0,3}(X_u)\,dW_u, \tag{2}$$

where $\sigma_{3,H}$ *is a positive constant,* $f_{0,3} = (\sigma^2)''/24$ *and* W *is a standard Brownian motion independent of* B*.*

2 Sketch of proof

We explain the concept of perturbation method and give a sketch of proof of our main theorem.

The idea of perturbation method is to find a piecewise linear stochastic process $\tilde{h} \equiv \tilde{h}^{(m)} : [0,1] \to \mathbf{R}$ such that $X^{x_0,B+\tilde{h}}_{\tau^m_k} = X^{\mathrm{CN}(m)}_{\tau^m_k}$ for every $k = 1,\dots,2^m$, where $X^{x_0,B+\tilde{h}}$ is a solution to an SDE with the same initial value x_0 and a perturbed driver $B+\tilde{h}$, that is,

$$X^{x_0,B+\tilde{h}}_t = x_0 + \int_0^t b(X^{x_0,B+\tilde{h}}_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X^{x_0,B+\tilde{h}}_s)\,d^{\circ}(B+\tilde{h})_s.$$

Under Hypothesis 1.2, we see unique existence of $\tilde{h}$ and obtain an expression of it.

From the expression of $\tilde{h}^{(m)}$ and the Lipschitz continuity of the solution map $B \mapsto X^{x_0,B}$, we construct a piecewise linear function $h \equiv h^{(m)} : [0,1] \to \mathbf{R}$ such that (a) $2^{m(3H-1/2)}h^{(m)}$ converges to U defined by (2) and (b) $\tilde{h}^{(m)} - h^{(m)}$ is negligible. We can show Assertion (a) by using the fourth moment theorem. Assertion (b) is a nontrivial part in our proof. In order to justify Assertion (b), we need the following step:

(D1) estimate $\delta^{(m)} = \max_{1\le k\le 2^m}|X^{\mathrm{CN}(m)}_{\tau^m_k} - X^{x_0,B}_{\tau^m_k}|$ from the definition of the scheme,

(H1) estimate $\|\tilde{h}^{(m)} - h^{(m)}\|_\infty$ by a quantity involving $\delta^{(m)}$ from the construction of $\tilde{h}^{(m)}$ and $h^{(m)}$,

(D2) estimate $\delta^{(m)}$ by a quantity involving $\delta^{(m)}$ itself from (H1),

(D3) show a sharp estimate of $\delta^{(m)}$ by using (D2) repeatedly and (D1),

(H2) show Assertion (b) from (D3) and (H1).

For simplicity, we explain how to see the asymptotic error distribution of $X^{\mathrm{CN}(m)}_1 - X^{x_0,B}_1$. By using the properties of $h^{(m)}$ and the decomposition

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{CN}(m)}_1 - X^{x_0,B}_1 &= X^{x_0,B+\tilde{h}^{(m)}}_1 - X^{x_0,B}_1 \\ &= \nabla_{h^{(m)}}X^{x_0,B}_1 + \{X^{x_0,B+\tilde{h}^{(m)}}_1 - X^{x_0,B+h^{(m)}}_1\} + \{X^{x_0,B+h^{(m)}}_1 - X^{x_0,B}_1 - \nabla_{h^{(m)}}X^{x_0,B}_1\}, \end{aligned}$$

we see Theorem 1.3. In fact, Assertion (a) implies that the first term converges to a nontrivial process, that is, $2^{m(3H-1/2)}\nabla_{h^{(m)}}X^{x_0,B}_1 = \nabla_{2^{m(3H-1/2)}h^{(m)}}X^{x_0,B}_1 \to \nabla_U X^{x_0,B}_1$ as $m\to\infty$. The convergences of the second and third term to 0 follow from Assertion (a) and (b), respectively.