Upper rate functions of Brownian motion type for symmetric jump processes

塩沢　裕一　(大阪大学)[*1]
Jian Wang　(Fujian Normal University)

実軸上の対称 Lévy 過程 $X = (\{X_t\}_{t\geq 0}, P)$ について，$E[X_1^2] < \infty$ ならば次の重複対数の法則が成立する ([4, 5]).

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = \sqrt{E[X_1^2]}, \quad P\text{-a.s.}$$

X_t を $|X_t|$ に置き換えてもこの等式は正しい．特に任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$R_\varepsilon(t) := \sqrt{(2+\varepsilon)E[X_1^2]t\log\log t}$ とすると

$$P\left(\text{ある } T > 0 \text{ が存在して，任意の } t \geq T \text{ に対して } |X_t| \leq R_\varepsilon(t)\right) = 1.$$

すなわち，$R_\varepsilon(t)$ は X の *upper rate function* である．

本講演では，正則ディリクレ形式から生成される飛躍型対称マルコフ過程について，重複対数型の関数が upper rate function になるための条件を議論する．$J(x,y)$ を $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の対称な非負値可測関数とし，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ を以下で定義する．

$$\mathcal{D} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (u(x)-u(y))^2 J(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\},$$
$$\mathcal{E}(u,v) = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (u(x)-u(y))(v(x)-v(y)) J(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad u, v \in \mathcal{D}.$$

仮定 1. (i) ある定数 κ_1, κ_2 $(0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \infty)$ および α_1, α_2 $(0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 2)$ が存在して

$$\frac{\kappa_1}{|x-y|^{d+\alpha_1}} \leq J(x,y) \leq \frac{\kappa_2}{|x-y|^{d+\alpha_2}}, \quad |x-y| < 1.$$

(ii) ある正定数 c と ε が存在して

$$J(x,y) \leq \frac{c}{|x-y|^{d+2+\varepsilon}}, \quad |x-y| \geq 1.$$

仮定 1 の下，飛躍関数 $J(x,y)$ の 2 次モーメントは有限である．すなわち

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^2 J(x,y)\,\mathrm{d}y < \infty.$$

$\mathbb{R}^d$ 上のリプシッツ連続関数で台がコンパクトなもの全体の集合を $C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d)$ とかき，$\mathcal{D}$ 上のノルム $\|u\|_{\mathcal{E}} := \sqrt{\mathcal{E}(u,u) + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}$ $(u \in \mathcal{D})$ に関する $C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d)$ の閉包を $\mathcal{F}$ とかく．このとき $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則ディリクレ形式となる．このディリクレ形式から生成される対称ハント過程を $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t\geq 0}, \{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^d})$ とかく．$\mathbf{M}$ の upper rate function について以下の主張が成立する．

本研究は科研費 (課題番号:JP26400135, JP17K05299) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 60G17, 60J75
キーワード：飛躍型対称マルコフ過程，upper rate function
[*1] 〒560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1 - 1　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: `shiozawa@math.sci.osaka-u.ac.jp`

定理 2. $R(t) := \sqrt{t \log\log t}$ とする．仮定 1 の下，$\mathbf{M}$ のある適切除外集合 $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$ および正定数 C_0, c_0 が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}$ に対して

$$P_x\,(\text{ある } T>0 \text{ が存在して，任意の } t \geq T \text{ に対して } |X_t - x| \leq C_0 R(t)) = 1,$$

$$P_x\,(\text{ある } T>0 \text{ が存在して，任意の } t \geq T \text{ に対して } |X_t - x| \leq c_0 R(t)) = 0.$$

定理 2 より，仮定 1 が成立する程度に飛躍関数 $J(x,y)$ が遠方で減衰すれば，重複対数型の関数が upper rate function になり，そのオーダーが最適であることが分かる．

定理 2 を証明するために，$\mathbf{M}$ の熱核の長時間挙動を調べる．仮定 1 の下，$(0,\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}) \times (\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N})$ 上の非負値可測関数 $p(t,x,y)$（$\mathbf{M}$ の熱核と呼ぶ）が存在して

$$P_x(X_t \in A) = \int_A p(t,x,y)\,\mathrm{d}y, \quad (t>0,\ x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

([1])．飛躍関数 $J(x,y)$ が遠方で指数減衰しているとき，熱核の詳細な上下評価が [2] で与えられている．そこでの議論と同様にして次の定理を示すことができる．

定理 3. 仮定 1 の下，正定数 $t_0,\ c_i\ (1 \leq i \leq 5),\ \theta_0$ が存在して，すべての $t \geq t_0$ と $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{N}$ に対して

$$p(t,x,y) \leq \begin{cases} \dfrac{c_1}{t^{d/2}}, & t \geq |x-y|^2, \\ \dfrac{c_1}{t^{d/2}} \exp\left(-\dfrac{c_2|x-y|^2}{t}\right), & \dfrac{\theta_0|x-y|^2}{\log(1+|x-y|)} \leq t \leq |x-y|^2, \\ \dfrac{c_1 t}{|x-y|^{d+2+\varepsilon}}, & t \leq \dfrac{\theta_0|x-y|^2}{\log(1+|x-y|)}, \end{cases} \tag{1}$$

$$p(t,x,y) \geq \begin{cases} \dfrac{c_3}{t^{d/2}}, & t \geq |x-y|^2, \\ \dfrac{c_3}{t^{d/2}} \exp\left(-\dfrac{c_4|x-y|^2}{t}\right), & c_5|x-y| \leq t \leq |x-y|^2. \end{cases}$$

定理 3 を用いて，時刻 t において粒子がある球の外側にいる確率を評価する．この評価と Borel-Cantelli の補題とを合わせると定理 2 が従う．なお，対称安定過程型の熱核評価を持つ対称マルコフ過程については，upper rate function に関する積分判定法が与えられている ([6])．

注意 4. 仮定 1 (ii) よりも強く，ある正定数 κ_3, κ_4 と ε が存在して

$$\frac{\kappa_3}{|x-y|^{d+2+\varepsilon}} \leq J(x,y) \leq \frac{\kappa_4}{|x-y|^{d+2+\varepsilon}}, \quad |x-y| \geq 1$$

ならば，[3] と同様の議論により，熱核の長時間での精密な上下評価を与えることができる．すなわち，熱核の長時間での下からの評価も (1) の右辺と同様の形を持つことが分かる．

参考文献

[1] M. Barlow, R. Bass, Z.-Q. Chen and M. Kassmann, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 1963–1999.

[2] Z.-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 5021–5055.

[3] Z.-Q. Chen and X. Zhang, *Probab. Theory Related Fields* **165** (2016), 267–312.

[4] B. V. Gnedenko, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **7** (1943), 89–110.

[5] K. Sato, *Lévy processes: theory and applications*, Birkhäuser, Boston 2001, 3–37.

[6] Y. Shiozawa and J. Wang, *Potential Anal.* **46**, (2017), 23–53.