A remark on the uniqueness of Silverstein extensions of symmetric Dirichlet forms

（桑江 一洋 氏（熊本大学）との共同研究）

塩沢 裕一（岡山大学）

非正則な拡散過程における諸問題
奈良女子大学
2012年1月29日

1. 序

[CF, Example 6.6.12]

▷ $D \subset \mathbb{R}^d$: 領域

$$H^1(D) = \left\{ u \in L^2(D) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(D),\ 1 \le i \le d \right\}$$

$$\mathbb{D}(u,u) = \int_D |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x$$

○ d 次元ブラウン運動 $\iff (\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2}\mathbb{D}, H^1(\mathbb{R}^d) \right)$

▷ $D \subset \mathbb{R}^d$: 有界 Lipschitz 領域

○ D 上の吸収壁ブラウン運動 $\iff (\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2}\mathbb{D}, H_0^1(D)\right)$

ただし

$$H_0^1(D) := C_0^\infty(D) \text{ の } \sqrt{\mathcal{E}(\cdot,\cdot) + \|\cdot\|_{L^2(D)}^2} \text{ 閉包}$$

○ D 上の反射壁ブラウン運動 $\iff (\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2}\mathbb{D}, H^1(D)\right)$

注意. (i) $\left(\frac{1}{2}\mathbb{D}, H_0^1(D)\right)$ は $L^2(D)$ 上の正則 Dirichlet 形式.

(ii) $\left(\frac{1}{2}\mathbb{D}, H^1(D)\right)$ は $L^2(\overline{D})$ 上の正則 Dirichlet 形式.

2. Silverstein 拡張

▷ E : 局所コンパクト可分距離空間

▷ m : E 全体に台を持つ正値 Radon 測度

▷ $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: $L^2(E; m)$ 上の正則 Dirichlet 形式

（正則とは限らない）Dirichlet 形式 $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})$ が $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の拡張

$$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}} \quad \text{かつ} \quad \tilde{\mathcal{E}}(u,u) = \mathcal{E}(u,u), \ \forall u \in \mathcal{F}.$$

▷ $\mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の拡張全体の集合

Silverstein 拡張 [Silverstein (1974)]

$$\mathcal{A}_S(\mathcal{E},\mathcal{F})$$
$$:=\left\{(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{\mathcal{F}})\in\mathcal{A}(\mathcal{E},\mathcal{F})\mid u\cdot v\in\mathcal{F}_b,\ \forall u\in\mathcal{F}_b,\forall v\in\tilde{\mathcal{F}}_b\right\}$$

Silverstein 拡張の確率論的な意味 ([FOT, Appendix])

▷ $\mathrm{M}:(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から生成される E 上の対称マルコフ過程

▷ $\tilde{\mathrm{M}}:(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{\mathcal{F}})$ から生成される $\tilde{E}$ $(\underset{\text{稠密}}{\supset} E)$ 上の対称マルコフ過程

$\Longrightarrow$ M は $\tilde{\mathrm{M}}$ の E 上の部分過程

問題. いつ $\sharp\mathcal{A}_S(\mathcal{E},\mathcal{F})=1$ が成立するか?

注意. [Kuwae (2002)]

$$(\mathcal{E},\mathcal{F})\ \text{が保存的} \Longrightarrow \sharp\mathcal{A}_S(\mathcal{E},\mathcal{F})=1.$$

3. 内在的距離と Silverstein 拡張の一意性

Beurling-Deny 分解.

$$\mathcal{E}(u,u) = \mathcal{E}^{(c)}(u,u) + \frac{1}{2}\iint_{E\times E\setminus d}(u(x)-u(y))^2 J(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) + \int_E u(x)^2\kappa(\mathrm{d}x), \quad u \in \mathcal{F}\cap C_0(E)$$

- $\mathcal{E}^{(c)}$: 強局所型 2 次形式（拡散項）
- $J : E \times E \setminus d$ 上の対称な正値 Radon 測度（飛躍項）
- $\kappa : E$ 上の正値 Radon 測度（内部消滅項）

エネルギー測度.

$\forall u \in \mathcal{F}_b$, $\exists \mu^c_{\langle u \rangle}$: E 上の正値 Radon 測度 s.t.

$$\mathcal{E}^{(c)}(u,u) = \frac{1}{2}\mu^c_{\langle u \rangle}(E)$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} := \Big\{ u : E \to \mathbb{R} \mid \forall \text{rel. cpt. open } G \subset E, \\ \exists u_G \in \mathcal{F} \text{ s.t. } u = u_G \ m\text{-a.e. on } G \Big\}$$

注意. 各 $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ に対して $\mu^c_{\langle u \rangle}$ は well-defined に定まる.

各 $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ に対して

$$\mu^{j}_{\langle u\rangle}(B) := \frac{1}{2}\iint_{B\times E\setminus d}(u(x)-u(y))^2 J(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$$

$$\mu^{\kappa}_{\langle u\rangle}(B) := \frac{1}{2}\int_{B} u(x)^2\,\kappa(\mathrm{d}x)$$

内在的距離 [Biroli-Mosco (1991), Sturm (1995)].

○ $(\mathcal{E},\mathcal{F})$: 強局所型 Dirichlet 形式

$$\rho(x,y)$$

$$:= \sup\{u(x)-u(y) \mid u \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \cap C(E),\ \mu^{c}_{\langle u\rangle} \le m\}$$

注意. ρ は一般には擬距離である.

仮定. (i) ρ は E 上の距離であり, その生成する位相は元の位相と一致する.

(ii) (E, ρ) は完備距離空間.

注意 (Sturm [1994]). 仮定の下, 次が成立する:

▷ $\rho_p(x) := \rho(p, x)$

- $\forall p \in E, \forall r > 0,\ \{x \in E \mid \rho_p(x) < r\}$: rel. cpt.
- $\rho_p(x) \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \cap C(E), \quad \mu^c_{\langle \rho_p \rangle} \le m$

定理 [Kawabata-Takeda (1996)].

仮定の下では

$$\sharp \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1.$$

注意. 爆発が起こる場合でも仮定は成立し得る.

例 [Kawabata-Takeda (1996)]. 以下の $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は定理の仮定を満たす. すなわち $\sharp \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1.$

- $E = \mathbb{R}^d$, $m(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x$: Lebesgue measure

- $\{a_{ij}(x)\}_{1\le i,j\le d}$: 局所一様楕円型かつ

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le k(1+|x|)^2\log(2+|x|)^{2}|\xi|^2,\ \xi\in\mathbb{R}^d$$

$$\mathcal{E}(u,v) = \sum_{i,j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x$$

$\mathcal{F} = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の $\sqrt{\mathcal{E}(\cdot,\cdot)+\|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$ 閉包

一般の正則 Dirichlet 形式に対する内在的距離.

定義 [Frank-Lenz-Wingert (2010)].

E 上の擬距離 ρ が正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の**内在的距離**

$\underset{\text{定義}}{\iff}$

$\exists m_c, \exists m_j$: E 上の正値 Radon 測度 with $m_c + m_j \leq m$ s.t.

各 $A \subset E$ と $T > 0$ について,

$$\rho_A(x) := \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

が以下の 3 条件を満たす.

(i) $\rho_A \wedge T \in \mathcal{F}^{\dagger}_{\mathrm{loc}} \cap C(E)$,

(ii) $\mu^{c}_{\langle \rho_A \wedge T \rangle} \leq m_c$,

(iii) $\mu^{j}_{\langle \rho_A \wedge T \rangle} \leq m_j$.

$$\mathcal{F}^{\dagger}_{\mathrm{loc}} := \{ u \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \mid \mu^{j}_{\langle u \rangle} \text{ は Radon 測度 } \}.$$

仮定. 次の条件を満たす内在的距離が存在する:

- $\forall p \in E,\ \forall r > 0,\ \{x \in E \mid \rho_p(x) < r\}$: rel. cpt.

定理 [Kuwae-S].

仮定の下では

$$\sharp \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1.$$

注意. 定理の証明は, [Kuwae (2002), Theorem 6.1] を正則 Dirichlet 形式に制限した場合の別証明になる.

4. 証明の概略.

(active) 反射 Dirichlet 空間.

[Silverstein (1974), Z.-Q. Chen (1992)]

$$\mathcal{F}^{\mathrm{ref}} := \Big\{ u \in L^2(E;m) \mid \; u^{(n)} \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}, \forall n \geq 1, \sup_{n\geq 1} \mu^{c+j+\kappa}_{\langle u^{(n)} \rangle}(E) < \infty \Big\}$$

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}(u,u) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \mu^{c+j+2\kappa}_{\langle u^{(n)} \rangle}(E)$$

ただし

$$u^{(n)} := (-n) \vee u \wedge n$$

注意. **[Kawabata-Takeda (1996), Kuwae (2002)]**

- $(\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ref}}) \in \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F})$
- $\forall (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}}) \in \mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F})$,

$$\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}^{\mathrm{ref}} \quad \textbf{and} \quad \mathcal{E}^{\mathrm{ref}}(u,u) = \tilde{\mathcal{E}}(u,u), \ \forall u \in \tilde{\mathcal{F}}.$$

証明の概略.

○ 示すこと: $\mathcal{F}^{\mathrm{ref}} = \mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{\mathrm{ref}}$ は明らか)

任意の $\mathcal{F}_b^{\mathrm{ref}}$ の元が $\mathcal{F}_b$ の元で近似できることを示せば十分.

▷ $p \in E$: fixed

▷ $\rho_p(x) := \rho(p, x)$

▷ $\varphi_n(x) := 0 \vee (n + 1 - x) \wedge 1, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

仮定と [FLW, Proposition 4.6] より

$$\varphi_n(\rho_p(x)) \in \mathcal{F} \cap C_0(E)$$

$\mathcal{F}_b \cdot \mathcal{F}_b^{\mathrm{ref}} \subset \mathcal{F}_b$ より, $\underline{u \in \mathcal{F}_b^{\mathrm{ref}}}$ に対して

$u_n := u \cdot \varphi_n(\rho_p) \in \mathcal{F}_b$ **and** $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2} = 0$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \\
&\le \int_E u(x)^2 \, \mu^{c+j}_{\langle \varphi_n(\rho_p) - \varphi_m(\rho_p)\rangle}(\mathrm{d}x) \\
&+ \int_E (\varphi_n(\rho_p(x)) - \varphi_m(\rho_p(x)))^2 \, \mu^{c+j+\kappa}_{\langle u\rangle}(\mathrm{d}x) \\
&=: (\mathrm{I}) + (\mathrm{II})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \int_E u(x)^2\, \mu^{c+j}_{\langle \varphi_n(\rho_p) - \varphi_m(\rho_p)\rangle}(\mathrm{d}x) \\
&\le \int_E u(x)^2\, \mu^{c+j}_{\langle \rho_p\rangle}(\mathrm{d}x) \le \int_E u(x)^2\, m(\mathrm{d}x) < \infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{II}) &= \int_E (\varphi_n(\rho_p(x)) - \varphi_m(\rho_p(x)))^2\, \mu^{c+j+\kappa}_{\langle u\rangle}(\mathrm{d}x) \\
&\le \mu^{c+j+\kappa}_{\langle u\rangle}(E) < \infty \quad (\because u \in \mathcal{F}^{\mathrm{ref}}_b)
\end{aligned}
$$

よって，有界収束定理より

$$
\lim_{m,n\to\infty} (\mathrm{I}) = \lim_{m,n\to\infty} (\mathrm{II}) = 0.
$$

従って $u \in \mathcal{F}_b$. $\square$

5. 例.

▷ $0 < \alpha < 2,\ m > 0$: fixed

$$\mathcal{E}(u,u) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus d} (u(x) - u(y))^2 g(x,y) J(x,y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \mathcal{E}(u,u) < \infty \right\}$$

$$J(x,y) := c(d,\alpha) \frac{\Psi(m^{1/\alpha}|x-y|)}{|x-y|^{d+\alpha}}$$

$g \equiv 1$ のとき, $\mathcal{E}$ の生成作用素は

$$\mathcal{H} = m - (m^{2/\alpha} - \Delta)^{\alpha/2}$$

[Z.-Q. Chen, R. Song (2003)] $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$ **s.t.**

$$J(x,y) \le \begin{cases} \dfrac{c_1}{|x-y|^{d+\alpha}} & \text{if } |x-y| < 1 \\ c_2 e^{-c_3|x-y|} & \text{if } |x-y| \ge 1. \end{cases}$$

以下は, 定理より $\sharp\mathcal{A}_S(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 1$ が従う例である.

(1) 非有界係数を持つ場合.

▷ $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus d$ 上の正値関数: $\exists c_1, c_2 > 0$ s.t.

$$c_1 \leq g(x, y)$$

$$\leq c_2\{(e + |x|)^2 \log(e + |x|)^{2} + (e + |y|)^2 \log(e + |y|)^{2}\}$$

$$\mathcal{F} := C_0^{\mathrm{lip}}(\mathbb{R}^d) \text{ の } \sqrt{\mathcal{E}(\cdot, \cdot) + \|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \text{ 閉包}$$

$\Longrightarrow$ $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則 Dirichlet 形式

▷ $\psi(x) := \int_0^{|x|} \frac{\mathrm{d}s}{(e+s)\log(e+s)} \, (= \log\log(e+|x|))$

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の内在的距離として

$$\rho(x,y) := \frac{1}{\sqrt{M}} |\psi(x) - \psi(y)|.$$

$$M := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{y \neq x} (\psi(x) - \psi(y))^2 g(x,y) J(x,y) \, \mathrm{d}y < \infty.$$

注意. **(i)** ([Schilling-Uemura (2011)])

$(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Silverstein 拡張. 従って

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}.$$

(ii) $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の保存性は不明.

(2) 時間変更 Dirichlet 形式.

$\triangleright$ $h(x) \asymp \dfrac{1}{(e+|x|)^2 \log(e+|x|)^{2}}$

$\circ$ $g \equiv 1, \quad \mu(\mathrm{d}x) = h(x)\,\mathrm{d}x$

$\triangleright$ $(\check{\mathcal{E}}, \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}))$: $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ の μ による時間変更 Dirichlet 形式

$\Longrightarrow$ $\check{\mathcal{H}} := \dfrac{1}{h(x)}\mathcal{H}$: $(\check{\mathcal{E}}, \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}))$ の生成作用素

$(\check{\mathcal{E}}, \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}))$ の内在的距離として (1) と同じものをとる.

注意. $(\check{\mathcal{E}}, \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}))$ は爆発する ([S-Uemura (2011)]).