参考　双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ を

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

で定める。これらはつぎの関係式をみたす:

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \sinh^2 x + 1 = 2 \cosh^2 x - 1.$

$p = \cosh s, q = \sinh s$ のとき、$p^2 - q^2 = 1$ で、

$\tanh(s/2) = \dfrac{\sinh(s/2)}{\cosh(s/2)} = \dfrac{2 \sinh(s/2) \cosh(s/2)}{2 \cosh^2(s/2)}$

$= \dfrac{\sinh s}{\cosh s + 1} = \dfrac{q}{p+1}$ より、$\tanh(s/2) = \dfrac{p-1}{q}$ となる。また、

$\cosh(s/2) = \sqrt{\frac{\cosh s + 1}{2}} = \sqrt{\frac{p+1}{2}}$, $\sinh(s/2) = \sqrt{\frac{\cosh s - 1}{2}} = \sqrt{\frac{p-1}{2}}$