例３．原点 $(0,0)$ を中心とする半径 1 の円弧で，端点が $(1,0)$，$(\cos s, \sin s)$ $(-\pi \leqq s \leqq \pi)$ であるものは，ベジエ点 $\boldsymbol{b}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, \tan\frac{s}{2})$，$\boldsymbol{b}_2 = (\cos s, \sin s)$ と重み $w_0 = 1$，$w_1 = \cos\frac{s}{2}$，$w_2 = 1$ であらわされる．実際,

$$x(t) = \frac{(1-t)^2 + 2t(1-t)\cos\frac{s}{2} + t^2\cos s}{(1-t)^2 + 2t(1-t)\cos\frac{s}{2} + t^2},$$

$$y(t) = \frac{2t(1-t)\sin\frac{s}{2} + t^2\sin s}{(1-t)^2 + 2t(1-t)\cos\frac{s}{2} + t^2}$$

と表される． $s = \pi$ のとき，$w_1 = 0$ となり，図８ b のようになる．

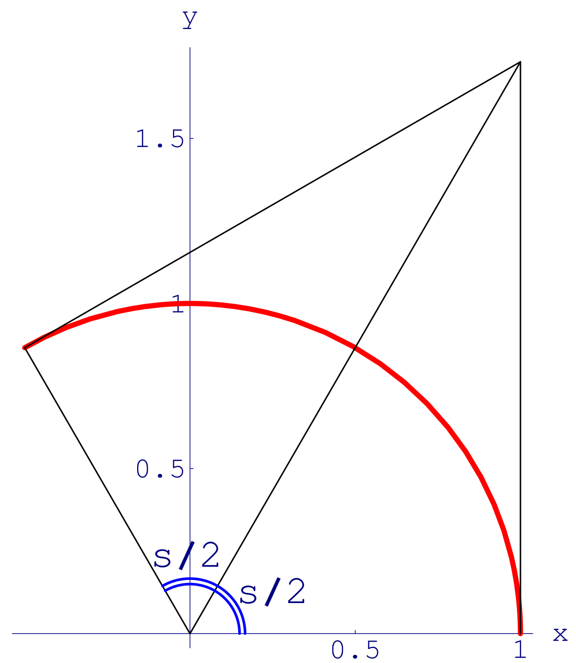

図 8a

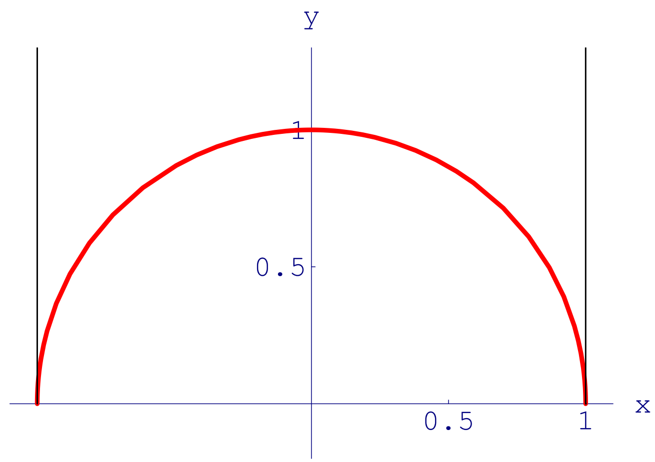

図 8b

例 4．端点が $(1,0)$，(p,q) である双曲線 $x^2-y^2=1$ は，$p=\cosh s, q=\sinh s$ とするとき，ベジエ点 $\boldsymbol{b}_0=(1,0)$，$\boldsymbol{b}_1=(1,\tanh\dfrac{s}{2})$，$\boldsymbol{b}_2=(\cosh s,\sinh s)$ と重み $w_0=1$，$w_1=\cosh\dfrac{s}{2}$，$w_2=1$ であらわされる．実際，

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{(1-t)^2+2t(1-t)\cosh\dfrac{s}{2}+t^2\cosh s}{(1-t)^2+2t(1-t)\cosh\dfrac{s}{2}+t^2}, \\
y(t) &= \frac{2t(1-t)\sinh\dfrac{s}{2}+t^2\sinh s}{(1-t)^2+2t(1-t)\cosh\dfrac{s}{2}+t^2}
\end{aligned}
$$

と表される．$\tanh\frac{s}{2}=\frac{p-1}{q}$，$\cosh\frac{s}{2}=\sqrt{\frac{p+1}{2}}$，$\sinh\frac{s}{2}=\sqrt{\frac{p-1}{2}}$ であることに注意せよ．

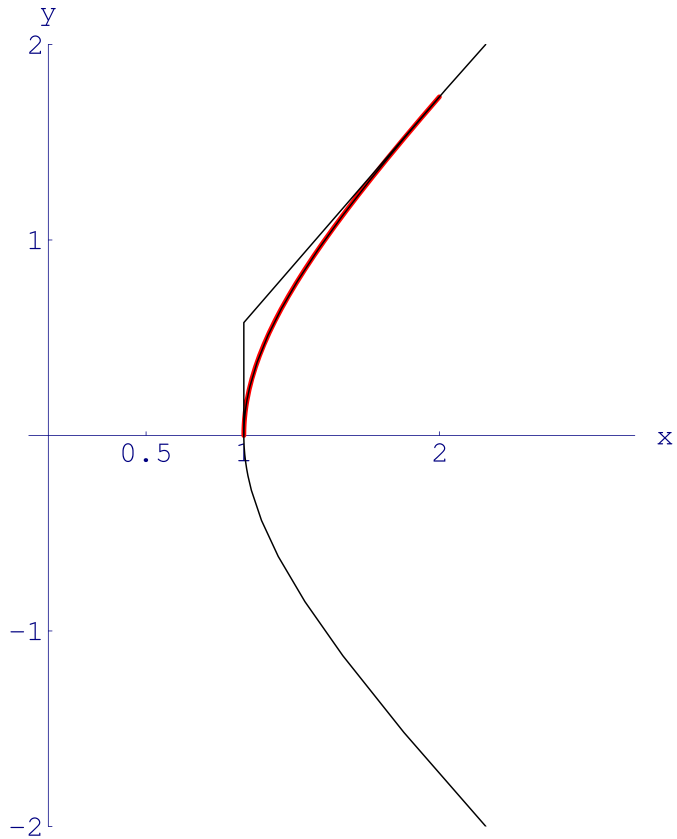

図 9

例 5．端点が $(1,0)$，(p^2+1,p) である方物線 $x=y^2+1$ は，ベジエ点 $\boldsymbol{b}_0=(1,0)$，$\boldsymbol{b}_1=(1,\dfrac{p}{2})$，$\boldsymbol{b}_2=(p^2+1,p)$ であらわされる．実際，

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^2+2t(1-t)+t^2(p^2+1) \\ &= 1+p^2t^2, \\ y(t) &= \frac{p}{2}2t(1-t)+t^2p=pt \end{aligned}$$

と表される．

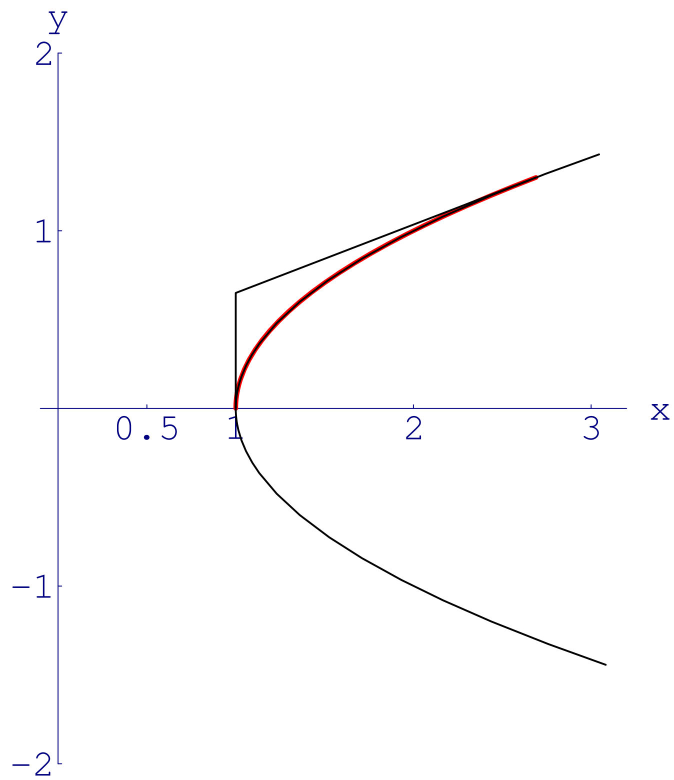

図 10

平面上の２次曲線は方程式

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \tag{11}$$

であらわされる．$D=b^2-ac$ とおく．

曲線が 2 直線でないとき，次が成り立つ：

1） $D < 0$ のとき，2 次曲線は楕円である.

2） $D > 0$ のとき，2 次曲線は双曲線である.

3） $D = 0$ のとき，2 次曲線は放物線である.

例　1） $x^2 - xy + 2y^2 = 1$ は楕円である.

例　2） $x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$ は双曲線である.

例　3） $x^2 - 4xy + 4y^2 + x = 2$ は放物線である.

方程式 (11) が 2 直線をあらわす判定条件を求めておこう.（11）式の左辺 $\times a =$

$$(ax + by + d)^2 - ((b^2 - ac)y^2 + 2(bd - ae)y + (d^2 - af)) = 0$$

$A = b^2 - ac,\ B = 2(bd - ae),\ C = d^2 - af$ とおくと，

$$(ax + by + d)^2 - (Ay^2 + By + C) = 0$$

これが２直線をあらわすための条件は $Ay^2 + By + C$ が完全平方式となることである．従って， $B^2 - 4AC = 0$ が条件となる．すなわち，

$$B^2 - 4AC = 4(bd - ae)^2 - 4(b^2 - ac)(d^2 - af) = 0$$

$-4a$ で割って，条件は

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

と書くことができる．

有理ベジエ曲線

円錐曲線と同様に，空間 $\mathbb{R}^2$ の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_n$ と正の実数 w_0，$\cdots$，w_n を与えるとき，有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ を

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{w_0 \boldsymbol{b}_0 B_0^n(t) + \cdots + w_n \boldsymbol{b}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + \cdots + w_n B_n^n(t)} \tag{12}$$

で定義する．

w_i を**重み**，$\boldsymbol{b}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を**ベジエ点**あるいは**制御点**，$\boldsymbol{b}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ で生成される多面体を**制御多角形**とよぶ．

すべての重みが等しいならば，有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は ベジエ曲線となる．

また，有理ベジエ曲線はベジエ曲線と同様の性質，すなわち，アフィン不変性，凸包性，端点一致，対称性をもつ．

例 1．デカルトの葉線は $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で定義される曲線である．

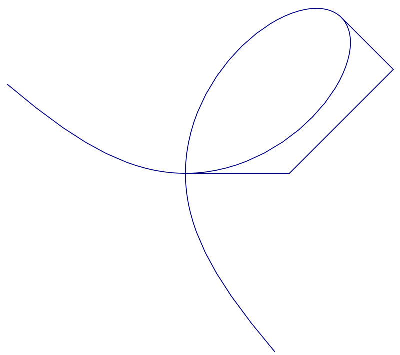

図 11a

これは，次のような制御点と重みによる有理ベジエ曲線である． $\boldsymbol{b}_0 = (0, 0)$，$\boldsymbol{b}_1 = (1, 0)$，$\boldsymbol{b}_2 = (2, 1)$，$\boldsymbol{b}_3 = (3/2, 3/2)$ とし，それぞれの重みを $w_0 = 1$，$w_1 = 1$，$w_2 = 1$，$w_3 = 2$ とすると，

$\boldsymbol{x}(t) = (3t/(1+t^3), 3t^2/(1+t^3))$ となる (図 11a).

例 2．アストロイドは $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ で定義される曲線である．

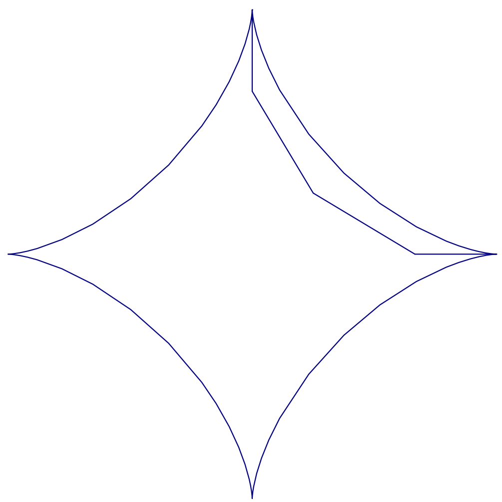

図 11b

これは，次のような制御点と重みによる有理ベジエ曲線である．$\boldsymbol{b}_0 = (0, 1)$，$\boldsymbol{b}_1 = (0, 1)$，$\boldsymbol{b}_2 = (0, 2/3)$，$\boldsymbol{b}_3 = (1/4, 1/4)$，$\boldsymbol{b}_4 = (2/3, 0)$，$\boldsymbol{b}_5 = (1, 0)$，$\boldsymbol{b}_6 = (1, 0)$ とし，それぞれの重みを $w_0 = 1$，$w_1 = 1$，$w_2 = 6/5$，$w_3 = 8/5$，$w_4 = 12/5$，$w_5 = 4$，$w_6 = 8$ とすると，$\boldsymbol{x}(t) = (8t^3/(1+t^2)^3, (1-t^2)^3/(1+t^2)^3)$ となる (図 11b).

例 3.

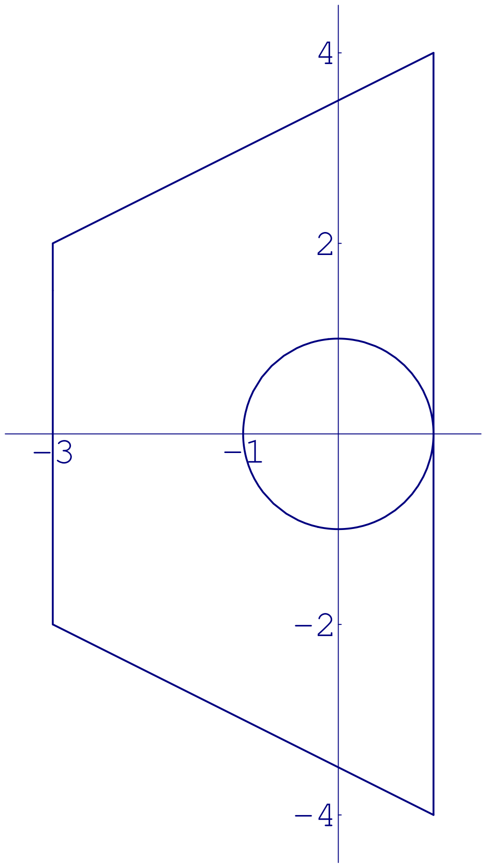

図 11c

制御点と重みを $\boldsymbol{b}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1,-4)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-3,-2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-3,2)$, $\boldsymbol{b}_4 = (1,4)$, $\boldsymbol{b}_5 = (1,0)$, $w_0 = 1$, $w_1 = 1/5$, $w_2 = 1/5$, $w_3 = 1/5$, $w_4 = 1/5$, $w_5 = 1$ で与えると，有理ベジエ曲線は $\boldsymbol{x}(t) =$

$$\left(\frac{-(2t^2-4t+1)(2t^2-1)}{(1+2t^2-2t)^2}, \frac{4(2t-1)(1-t)t}{(1+2t^2-2t)^2} \right)$$

となり， $(0 \leqq t \leqq 1)$ を動くとき， $\boldsymbol{x}(t)$ は半径 1 の円をあらわす (図 11c).