ド・カステリョのアルゴリズム

空間 $\mathbb{R}^3$ 上の３点 $\boldsymbol{p}_0 = (w_0\boldsymbol{b}_0, w_0)$，$\boldsymbol{p}_1 = (w_1\boldsymbol{b}_1, w_1)$，$\boldsymbol{p}_2 = (w_2\boldsymbol{b}_2, w_2)$ をとる． 0 と 1 の間の実数 t に対して，２点 $\boldsymbol{p}_0$ と $\boldsymbol{p}_1$ とを $t:1-t$ に内分する点を $\boldsymbol{p}_0^1(t)$ とし， ２点 $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ とを $t:1-t$ に内分する点を $\boldsymbol{p}_1^1(t)$ とする:

$\boldsymbol{p}_0^1(t) = (1-t)\boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{p}_1 = (1-t)(w_0\boldsymbol{b}_0, w_0) + t(w_1\boldsymbol{b}_1, w_1) =$
$((1-t)w_0\boldsymbol{b}_0 + tw_1\boldsymbol{b}_1, (1-t)w_0 + tw_1)$

$w_0^1(t) = (1-t)w_0 + tw_1,$
$\boldsymbol{b}_0^1(t) = \dfrac{1}{(1-t)w_0 + tw_1}((1-t)w_0\boldsymbol{b}_0 + tw_1\boldsymbol{b}_1)$ とおくと，

$$\boldsymbol{b}_0^1(t) = (1-t)\frac{w_0}{w_0^1(t)}\boldsymbol{b}_0 + t\frac{w_1}{w_0^1(t)}\boldsymbol{b}_1,$$

$\boldsymbol{p}_0^1(t) = (w_0^1(t)\boldsymbol{b}_0^1(t), w_0^1(t))$ と書くことができる．

同様に，$\boldsymbol{p}_1^1(t) = (1-t)\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p} = (1-t)(w_1\boldsymbol{b}_1, w_1) + t(w_2\boldsymbol{b}_2, w_2) = ((1-t)w_1\boldsymbol{b}_1 + tw_2\boldsymbol{b}_2, (1-t)w_1 + tw_2)$.

$w_1^1(t) = (1-t)w_1 + tw_2$,
$\boldsymbol{b}_1^1(t) = \dfrac{1}{(1-t)w_1 + tw_2}((1-t)w_1\boldsymbol{b}_1 + tw_2\boldsymbol{b}_2)$ とおくと，

$\boldsymbol{b}_1^1(t) = (1-t)\dfrac{w_1}{w_1^1(t)}\boldsymbol{b}_1 + t\dfrac{w_2}{w_1^1(t)}\boldsymbol{b}_2$,

$\boldsymbol{p}_1^1(t) = (w_1^1(t)\boldsymbol{b}_1^1(t), w_1^1(t))$ と書くことができる．

さらに，２点 $\boldsymbol{p}_0^1(t)$ と $\boldsymbol{p}_1^1(t)$ とを $t : 1-t$ に内分する点を $\boldsymbol{p}_0^2(t)$ とすると，

$\boldsymbol{p}_0^2(t) = (1-t)\boldsymbol{p}_0^1(t) + t\boldsymbol{p}_1^1(t) =$
$(1-t)(w_0^1(t)\boldsymbol{b}_0^1(t), w_0^1(t)) + t(w_1^1(t)\boldsymbol{b}_1^1(t), w_1^1(t)) =$
$((1-t)w_0^1\boldsymbol{b}_0^1(t) + tw_1^1\boldsymbol{b}_1^1(t), (1-t)w_0^1(t) + tw_1^1(t))$

$w_0^2(t) = (1-t)w_0^1(t) + tw_1^1(t)$,

$\boldsymbol{b}_0^2(t) = \dfrac{1}{((1-t)w_0^1(t) + tw_1^1(t)}((1-t)w_0^1(t)\boldsymbol{b}_0^1(t) + tw_1^1(t)\boldsymbol{b}_1^1(t))$ と

おくと,

$\boldsymbol{b}_0^2(t) = (1-t)\dfrac{w_0^1(t)}{w_0^2(t)}\boldsymbol{b}_0^1(t) + t\dfrac{w_1^1(t)}{w_0^2(t)}\boldsymbol{b}_1^1(t)$,

$\boldsymbol{p}_0^2(t) = (w_0^2(t)\boldsymbol{b}_0^2(t), w_0^2(t))$ と書くことができる.

$w_0^1(t)\boldsymbol{b}_0^1(t) = (1-t)\boldsymbol{b}_0 + t\boldsymbol{b}_1$, $w_1^1(t)\boldsymbol{b}_1^1(t) = (1-t)\boldsymbol{b}_1 + t\boldsymbol{b}_2$ より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_0^2(t) &= \frac{(1-t)^2w_0\boldsymbol{b}_0 + 2t(1-t)w_1\boldsymbol{b}_1 + t^2w_2\boldsymbol{b}_2}{(1-t)^2w_0 + 2t(1-t)w_1 + t^2w_2} \\ &= \frac{B_0^2(t)w_0\boldsymbol{b}_0 + B_1^2(t)w_1\boldsymbol{b}_1 + B_2^2(t)w_2\boldsymbol{b}_2}{B_0^2(t)w_0 + B_1^2(t)w_1 + B_2^2(t)w_2}.\end{aligned}$$

これは $\boldsymbol{p}_0^2(t) = (1-t)^2\boldsymbol{p}_0 + 2(1-t)t\boldsymbol{p}_1 + t^2\boldsymbol{p}_2 =$ $((1-t)^2 w_0\boldsymbol{b}_0 + 2(1-t)tw_1\boldsymbol{b}_1 + t^2 w_2\boldsymbol{b}_2, (1-t)^2 w_0 + 2(1-t)tw_1 + t^2 w_2)$ からもわかる.

例 1. ベジエ点 $\boldsymbol{b}_0 = (0,0), \boldsymbol{b}_1 = (1,-1), \boldsymbol{b}_2 = (1,0)$ と重み $w_0 = 1$, $w_1 = \dfrac{1}{2}$, $w_2 = 1$ を与えるとき, $\boldsymbol{b}_0^2(t) = \left(\dfrac{t}{t^2-t+1}, \dfrac{t^2-t}{t^2-t+1}\right)$ となる.

$$x = \frac{t}{t^2-t+1}, \quad y = \frac{t^2-t}{t^2-t+1}$$

とおくと, $y = \dfrac{-1}{t^2-t+1} + 1$ から $-t(y-1) = x$ を得る. 従って, x, y は方程式

$$x^2 - x + xy + y^2 - y = 0$$

をみたす.

例 2．方程式 $-2x^2-5xy+4y^2+x-5y+15=0$ で定義される曲線を考える．この曲線のパラメータ表示は次で与えられる：

$$(x,y)=\left(\frac{18-19t+8t^2}{-2-5t+4t^2},\frac{-6+7t+3t^2}{-2-5t+4t^2}\right).$$

これを示そう．まず，方程式をみたす点を求める．点 $(2,3)$ はこの方程式をみたす． 直線 $y=t(x-2)+3$ を方程式に代入することにより，$(x-2)(-2x-5tx+4t^2x-8t^2+19t-18)=0$ を得る． これを解いて，$x=\dfrac{18-19t+8t^2}{-2-5t+4t^2}$ を得る．直線 $y=t(x-2)+3$ に代入して，$y=\dfrac{-6+7t+3t^2}{-2-5t+4t^2}$ を得る．ベジエ点と重みはベジエ点 $\boldsymbol{b}_0=(-9,3)$, $\boldsymbol{b}_1=\left(-\dfrac{17}{9},\dfrac{5}{7}\right)$), $\boldsymbol{b}_2=\left(-\dfrac{7}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$ と重み $w_0=2$, $w_1=\dfrac{9}{2}$, $w_2=3$ で与えられる．

有理ベジエ曲線

円錐曲線と同様に，空間 $\mathbb{R}^2$ の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_n$ と正の実数 w_0，$\cdots$，w_n を与えるとき，有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ を

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{w_0 \boldsymbol{b}_0 B_0^n(t) + \cdots + w_n \boldsymbol{b}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + \cdots + w_n B_n^n(t)} \tag{11}$$

で定義する．

w_i を**重み**，$\boldsymbol{b}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を**ベジエ点**あるいは**制御点**，$\boldsymbol{b}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ で生成される多面体を**制御多角形**とよぶ．

すべての重みが等しいならば，有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は ベジエ曲線となる．

また，有理ベジエ曲線はベジエ曲線と同様の性質，すなわち，アフィン不変性，凸包性，端点一致，対称性をもつ．

例 1．デカルトの葉線は $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で定義される曲線である．

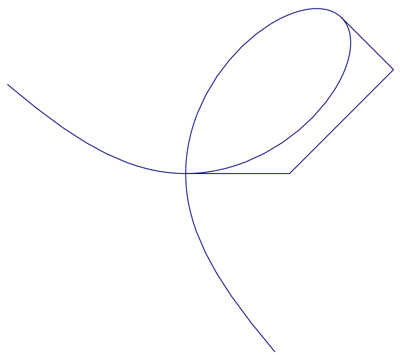

図 8a

これは，次のような制御点と重みによる有理ベジエ曲線である．$\boldsymbol{b}_0 = (0,0)$，$\boldsymbol{b}_1 = (1,0)$，$\boldsymbol{b}_2 = (2,1)$，$\boldsymbol{b}_3 = (3/2, 3/2)$ とし，それぞれの重みを $w_0 = 1$，$w_1 = 1$，$w_2 = 1$，$w_3 = 2$ とすると，$\boldsymbol{x}(t) = (3t/(1+t^3), 3t^2/(1+t^3))$ となる（図 8a）．

例 2．アストロイドは $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ で定義される曲線である．

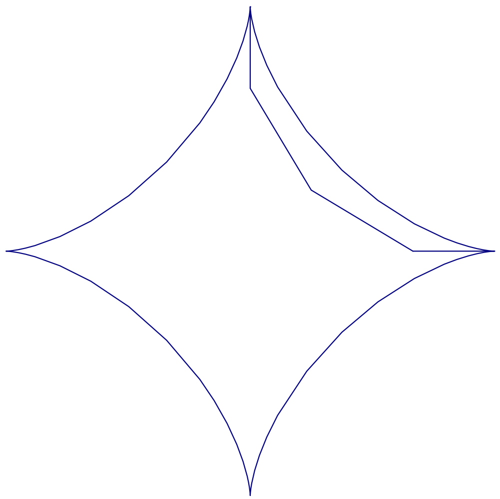

図 8b

これは，次のような制御点と重みによる有理ベジエ曲線である．$\boldsymbol{b}_0 = (0,1)$，$\boldsymbol{b}_1 = (0,1)$，$\boldsymbol{b}_2 = (0, 2/3)$，$\boldsymbol{b}_3 = (1/4, 1/4)$，$\boldsymbol{b}_4 = (2/3, 0)$，$\boldsymbol{b}_5 = (1,0)$，$\boldsymbol{b}_6 = (1,0)$ とし，それぞれの重みを $w_0 = 1$，$w_1 = 1$，$w_2 = 6/5$，$w_3 = 8/5$，$w_4 = 12/5$，$w_5 = 4$，$w_6 = 8$ とすると，$\boldsymbol{x}(t) = (8t^3/(1+t^2)^3, (1-t^2)^3/(1+t^2)^3)$ となる（図 8b）．

例 3.

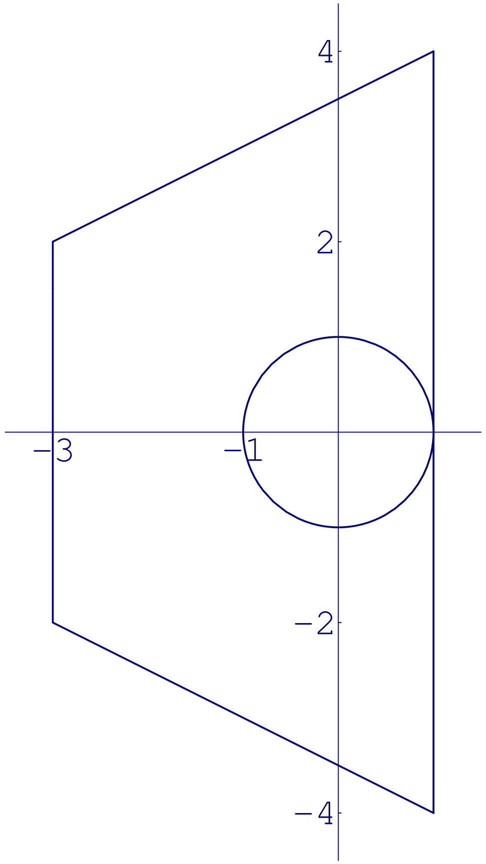

図 8c

制御点と重みを $\boldsymbol{b}_0=(1,0)$, $\boldsymbol{b}_1=(1,-4)$, $\boldsymbol{b}_2=(-3,-2)$, $\boldsymbol{b}_3=(-3,2)$, $\boldsymbol{b}_4=(1,4)$, $\boldsymbol{b}_5=(1,0)$, $w_0=1$, $w_1=1/5$, $w_2=1/5$, $w_3=1/5$, $w_4=1/5$, $w_5=1$ で与えると，有理ベジエ曲線は $\boldsymbol{x}(t)=$

$$\left(\frac{-(2t^2-4t+1)(2t^2-1)}{(1+2t^2-2t)^2}, \frac{4(2t-1)(1-t)t}{(1+2t^2-2t)^2}\right)$$

となり， $(0\leqq t\leqq 1)$ を動くとき， $\boldsymbol{x}(t)$ は半径 1 の円をあらわす（ 図 8c ）.