

1.5 重心結合とアフィン写像

平行移動，拡大や縮小，回転移動などにより，ベジエ曲線はどのように変化するかなどを調べるために，(線形代数からの)準備をしよう.

平面 \mathbb{R}^2 あるいは空間 \mathbb{R}^3 の $n+1$ 個の点 b_0, b_1, \dots, b_n を考える.

$$b = c_0 b_0 + c_1 b_1 + \dots + c_n b_n, \quad c_0 + c_1 + \dots + c_n = 1$$

と表わされるとき， b を b_0, b_1, \dots, b_n の**重心結合**という.

例えば3点 b_0, b_1, b_2 の作る三角形の重心 $g = \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_2$ は，重心結合の一例である.

集合

$$P = \left\{ \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j \mid \sum_{j=0}^n c_j = 1, 0 \leq c_j \leq 1 \right\}$$

を $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ で生成される多角形または凸包とよぶ。

例 1. 2点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ のとき, P は線分である。

例 2. 3点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ のとき, P は三角形の内部と境界である。



図 5

例 3. 空間 \mathbb{R}^3 の 4 点 b_0, b_1, b_2, b_3 を考えると, 一般には P は四面体の内部と境界である (図 6a).

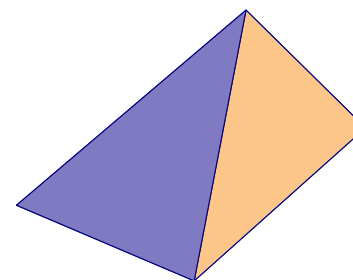


図 6a

例 4. 4 点 b_0, b_1, b_2, b_3 が同一平面上にあるとき, P は四辺形の内部と境界である (図 6b).

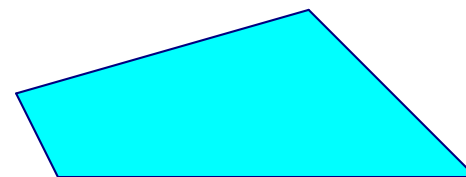


図 6b

ベジエ曲線とその制御多角形との関係を見よう.

ベジエ曲線 $b_0^n(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ のとき, 制御多角形内にある. これを **ベジエ曲線の凸包性** という.

このことは次のようにしてわかる.

ド・カステリヨのアルゴリズム：平面 \mathbb{R}^2 あるいは空間 \mathbb{R}^3 の $n + 1$ 個の点 b_0, b_1, \dots, b_n と実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $b_i^0(t) = b_i$ とし、

$$b_i^r(t) = (1 - t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t) \quad (r = 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n - r) \quad (1)$$

とおく。

ド・カステリヨのアルゴリズム (1) において、 $b_i^r(t)$ は 1 つ前の段階である $b_i^{r-1}(t)$ と $b_{i+1}^{r-1}(t)$ とを $t : 1 - t$ に内分する点として得られ、これを繰り返すことにより $b_i^r(t)$ は得られる。

従って、 $b_i^r(t)$ は b_0, b_1, \dots, b_n から生成される制御多角形内にある。特に、ベジエ曲線 $b_0^n(t)$ は制御多角形内にあることがわかる。

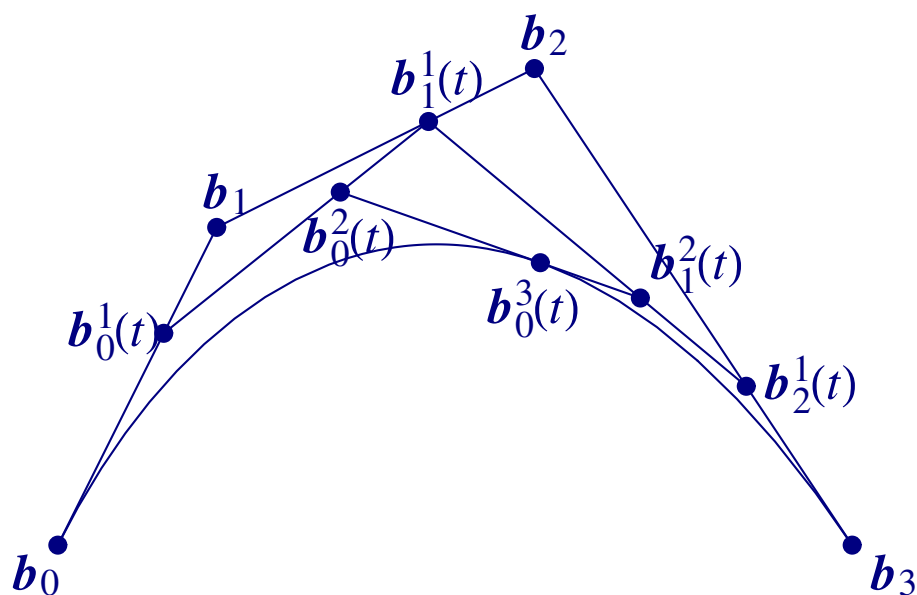


図 3

次に、平行移動、拡大や縮小、回転移動などと、ベジエ曲線の形の関係を調べよう。まず、平行移動、拡大や縮小、回転移動を含む写像について考える。

写像 $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ は、すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ とすべて実数 c に対して

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y}) \quad \text{および} \quad F(c\mathbf{x}) = cF(\mathbf{x})$$

が成り立つとき、**線形写像**であるという。

行列 A に対して、 $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ とおくと、 $F(\mathbf{x})$ は線形写像となる。

線形写像 $F : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^m$ と $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ により

$$\Phi(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$$

と表わされる写像 $\Phi : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^m$ を**アフィン写像**という。

アフィン写像の例としては次のようなものがある.

1) 平行移動: $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$ のとき, \mathbf{v} による平行移動という (図 7).

2) 拡大と縮小: $\mathbf{v} = 0$ で $\Phi(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ のとき, $k > 1$ のとき拡大, $0 < k < 1$ のとき縮小という. (図 8)

3) 回転移動: $\mathbf{v} = 0$ で F が直交変換のとき回転移動という. (図 9)

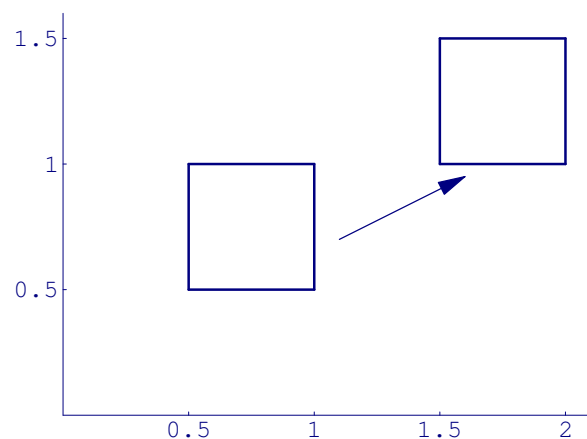


図 7

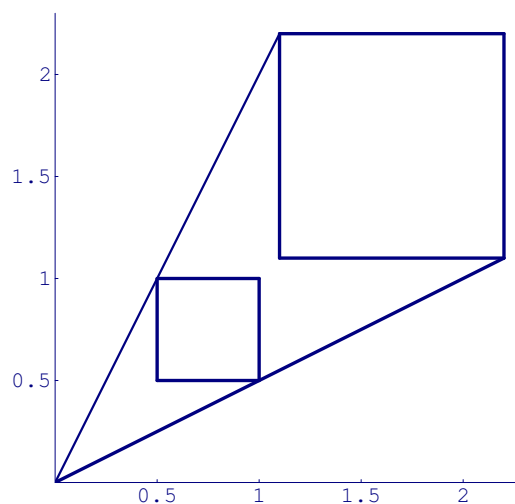


図 8

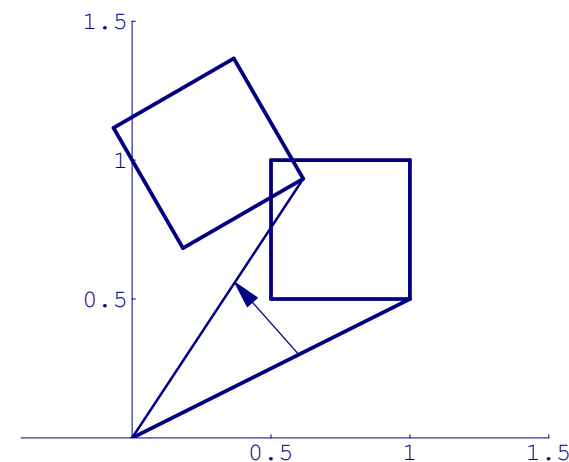


図 9

アフィン写像 $\Phi : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対しては，次が成り立つ：

$$\mathbf{b} = \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j, \quad \sum_{j=0}^n c_j = 1 \quad \text{に対して} \quad \Phi(\mathbf{b}) = \sum_{j=0}^n c_j \Phi(\mathbf{b}_j).$$

また， $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して， $\mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ で定まるアフィン写像 $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ を点 \mathbf{a}, \mathbf{b} の線形補間という。

ド・カステリョのアルゴリズムから，ベジエ曲線は**アフィン写像に対して不変**であることがわかる。すなわち，次の2つの操作で得られる結果は同じである：

- 1) 与えられた制御点をもつベジエ曲線 $\mathbf{b}_n(t)$ を計算し，この曲線をアフィン写像で写す。
- 2) 制御点をアフィン写像で写してから，これらの制御点のベジエ曲線を計算する。

すなわち, $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ を制御点, $\Phi: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ をアフィン写像とすると, 次が成り立つ:

$$\Phi \left(\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) \right) = \sum_{j=0}^n \Phi(\mathbf{b}_j) B_j^n(t).$$

これは, 線形補間はアフィン写像に対して不変, すなわち,

$$\Phi((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = (1-t)\Phi(\mathbf{a}) + t\Phi(\mathbf{b}) \text{ で,}$$

ベジエ曲線はド・カステリョのアルゴリズムにより, 繰り返し線形補間で構成されていることからわかる.

アフィン写像に対して不変であるという性質により, **ベジエ曲線を平行移動, 拡大や縮小, 回転移動させるには, ベジエ点を動かしてからベジエ曲線を求めればよい.** この性質がアニメーションの製作やフォント(活字)の設計に, ベジエ曲線が用いられる理由の1つになっている.

a) **アフィン不変性**： ベジエ曲線のベルンシュタイン多項式による表現 (6) は，性質 (3) の前半より b_0, \dots, b_n の重心結合とみなせる：

$$b_0^n(t) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(t), \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1 \quad \text{ことから，ベジエ曲線はア}$$

フィン写像に対して不変であることがわかる。

b) **凸包性**： 曲線 $b_0^n(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ のとき，制御多角形の凸包内にある。これは，ベルンシュタイン多項式 $B_j^n(t)$ は非負であり，その和は 1 であることからわかる。すなわち，ベジエ曲線は集合

$$P = \left\{ \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j \mid \sum_{j=0}^n c_j = 1, 0 \leq c_j \leq 1 \right\}$$

に含まれる。