

4) 曲線  $(-u^2 + 1, -u^3 + u)$  ( $-1 \leq u \leq 1$ ) のベジエ点を求めることを考えよう。  $x = -(2t - 1)^2 + 1$ ,  $y = -(2t - 1)^3 + (2t - 1)$

$$(0 \leq t \leq 1) \text{ とおいて } -(2t - 1)^2 + 1 = \frac{4}{3}B_1^3(t) + \frac{4}{3}B_2^3(t),$$

$$(2t - 1)^3 + (2t - 1) = -\frac{4}{3}B_1^3(t) + \frac{4}{3}B_2^3(t) \text{ より}$$

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0), \mathbf{b}_1 = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right), \mathbf{b}_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \mathbf{b}_3 = (0, 0) \text{ を得る .}$$

## 1.4 ベジエ曲線の次数上げ, 細分割, 導関数

区分的にはベジエ曲線となっている曲線を用いて形状設計を行っているとき, 制御多角形を何度か変更した後で, ある部分が  $n$  次の曲線では望ましい形状を作成するだけの自由度をもっていないことが分かったとする. このとき, すでにある望ましい部分の形状を変えないで, 自

由度を上げる必要が生じる。すなわち，曲線の形状を変えないようにベジエ点を1個追加することが必要となる。これがベジエ曲線の次数上げである。

$b_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) をベジエ点とする。  $b_i^{(1)}$  を

$$b_i^{(1)} = \frac{i}{n+1} b_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) b_i, \quad (i = 0, \dots, n+1) \quad (7)$$

で定義すると，  $n$  次ベジエ曲線  $b_0^n(t)$  は，  $b_i^{(1)}$  をベジエ点とする

$n+1$  次ベジエ曲線  $\sum_{i=0}^{n+1} b_i^{(1)} B_i^{n+1}(t)$  として表せる。

実際，  $b_i$  をベジエ点とする  $n$  次ベジエ曲線と，  $b_i^{(1)}$  をベジエ点とする  $n+1$  次ベジエ曲線が等しいためには

$$\sum_{i=0}^n b_i \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \sum_{i=0}^{n+1} b_i^{(1)} \binom{n+1}{i} (1-t)^{n-i+1} t^i$$

が成り立たなくてはならない。左辺に  $1 = ((1-t) + t)$  をかけて

$$\sum_{i=0}^n b_i \binom{n}{i} ((1-t)^{n-i+1} t^i + (1-t)^{n-i} t^{i+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i^{(1)} \binom{n+1}{i} (1-t)^{n-i+1} t^i$$

これらの両辺の  $(1-t)^{n-i+1} t^i$  の係数を比較して

$$b_i^{(1)} \binom{n+1}{i} = b_i \binom{n}{i} + b_{i-1} \binom{n}{i-1} \text{ を得る。よって}$$

$$b_i^{(1)} = \frac{\binom{n}{i-1}}{\binom{n+1}{i}} b_{i-1} + \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} b_i = \frac{i}{n+1} b_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) b_i$$

を得る。

次数上げを繰り返すことにより， $n$  次ベジエ曲線を  $n + r$  次ベジエ曲線としてあらわすことができる．このとき，対応するベジエ点  $b_i^{(r)}$  は

$$b_i^{(r)} = \sum_{j=i-r}^i \frac{{}_n C_j \cdot {}_r C_{i-j}}{{}_{n+r} C_i} b_j, \quad i = 0, \dots, n + r \quad (8)$$

で与えられる．

また，制御多角形を次数上げする作用素を  $\mathcal{E}$ ， $P$  を  $n$  次ベジエ多角形とし，次数上げを行ったベジエ多角形の列  $P, \mathcal{E}P, \mathcal{E}^2P, \dots$  について次の定理が成り立つことがわかる．

**定理 1.2 (収束)** 次数上げを繰り返していくと，ベジエ多角形はベジエ曲線に収束する．すなわち  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}^r P = b_0^n(t)$  が成り立つ．

**補題 1.3 (細分割)** ド・カステリョのアルゴリズムを用いて、ベジエ曲線を  $t = t_0$  で2つのベジエ曲線に細分割することができる。細分割された2つのベジエ曲線  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  のベジエ点はド・カステリョの図式(9)の境界の点で与えられる。すなわち、 $b_0, b_0^1(t_0), b_0^2(t_0), \dots, b_0^n(t_0)$  と  $b_0^n(t_0), b_1^{n-1}(t_0), b_2^{n-2}(t_0), \dots, b_n$  がそれぞれのベジエ点となる。

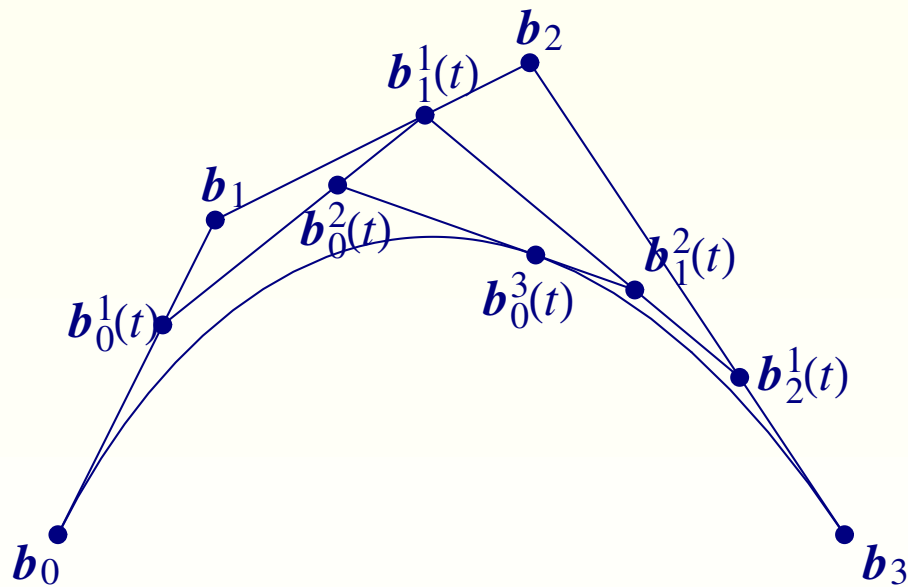


図 3

$$\begin{array}{cccc}
 b_0 & & & \\
 b_1 & b_0^1(t) & & \\
 b_2 & b_1^1(t) & b_0^2(t) & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 b_n & b_{n-1}^1(t) & b_{n-2}^2(t) & \cdots & b_0^n(t)
 \end{array} \tag{9}$$

証明.  $c_1(t) = \mathbf{b}_0^n(t_0t)$  のベジエ点を求めよう.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_0^n(t_0t) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t_0t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \sum_{r=j}^n B_j^r(t_0) B_r^n(t) \\
 &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \sum_{r=0}^n B_j^r(t_0) B_r^n(t) = \sum_{j=0}^n \sum_{r=0}^n \mathbf{b}_j B_j^r(t_0) B_r^n(t) \\
 &= \sum_{r=0}^n \left( \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^r(t_0) \right) B_r^n(t) = \sum_{r=0}^n \left( \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_j B_j^r(t_0) \right) B_r^n(t) \\
 &= \sum_{r=0}^n \mathbf{b}_0^r(t_0) B_r^n(t).
 \end{aligned}$$

$\mathbf{b}_0^0(t_0) = \mathbf{b}_0$  に注意して,  $c_1(t)$  のベジエ点は  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1(t_0), \mathbf{b}_0^2(t_0), \dots, \mathbf{b}_0^n(t_0)$  となる. 同様にして,  $c_2(t)$  のベジエ点は  $\mathbf{b}_0^n(t_0), \mathbf{b}_1^{n-1}(t_0), \mathbf{b}_2^{n-2}(t_0), \dots, \mathbf{b}_n$  となる.

ここで、証明に用いた式 (4)  $B_j^n(st) = \sum_{r=j}^n B_j^r(s) B_r^n(t)$  を示す.

$$B_j^n(st) = {}_n C_j (1-st)^{n-j} (st)^j = {}_n C_j (1-t+t-st)^{n-j} (st)^j$$

$$= {}_n C_j \sum_{i=0}^{n-j} {}_{n-j} C_i (1-t)^{n-j-i} t^i (1-s)^i (st)^j$$

$$= \sum_{i=0}^{n-j} {}_n C_j {}_{n-j} C_i (1-s)^i s^j (1-t)^{n-j-i} t^{i+j}$$

ここで  $i+j=r$  とおくと,

$$= \sum_{r=j}^n {}_n C_j {}_{n-j} C_{r-j} \frac{1}{{}_r C_j} B_j^r(s) \frac{1}{{}_n C_r} B_r^n(t)$$

ここで  $\frac{{}_n C_j {}_{n-j} C_{r-j}}{{}_r C_j {}_n C_r} = 1$  に注意すると求める式を得る.

ベジエ曲線  $\mathbf{b}_0^n(t)$  の導関数は、制御点の差分を用いて計算できる。

制御点の前進差分演算子  $\Delta^k \mathbf{b}_j$  を帰納的に

$\Delta^0 \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j$ ,  $\Delta^k \mathbf{b}_j = \Delta^{k-1}(\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j)$  で定義すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{b}_0^n(t) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \frac{d}{dt} B_j^n(t) = n \sum_{j=0}^n (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)) \mathbf{b}_j \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t) \text{ となる.} \end{aligned}$$

特に、ベジエ曲線  $\mathbf{b}_0^n(t)$  は端点  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_n$  でそれぞれ、ベジエ多角形の辺  $\overline{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1}, \overline{\mathbf{b}_{n-1} \mathbf{b}_n}$  に接することがわかる。上述の細分割とあわせると、ベジエ曲線  $\mathbf{b}_0^n(t)$  は点  $\mathbf{b}_0^n(t_0)$  で線分  $\overline{\mathbf{b}_0^{n-1}(t_0) \mathbf{b}_1^{n-1}(t_0)}$  に接していることもわかる。



また，高階の導関数に対しても，

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{b}_0^n(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \Delta^k \mathbf{b}_j B_j^{n-k}(t)$$

が成り立つ．

## 1.5 重心結合とアフィン写像

平行移動，拡大や縮小，回転移動などにより，ベジエ曲線はどのように変化するかなどを調べるために，(線形代数からの)準備をしよう.

平面  $\mathbb{R}^2$  あるいは空間  $\mathbb{R}^3$  の  $n+1$  個の点  $b_0, b_1, \dots, b_n$  を考える.

$$b = c_0 b_0 + c_1 b_1 + \dots + c_n b_n, \quad c_0 + c_1 + \dots + c_n = 1$$

と表わされるとき， $b$  を  $b_0, b_1, \dots, b_n$  の**重心結合**という.

例えば3点  $b_0, b_1, b_2$  の作る三角形の重心  $g = \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_2$  は，重心結合の一例である.

## 集合

$$P = \left\{ \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j \mid \sum_{j=0}^n c_j = 1, 0 \leq c_j \leq 1 \right\}$$

を  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  で生成される多角形または凸包とよぶ。

例 1. 2点  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  のとき,  $P$  は線分である。

例 2. 3点  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  のとき,  $P$  は三角形の内部と境界である。



図 5

例 3. 空間  $\mathbb{R}^3$  の 4 点  $b_0, b_1, b_2, b_3$  を考えると, 一般には  $P$  は四面体の内部と境界である (図 6a).

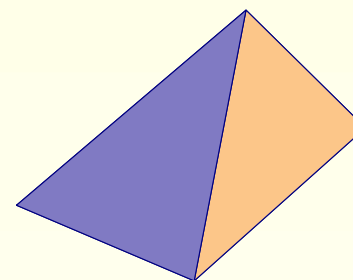


図 6a

例 4. 4 点  $b_0, b_1, b_2, b_3$  が同一平面上にあるとき,  $P$  は四辺形の内部と境界である (図 6b).

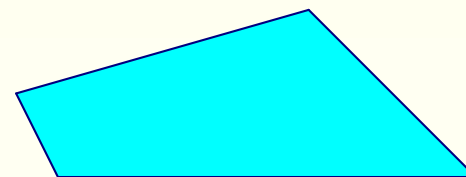


図 6b

ベジエ曲線とその制御多角形との関係を見よう.

ベジエ曲線  $b_0^n(t)$  は  $0 \leq t \leq 1$  のとき, 制御多角形内にある. これを **ベジエ曲線の凸包性** という.

このことは次のようにしてわかる.

**ド・カステリヨのアルゴリズム**：平面  $\mathbb{R}^2$  あるいは空間  $\mathbb{R}^3$  の  $n + 1$  個の点  $b_0, b_1, \dots, b_n$  と実数  $t \in \mathbb{R}$  に対して， $b_i^0(t) = b_i$  とし，

$$b_i^r(t) = (1 - t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t) \quad (r = 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n - r) \quad (1)$$

とおく．

ド・カステリヨのアルゴリズム (1) において， $b_i^r(t)$  は 1 つ前の段階である  $b_i^{r-1}(t)$  と  $b_{i+1}^{r-1}(t)$  とを  $t : 1 - t$  に内分する点として得られ，これを繰り返すことにより  $b_i^r(t)$  は得られる．

従って， $b_i^r(t)$  は  $b_0, b_1, \dots, b_n$  から生成される制御多角形内にある．特に，ベジエ曲線  $b_0^n(t)$  は制御多角形内にあることがわかる．

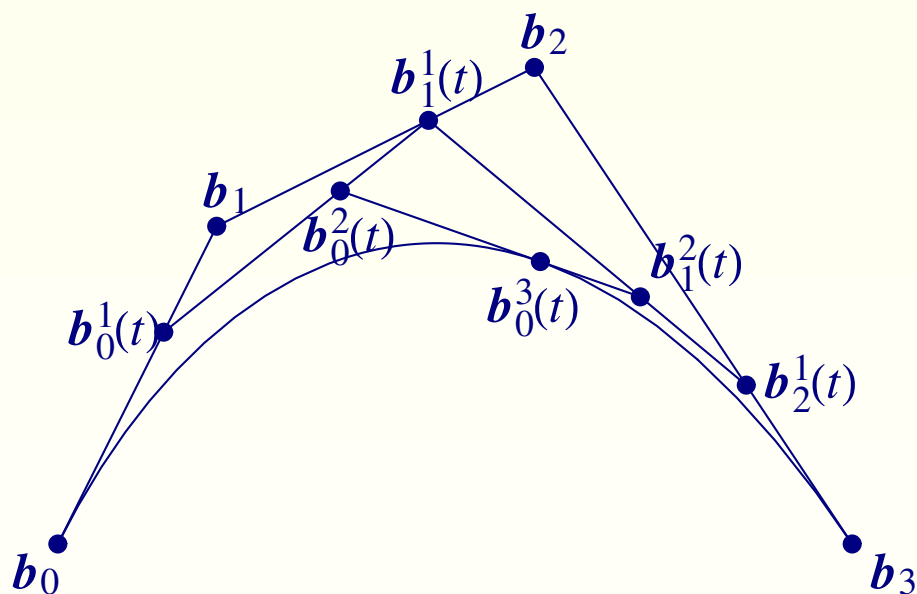


図 3