1.3 ベジエ曲線のベルンシュタイン表現

ベジエ曲線をベルンシュタイン多項式を用いてあらわすことを考える.

まず，n 次の**ベルンシュタイン多項式** $B_i^n(t)$ は次で定義される t の多項式である：

$$B_i^n(t) = {}_nC_i\,(1-t)^{n-i}t^i, \qquad \text{ここに } {}_nC_i = \frac{n!}{(n-i)!i!},$$

ただし，$B_0^0(t) = 1$ とし， j が $\{0, 1, \cdots, n\}$ 以外の値をとるとき $B_j^n(t) = 0$ とおく.

$n = 2$ のとき，$B_0^2(t) = (1-t)^2, B_1^2(t) = 2(1-t)t, B_2^2(t) = t^2,$

$n = 3$ のとき，$B_0^3(t) = (1-t)^3,\ B_0^3(t) = 3(1-t)^2t,$
$B_2^3(t) = 3(1-t)t^2,\ B_3^3 = t^3$ となる.

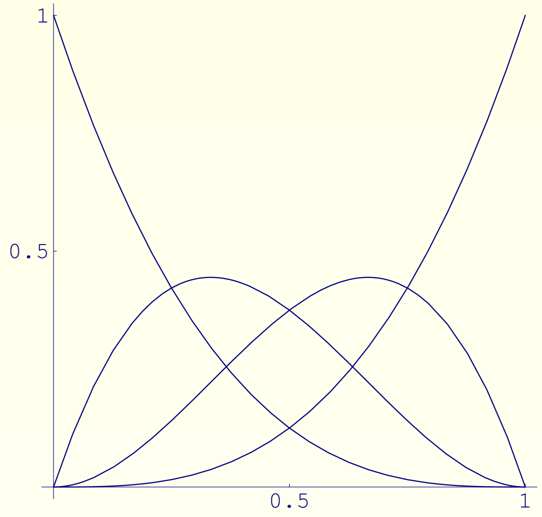

図 10a

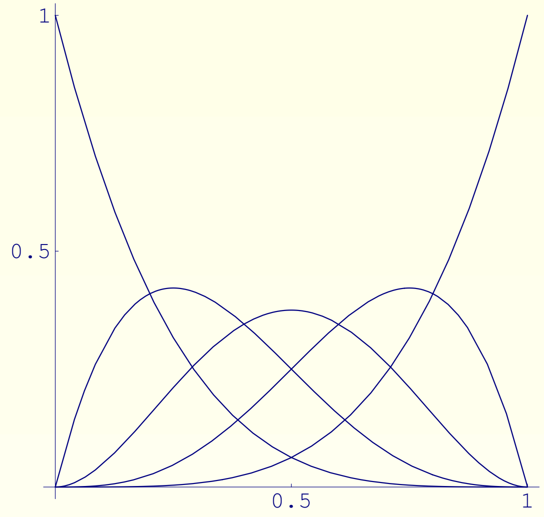

図 10b

3 次，および 4 次のベルンシュタイン多項式のグラフは図 10a, 図 10b のようになる．

ベルンシュタイン多項式のいくつかの性質をあげておこう．

1)　ベルンシュタイン多項式 $B_i^n(t)$ は次の漸化式をみたす．

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \tag{2}$$

2)　単項式 $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ はベルンシュタイン多項式 $\{B_0^n(t), B_1^n(t), \cdots, B_n^n(t)\}$ を用いてあらわせる：

$$1 = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t), \qquad t^i = \sum_{j=i}^{n} \frac{{}_jC_i}{{}_nC_i} B_j^n(t) \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad (3)$$

が成り立つ.

実際，$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)$.

つぎに $i = 1$ のときに　(3) を示そう．まず,

$t = 1 \cdot t = [(1-t) + t]^{n-1} t = (\sum_{r=0}^{n-1} {}_{n-1}C_r (1-t)^{n-1-r} t^r) t$ となること

に注意する．ここで，${}_{n-1}C_r = \dfrac{r+1}{n} {}_nC_{r+1}$ に注意して，$i = r + 1$ と添字をとりかえると，上式は

$$t = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} {}_nC_i (1-t)^{n-i} t^{i-1} \right) t = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} B_i^n(t)$$ となり，求める式を得る．

3)　ベジエ曲線の細分割を示すために使われるベルンシュタイン多項式の関係式として，つぎが成り立つ：

$$B_j^n(s\,t) = \sum_{k=0}^{n} B_j^k(s) B_k^n(t). \tag{4}$$

次の命題は，r に関する数学的帰納法により，(2) から容易に示せる．

命題 1.1 ド・カステリョのアルゴリズムにおける中間点 $\boldsymbol{b}_i^r(t)$ は，r 次のベルンシュタイン多項式を用いて，

$$\boldsymbol{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{b}_{i+j} B_j^r(t) \quad (r = 0, 1, \cdots, n;\ i = 0, 1, \cdots, n-r) \tag{5}$$

と表せる．

特に，$r = n$ のとき，ベジエ曲線のベルンシュタイン多項式による表現

$$\boldsymbol{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^n(t) \tag{6}$$

を得る．これを，ベジエ曲線の**ベルンシュタイン表現**とよぶ．

(5) の証明　　r に関する数学的帰納法により示す．

ド・カステリョのアルゴリズムの式 (1) より

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_i^r(t) &= (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) \\
&= (1-t)\sum_{j=0}^{r-1}\mathbf{b}_{i+j}B_j^{r-1}(t) + t\sum_{j=0}^{r-1}\mathbf{b}_{i+j+1}B_j^{r-1}(t)
\end{aligned}
$$

添字をとりかえて，次を得る．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_i^r(t) &= (1-t)\sum_{j=0}^{r}\mathbf{b}_{i+j}B_j^{r-1}(t) + t\sum_{j=0}^{r}\mathbf{b}_{i+j}B_{j-1}^{r-1}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{r}\mathbf{b}_{i+j}\left((1-t)B_j^{r-1}(t) + tB_{j-1}^{r-1}(t)\right)
\end{aligned}
$$

したがって (2) により，求める結果を得る．

ここで，ベジエ曲線の性質をまとめておく．

1）**端点一致：** ベジエ曲線は $\boldsymbol{b}_0^n(0) = \boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_0^n(1) = \boldsymbol{b}_n$ を通る．

これは，$j = 0$ のとき $B_j^n(0) = 1$, $j \neq 0$ のとき $B_j^n(0) = 0$, また，$j = n$ のとき $B_j^n(1) = 1$ ，$j \neq n$ のとき $B_j^n(1) = 0$ からもわかる．

2）**対称性：** ベジエ制御点を $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ あるいは $\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{b}_0$ とするとき，２つの曲線は向きをのぞいて，同じである．すなわち，

$$\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_{n-j} B_j^n(1-t)$$

が成り立つ．これは，ベルンシュタイン多項式の性質 $B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t)$ からわかる．

3) **直線再現性** ：制御点 $\boldsymbol{b}_j$ が２点 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ をを結ぶ直線上に等間隔に配置されていたとする：

$$\boldsymbol{b}_j = (1 - \frac{j}{n})\mathbf{p} + \frac{j}{n}\mathbf{q} \quad (j = 0, 1, \cdots, n).$$

このとき，$t = \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{n} B_j^n(t)$ より，$\boldsymbol{b}_j$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$ から作られる曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ は２点 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ を結ぶ直線 $(1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ となる.

単項式をベルンシュタイン多項式であらわす式（3）の応用例

1) 放物線 $y = x^2$ のベジエ点を求めることを考えよう。

$1 = B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t)$, $t = \dfrac{1}{2}B_1^2(t) + B_2^2(t)$, $t^2 = B_2^2(t)$ に注意する.

a） $x = t$, $y = t^2$ （ $0 \le t \le 1$ ）の場合

$\boldsymbol{b}_0 = (0,\ 0), \boldsymbol{b}_1 = (\dfrac{1}{2}, 0), \boldsymbol{b}_2 = (1,\ 1).$

b） $x = 2t - 1$, $y = (2t-1)^2$ （ $0 \le t \le 1$ ）の場合

$2t - 1 = -B_0^2(t) + B_2^2(t)$ ，$4t^2 - 4t + 1 = B_0^2(t) - B_1^2(t) + B_2^2(t)$ より $\boldsymbol{b}_0 = (-1,\ 1), \boldsymbol{b}_1 = (0,\ -1), \boldsymbol{b}_2 = (1,\ 1)$ を得る．

2）放物線 $y = x^2 - 2x$ （ $-1 \le x \le 3$ ）のベジエ点を求めることを考えよう。$x = 4t - 1$, $y = (4t-1)^2 - 2(4t-1)$ （ $0 \le t \le 1$ ）とおいて $4t - 1 = -B_0^2(t) + B_1^2(t) + 3B_2^2(t)$,

$(4t-1)^2 - 2(4t-1) = 16t^2 - 16t + 1 = B_0^2(t) - 7B_1^2(t) + B_2^2(t)$ より $\boldsymbol{b}_0 = (-1,\ 1), \boldsymbol{b}_1 = (1,\ -7), \boldsymbol{b}_2 = (1,\ 1)$ を得る．

3) 曲線 $y^2 = x^3$ ($0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$) のベジエ点を求めることを考えよう。$1 = B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t)$,
$t = \dfrac{1}{3}B_1^3(t) + \dfrac{2}{3}B_2^3(t) + B_3^3(t)$, $t^2 = \dfrac{1}{3}B_2^3(t) + B_3^3(t)$, $t^3 = B_3^3(t)$ に注意する.

$x = (2t-1)^2$, $y = (2t-1)^3 \quad (0 \le t \le 1)$ とおいて
$(2t-1)^2 = B_0^3(t) - \dfrac{1}{3}B_1^3(t) - \dfrac{1}{3}B_2^3(t) + B_3^3(t)$,
$(2t-1)^3 = -B_0^3(t) + B_1^3(t) - 1B_2^3(t) + B_3^3(t)$ より
$\boldsymbol{b}_0 = (1,\ -1), \boldsymbol{b}_1 = (-\dfrac{1}{3},\ 1), \boldsymbol{b}_2 = (-\dfrac{1}{3},\ -1), \boldsymbol{b}_3 = (1,\ 1)$ を得る .

4) 曲線 $(-u^2+1, -u^3+u) \quad (-1 \leq u \leq 1)$ のベジエ点を求めることを考えよう。$x = -(2t-1)^2+1$, $y = -(2t-1)^3+(2t-1)$ $(0 \leq t \leq 1)$ とおいて $-(2t-1)^2+1 = \frac{4}{3}B_1^3(t) + \frac{4}{3}B_2^3(t)$, $(2t-1)^3+(2t-1) = -\frac{4}{3}B_1^3(t) + \frac{4}{3}B_2^3(t)$ より

$\boldsymbol{b}_0 = (0,\ 0), \boldsymbol{b}_1 = (\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}), \boldsymbol{b}_2 = (\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}), \boldsymbol{b}_3 = (0,\ 0)$ を得る．

1.4 ベジエ曲線の次数上げ，細分割，導関数

区分的にはベジエ曲線となっている曲線を用いて形状設計を行っているとき，制御多角形を何度か変更した後で，ある部分が n 次の曲線では望ましい形状を作成するだけの自由度をもっていないことが分かったとする．このとき，すでにある望ましい部分の形状を変えないで，自

由度を上げる必要が生じる．すなわち，曲線の形状を変えないようにベジエ点を 1 個追加することが必要となる．これがベジエ曲線の次数上げである．

$\boldsymbol{b}_i \ (i = 0, \ldots, n)$ をベジエ点とする．$\boldsymbol{b}_i^{(1)}$ を

$$\boldsymbol{b}_i^{(1)} = \frac{i}{n+1}\boldsymbol{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\boldsymbol{b}_i, \quad (i = 0, \ldots, n+1) \tag{7}$$

で定義すると，n 次ベジエ曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ は，$\boldsymbol{b}_i^{(1)}$ をベジエ点とする $n+1$ 次ベジエ曲線 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \boldsymbol{b}_i^{(1)} B_i^{n+1}(t)$ として表せる．