1.3 ベジエ曲線のベルンシュタイン表現

ベジエ曲線をベルンシュタイン多項式を用いてあらわすことを考える．

まず，n 次の**ベルンシュタイン多項式** $B_i^n(t)$ は次で定義される t の多項式である：

$$B_i^n(t) = {}_nC_i\,(1-t)^{n-i}t^i, \qquad \text{ここに } {}_nC_i = \frac{n!}{(n-i)!i!},$$

ただし，$B_0^0(t) = 1$ とし， j が $\{0, 1, \cdots, n\}$ 以外の値をとるとき $B_j^n(t) = 0$ とおく．

$n = 2$ のとき，$B_0^2(t) = (1-t)^2, B_1^2(t) = 2(1-t)t, B_2^2(t) = t^2,$

$n = 3$ のとき，$B_0^3(t) = (1-t)^3$, $B_0^3(t) = 3(1-t)^2t,$ $B_2^3(t) = 3(1-t)t^2$, $B_3^3 = t^3$ となる．

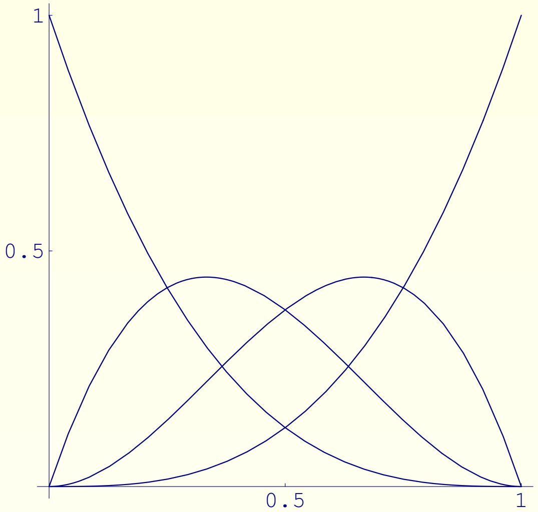

図 10a

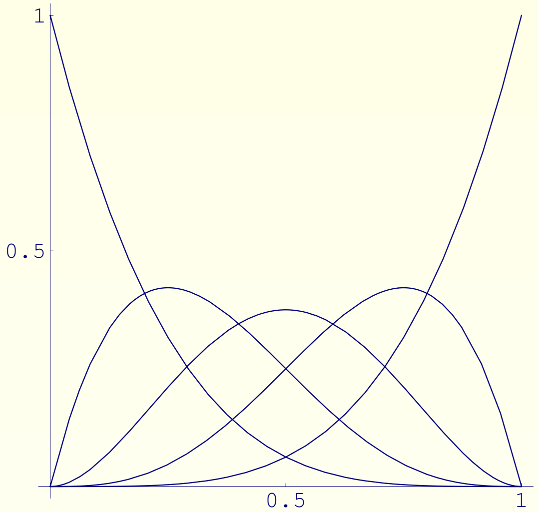

図 10b

3 次，および 4 次のベルンシュタイン多項式のグラフは図 10a, 図 10b のようになる．

ベルンシュタイン多項式のいくつかの性質をあげておこう．

1)　ベルンシュタイン多項式 $B_i^n(t)$ は次の漸化式をみたす．

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \tag{2}$$

2)　単項式 $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ はベルンシュタイン多項式 $\{B_0^n(t), B_1^n(t), \cdots, B_n^n(t)\}$ を用いてあらわせる：

$$1 = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t), \qquad t^i = \sum_{j=i}^{n} \frac{{}_jC_i}{{}_nC_i} B_j^n(t) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{3}$$

が成り立つ.

3)　ベジエ曲線の細分割を示すために使われるベルンシュタイン多項式の関係式として，つぎが成り立つ：

$$B_j^n(s\,t) = \sum_{k=0}^{n} B_j^k(s) B_k^n(t). \tag{4}$$

次の命題は，r に関する数学的帰納法により，(2) から容易に示せる．

命題 1.1 ド・カステリョのアルゴリズムにおける中間点 $\boldsymbol{b}_i^r(t)$ は，r 次のベルンシュタイン多項式を用いて，

$$\boldsymbol{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{b}_{i+j} B_j^r(t) \quad (r = 0, 1, \cdots, n;\ i = 0, 1, \cdots, n-r) \tag{5}$$

と表せる．

特に，$r = n$ のとき，ベジエ曲線のベルンシュタイン多項式による表現

$$\boldsymbol{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^n(t) \tag{6}$$

を得る．これを，ベジエ曲線の**ベルンシュタイン表現**とよぶ．

ここで，ベジエ曲線の性質をまとめておく．

1）端点一致： ベジエ曲線は $\boldsymbol{b}_0^n(0) = \boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_0^n(1) = \boldsymbol{b}_n$ を通る．

これは，$j = 0$ のとき $B_j^n(0) = 1$, $j \neq 0$ のとき $B_j^n(0) = 0$，また，$j = n$ のとき $B_j^n(1) = 1$ ，$j \neq n$ のとき $B_j^n(1) = 0$ からもわかる．

2）対称性： ベジエ制御点を $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ あるいは $\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{b}_0$ とするとき，２つの曲線は向きをのぞいて，同じである．すなわち，

$$\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_{n-j} B_j^n(1-t)$$

が成り立つ．これは，ベルンシュタイン多項式の性質 $B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t)$ からわかる．

3) **直線再現性** ：制御点 $\boldsymbol{b}_j$ が２点 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ をを結ぶ直線上に等間隔に配置されていたとする：

$$\boldsymbol{b}_j = (1 - \frac{j}{n})\mathbf{p} + \frac{j}{n}\mathbf{q} \quad (j = 0, 1, \cdots, n).$$

このとき，$t = \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{n} B_j^n(t)$ より，$\boldsymbol{b}_j$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$ から作られる曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ は２点 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ を結ぶ直線 $(1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ となる．