

テンソル積ベジエ曲面

テンソル積ベジエ曲面は，双一次補間の考え方を一般化したものである． \mathbb{R}^3 の $(m+1)(n+1)$ 個の点 $\mathbf{b}_{i,j}$ を与える．最初に移動する曲線を m 次のベジエ曲線とすると次のように表わされる：

$$\mathbf{b}^m = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i B_i^m(u).$$

各 \mathbf{b}_i が n 次のベジエ曲線上を移動すると， $\mathbf{b}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v)$ となる．これら2つの式をあわせて次の式で定義される曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ が得られる：

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ を $(m+1)(n+1)$ の制御点 $\mathbf{b}_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) から構成される**テンソル積ベジエ曲面**または**ベジエ曲面**という (図 15)。格子点配列された制御点の並びは、**ベジエネット**または**制御ネット**と呼ばれる。

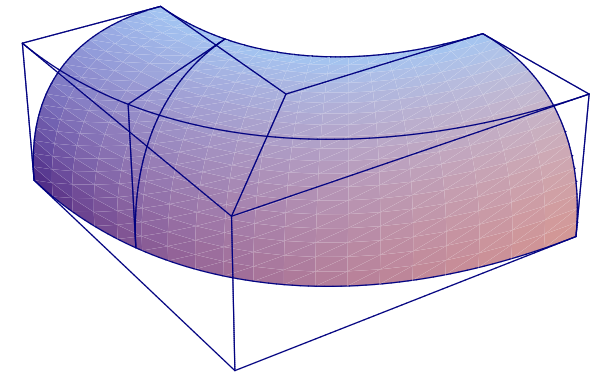


図 15

曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ の $v = v_0$ である等パラメータ曲線は u についての m 次のベジエ曲線であり、その $m+1$ 個のベジエ制御点は $\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v_0)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) で与えられる。

テンソル積ベジエ曲面はベジエ曲線と類似の性質をもつ。

a) アフィン不変性 :

曲面上の点 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ は $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) = 1$ より $\mathbf{b}_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) の重心結合とみなせる. 従って, アフィン写像で不変である.

b) 凸包性 :

曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ は $u, v \in I = [0, 1]$ に対して制御多角形の凸包内にある. これは, 多項式 $B_i^m(u) B_j^n(v)$ は非負であり, その和は 1 であることからわかる.

c) 境界曲線 :

曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ ($(u, v) \in I \times I$) の境界曲線は u あるいは v についてのベジエ曲線である. 特に, 曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ は 4 点 $\mathbf{b}_{0,0}, \mathbf{b}_{m,0}, \mathbf{b}_{0,n}, \mathbf{b}_{m,n}$ を通る.

例 1. $m = 2, n = 2$ で, 9 点を $\mathbf{b}_{0,0} = (0, 0, 0)$,
 $\mathbf{b}_{0,1} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{0,2} = (2, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{1,0} = (0, 1, 1)$,
 $\mathbf{b}_{1,1} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_{1,2} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b}_{2,0} = (0, 2, 0)$,
 $\mathbf{b}_{2,1} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b}_{2,2} = (2, 2, 0)$ とすると, ベジエ
 曲面は図 16 のようになる.

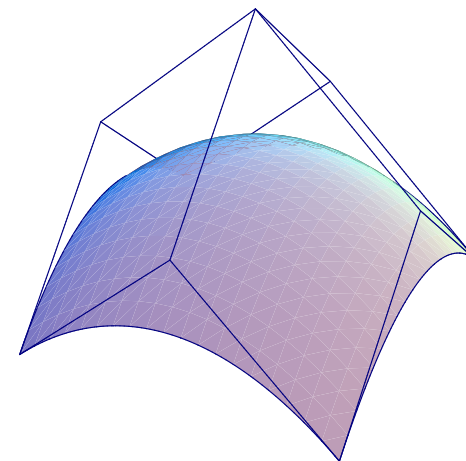


図 16

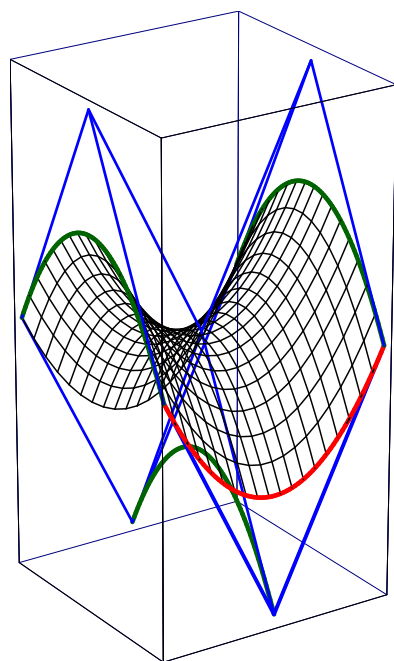


図 17

例 2. $m = 2, n = 2$ で, 9 点を
 $\mathbf{b}_{0,0} = (-1, -1, 0)$, $\mathbf{b}_{0,1} = (-1, 0, 2)$,
 $\mathbf{b}_{0,2} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_{1,0} = (0, -1, -2)$,
 $\mathbf{b}_{1,1} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{1,2} = (0, 1, -2)$,
 $\mathbf{b}_{2,0} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{b}_{2,1} = (1, 0, 2)$,
 $\mathbf{b}_{2,2} = (1, 1, 0)$ とすると, ベジエ曲面は図 17
 のようになる.

例 3. $m = 2, n = 2$ で, 9 点を $b_{0,0} = (2, 0, 2)$,
 $b_{0,1} = (4, 0, 2)$, $b_{0,2} = (4, 0, 0)$, $b_{1,0} = (2, 2, 2)$,
 $b_{1,1} = (4, 4, 2)$, $b_{1,2} = (4, 4, 0)$, $b_{2,0} = (0, 2, 2)$,
 $b_{2,1} = (0, 4, 2)$, $b_{2,2} = (0, 4, 0)$ とすると, ベジエ
 曲面は図 18 のようになる.

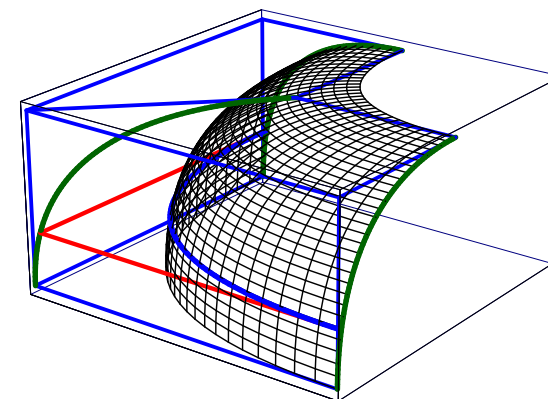


図 18

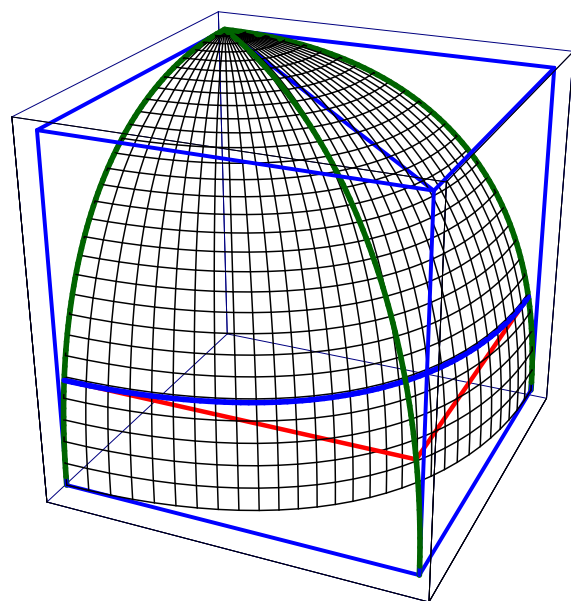


図 19

例 4. $m = 2, n = 2$ で, 9 点を
 $b_{0,0} = (1, 0, 0)$, $b_{0,1} = (1, 0, 1)$,
 $b_{0,2} = (0, 0, 1)$, $b_{1,0} = (1, 1, 0)$,
 $b_{1,1} = (1, 1, 1)$, $b_{1,2} = (0, 0, 1)$,
 $b_{2,0} = (0, 1, 0)$, $b_{2,1} = (0, 1, 1)$,
 $b_{2,2} = (0, 0, 1)$ とすると, ベジエ曲面は図 19
 のようになる.

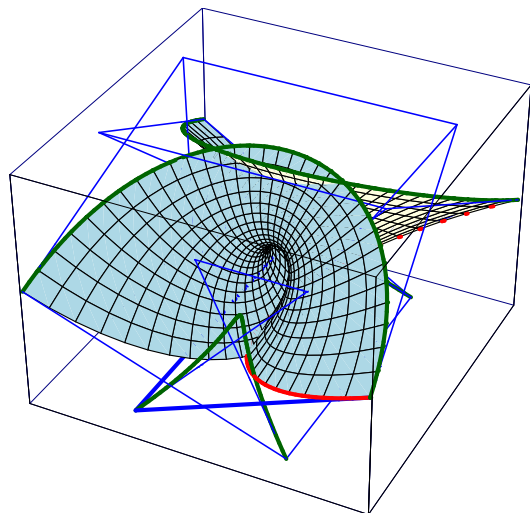


図 20a

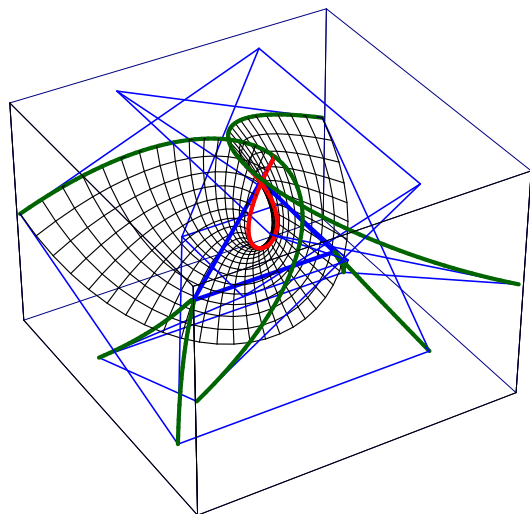


図 20b

例 5. $m = 3, n = 3$ で, 16 点を

$$\mathbf{b}_{0,0} = (-22, -22, 0), \quad \mathbf{b}_{0,1} = (10, -18, 16),$$

$$\mathbf{b}_{0,2} = (10, 18, 16), \quad \mathbf{b}_{0,3} = (-22, 22, 0),$$

$$\mathbf{b}_{1,0} = (-18, 10, -16),$$

$$\mathbf{b}_{1,1} = (-22/3, -22/3, 0),$$

$$\mathbf{b}_{1,2} = (-22/3, 22/3, 0),$$

$$\mathbf{b}_{1,3} = (-18, -10, -16),$$

$$\mathbf{b}_{2,0} = (18, 10, -16),$$

$$\mathbf{b}_{2,1} = (22/3, -22/3, 0),$$

$$\mathbf{b}_{2,2} = (22/3, 22/3, 0),$$

$$\mathbf{b}_{2,3} = (18, -10, -16), \quad \mathbf{b}_{3,0} = (22, -22, 0),$$

$$\mathbf{b}_{3,1} = (-10, -18, 16), \quad \mathbf{b}_{3,2} = (-10, 18, 16),$$

$$\mathbf{b}_{3,3} = (22, 22, 0) \text{ とすると, ベジエ曲面は図}$$

20a, 20b のような enneper 曲面になる.

2.2 有理ベジエ曲面

有理ベジエ曲線と同様にテンソル積ベジエ曲面を有理表現に拡張する。すなわち，4次元空間内のテンソル積ベジエ曲面の射影として3次元空間内の有理ベジエ曲面が定義できる。

$(m+1)(n+1)$ 個の点 $\mathbf{b}_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) と正の数 $w_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) を与えるとき，**有理ベジエ曲面** $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ は次の式で定義される：

$$\mathbf{x}^{m,n}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}. \quad (15)$$

有理ベジエ曲面はテンソル積ベジエ曲面と同様の性質をもつ。

a) **アフィン不変性：**

曲面上の点 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ は $\mathbf{b}_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) の重心結合とみなせる。従って、アフィン写像で不変である。

b) **凸包性：**

曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ は $u, v \in I = [0, 1]$ に対して制御多角形の凸包内にある。これは、多項式 $B_i^m(u)B_j^n(v)$ は非負であり、 $w_{i,j} > 0$ であることからわかる。

c) **境界曲線：**

曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ ($(u, v) \in I \times I$) の境界曲線は u あるいは v についての有理ベジエ曲線である。特に、曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ は4点 $\mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{b}_{0,n}$, $\mathbf{b}_{m,n}$ を通る。

有理ベジエ曲面の例をあげておく。

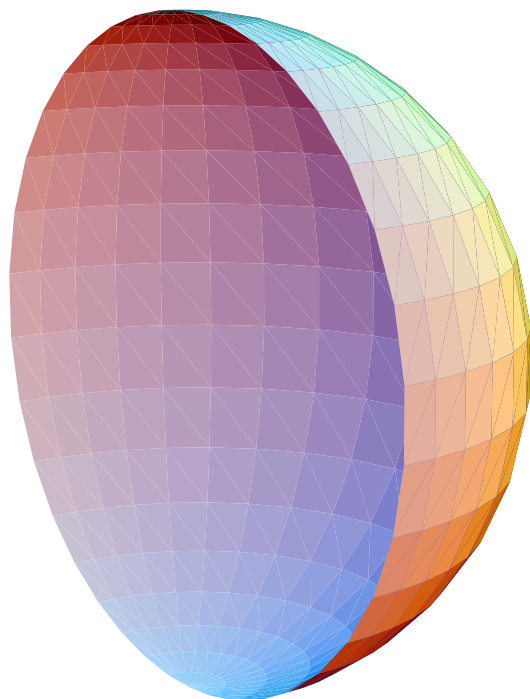


図 13

例 1. $m = 2, n = 2$ で, 9点とその重みを

$$\mathbf{b}_{0,0} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{b}_{0,1} = (1, 0, 1),$$

$$\mathbf{b}_{0,2} = (0, 0, 1), \quad \mathbf{b}_{1,0} = (1, 1, 0),$$

$$\mathbf{b}_{1,1} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{b}_{1,2} = (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{b}_{2,0} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b}_{2,1} = (0, 1, 1),$$

$$\mathbf{b}_{2,2} = (0, 0, 1), \quad w_{0,0} = 1, \quad w_{0,1} = 1,$$

$$w_{0,2} = 2, \quad w_{1,0} = 1, \quad w_{1,1} = 1, \quad w_{1,2} = 2,$$

$$w_{2,0} = 2, \quad w_{2,1} = 2, \quad w_{2,2} = 4 \text{ とすると,}$$

有理ベジエ曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$

$(-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1)$ は図 13

のような半球面になる。

例 2. $m = 2, n = 2$ で, 9点とその重みを

$$\mathbf{b}_{0,0} = (8, 0, 0), \quad \mathbf{b}_{0,1} = (8, 0, 2),$$

$$\mathbf{b}_{0,2} = (6, 0, 2), \quad \mathbf{b}_{1,0} = (8, 8, 0),$$

$$\mathbf{b}_{1,1} = (8, 8, 2), \quad \mathbf{b}_{1,2} = (6, 6, 2),$$

$$\mathbf{b}_{2,0} = (0, 8, 0), \quad \mathbf{b}_{2,1} = (0, 8, 2),$$

$$\mathbf{b}_{2,2} = (0, 6, 2), \quad w_{0,0} = 1, \quad w_{0,1} = 1,$$

$$w_{0,2} = 2, \quad w_{1,0} = 1, \quad w_{1,1} = 1, \quad w_{1,2} = 2,$$

$$w_{2,0} = 2, \quad w_{2,1} = 2, \quad w_{2,2} = 4 \text{ とすると,}$$

有理ベジエ曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$

$(-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1)$ は図 14 のようなトーラスの一部となる.

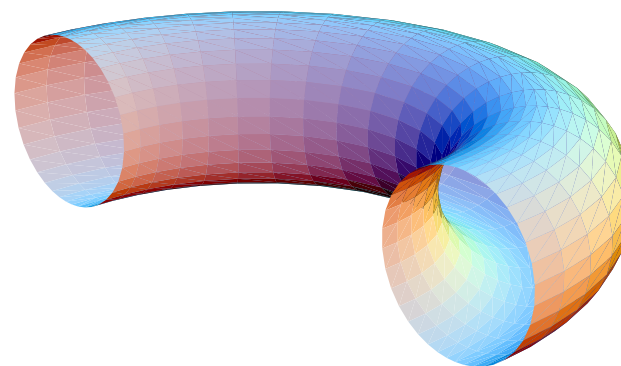


図 14

例 3. $m = 2, n = 2$ で, 9 点とその重みを
 $\mathbf{b}_{0,0} = (-3, 0, -2\sqrt{2}), \mathbf{b}_{0,1} = (-3, 3, -2\sqrt{2}),$
 $\mathbf{b}_{0,2} = (0, 3, -2\sqrt{2}), \mathbf{b}_{1,0} = (-1/3, 0, 0),$
 $\mathbf{b}_{1,1} = (-1/3, 1/3, 0), \mathbf{b}_{1,2} = (0, 1/3, 0),$
 $\mathbf{b}_{2,0} = (-3, 0, 2\sqrt{2}), \mathbf{b}_{2,1} = (-3, 3, 2\sqrt{2}),$
 $\mathbf{b}_{2,2} = (0, 3, 2\sqrt{2}),$
 $w_{0,0} = 1, w_{0,1} = 1, w_{0,2} = 2, w_{1,0} = 3,$
 $w_{1,1} = 3, w_{1,2} = 6, w_{2,0} = 1, w_{2,1} = 1,$
 $w_{2,2} = 2$ とすると, 有理ベジエ曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$
 $(0 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1)$ は図 15 のような
 1 葉の双曲面の一部となる.

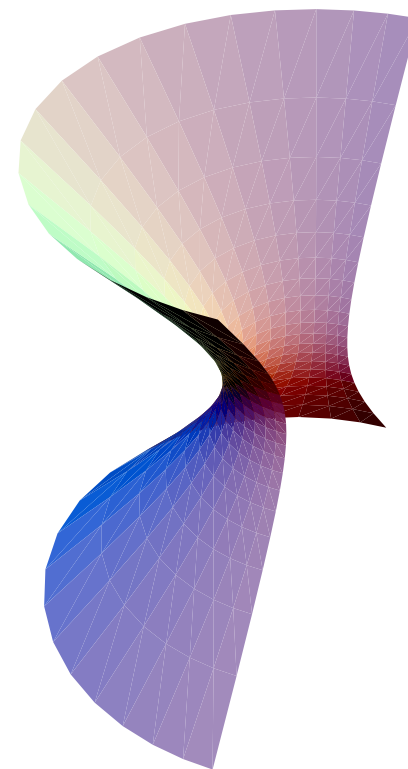


図 15