

## 2 ベジエ曲面

ベジエ曲線は線分をもとに考えたが，曲面の場合は四辺形を基本において考えられた．これは，次のような開発上の理由による．初期の開発がほとんど自動車工業で展開され，曲面の自動車ボディ設計への応用は，屋根，ドア，フードなどの外板に対するものであった．これらの部品は基本的には四辺形に近い形状であり，それらをより小さな四辺形に分割するのは自然な考え方であった．

### 2.1 テンソル積ベジエ曲面

**双一次補間** 線形補間は2つの点を直線で結んだが，双一次補間は4つの点から曲面を作る方法である．

$b_{0,0}, b_{0,1}, b_{1,0}, b_{1,1}$  を  $\mathbb{R}^3$  内の4つの異なる点とする.  $u, v \in \mathbb{R}$  に対して,  $\mathbb{R}^3$  の点

$$\boldsymbol{x}(u, v) = (1 - u)(1 - v)\boldsymbol{b}_{0,0} + (1 - u)v\boldsymbol{b}_{0,1} + u(1 - v)\boldsymbol{b}_{1,0} + uv\boldsymbol{b}_{1,1}$$

を対応させる写像を**双一次補間**といい, これら点の集合を  $b_{0,0}, b_{0,1}, b_{1,0}, b_{1,1}$  を通る**双曲放物面**という.

4点を  $b_{0,0} = (0, 0, 0)$ ,  $b_{0,1} = (0, 1, 0)$ ,  
 $b_{1,0} = (1, 0, 0)$ ,  $b_{1,1} = (1, 1, 1)$  とするとき,  
 $\boldsymbol{x}(u, v) = (u, v, uv)$  となり, 曲面は  
 $z = xy$  で与えられる. 図 13 は  
 $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$  に対する曲面をあらわす.

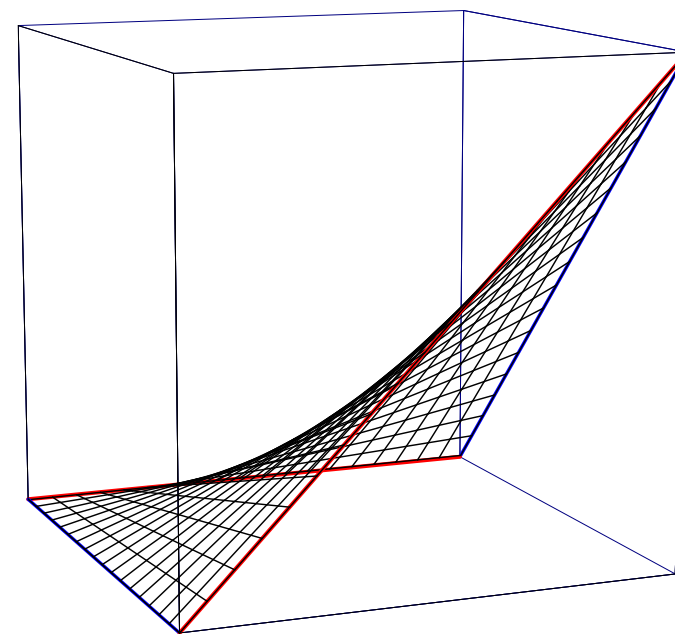


図 13

双一次補間  $x(u, v)$  を2段階に分けて考える。まず次の式によって中間点を計算する。

$$\mathbf{b}_{0,0}^{(0,1)} = (1 - v)\mathbf{b}_{0,0} + v\mathbf{b}_{0,1},$$

$$\mathbf{b}_{1,0}^{(0,1)} = (1 - v)\mathbf{b}_{1,0} + v\mathbf{b}_{0,1}$$

次に  $\mathbf{b}_{0,0}^{(0,1)}$  と  $\mathbf{b}_{1,0}^{(0,1)}$  とを線形補間すると、

$$(1 - u)\mathbf{b}_{0,0}^{(0,1)} + u\mathbf{b}_{1,0}^{(0,1)}$$

となり、曲面

$x(u, v) = (1 - u)(1 - v)\mathbf{b}_{0,0} + (1 - u)v\mathbf{b}_{0,1} + u(1 - v)\mathbf{b}_{1,0} + uv\mathbf{b}_{1,1} = \mathbf{b}_{0,0}B_0^1(u)B_0^1(v) + \mathbf{b}_{0,1}B_0^1(u)B_1^1(v) + \mathbf{b}_{1,0}B_1^1(u)B_0^1(v) + \mathbf{b}_{1,1}B_1^1(u)B_1^1(v)$  を得る。

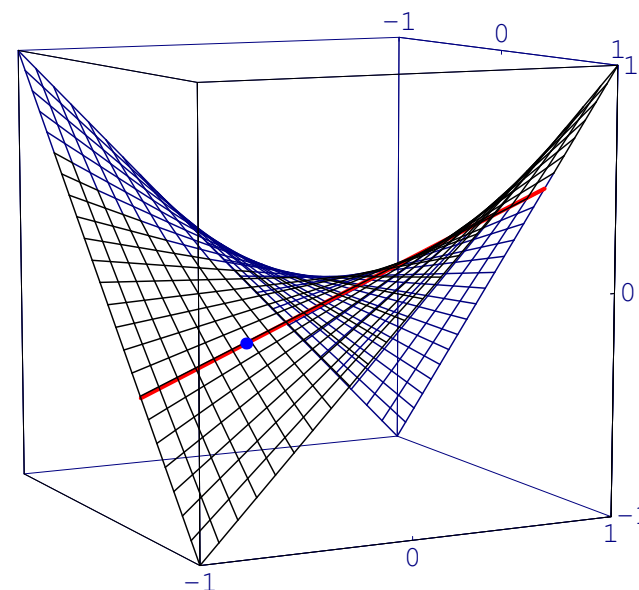


図 14

## テンソル積ベジエ曲面

テンソル積ベジエ曲面は，双一次補間の考え方を一般化したものである． $\mathbb{R}^3$  の  $(m+1)(n+1)$  個の点  $\mathbf{b}_{i,j}$  を与える．最初に移動する曲線を  $m$  次のベジエ曲線とすると次のように表わされる：

$$\mathbf{b}^m = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i B_i^m(u).$$

各  $\mathbf{b}_i$  が  $n$  次のベジエ曲線上を移動すると， $\mathbf{b}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v)$  となる．これら2つの式をあわせて次の式で定義される曲面  $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$  が得られる：

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

曲面  $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$  を  $(m+1)(n+1)$  の制御点  $\mathbf{b}_{i,j}$  ( $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$ ) から構成される**テンソル積ベジエ曲面**または**ベジエ曲面**という (図 15). 格子点配列された制御点の並びは, **ベジエネット**または**制御ネット**と呼ばれる.

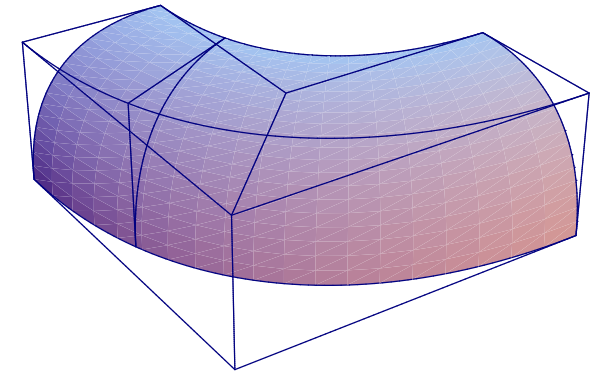


図 15

曲面  $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$  の  $v = v_0$  である等パラメータ曲線は  $u$  についての  $m$  次のベジエ曲線であり, その  $m+1$  個のベジエ制御点は  $\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v_0)$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) で与えられる.

テンソル積ベジエ曲面はベジエ曲線と類似の性質をもつ.

### a) アフィン不変性 :

曲面上の点  $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$  は  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) = 1$  より  $\mathbf{b}_{i,j}$  ( $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$ ) の重心結合とみなせる. 従って, アフィン写像で不変である.

### b) 凸包性 :

曲面  $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$  は  $u, v \in I = [0, 1]$  に対して制御多角形の凸包内にある. これは, 多項式  $B_i^m(u) B_j^n(v)$  は非負であり, その和は 1 であることからわかる.

### c) 境界曲線 :

曲面  $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$  ( $(u, v) \in I \times I$ ) の境界曲線は  $u$  あるいは  $v$  についてのベジエ曲線である. 特に, 曲面  $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$  は 4 点  $\mathbf{b}_{0,0}$ ,  $\mathbf{b}_{m,0}$ ,  $\mathbf{b}_{0,n}$ ,  $\mathbf{b}_{m,n}$  を通る.

例 1.  $m = 2, n = 2$  で, 9 点を  
 $\mathbf{b}_{0,0} = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{0,1} = (1, 0, 1)$ ,  
 $\mathbf{b}_{0,2} = (2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{1,0} = (0, 1, 1)$ ,  
 $\mathbf{b}_{1,1} = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{b}_{1,2} = (2, 1, 1)$ ,  
 $\mathbf{b}_{2,0} = (0, 2, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{2,1} = (1, 2, 1)$ ,  
 $\mathbf{b}_{2,2} = (2, 2, 0)$  とすると, ベジエ曲面  
は図 16 のようになる.

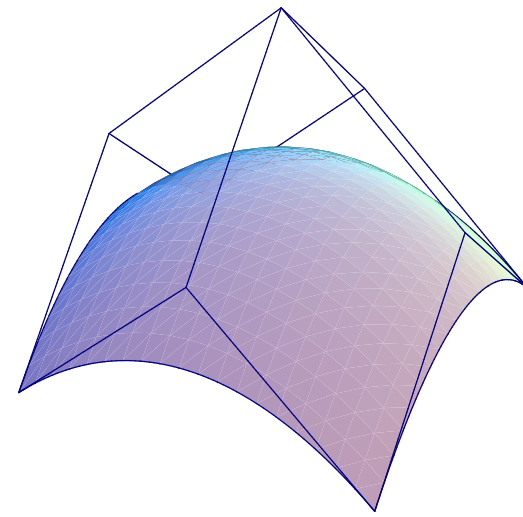


図 16

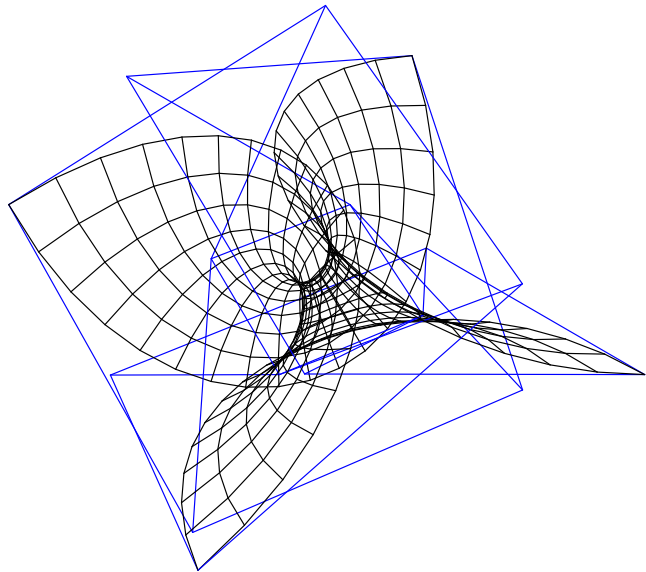


図 17

例 2.  $m = 3, n = 3$  で, 16 点を

$$\mathbf{b}_{0,0} = (-22, -22, 0), \mathbf{b}_{0,1} = (10, -18, 16),$$

$$\mathbf{b}_{0,2} = (10, 18, 16), \mathbf{b}_{0,3} = (-22, 22, 0),$$

$$\mathbf{b}_{1,0} = (-18, 10, -16),$$

$$\mathbf{b}_{1,1} = (-22/3, -22/3, 0),$$

$$\mathbf{b}_{1,2} = (-22/3, 22/3, 0),$$

$$\mathbf{b}_{1,3} = (-18, -10, -16),$$

$$\mathbf{b}_{2,0} = (18, 10, -16),$$

$$\mathbf{b}_{2,1} = (22/3, -22/3, 0),$$

$$\mathbf{b}_{2,2} = (22/3, 22/3, 0),$$

$$\mathbf{b}_{2,3} = (18, -10, -16), \mathbf{b}_{3,0} = (22, -22, 0),$$

$$\mathbf{b}_{3,1} = (-10, -18, 16),$$

$$\mathbf{b}_{3,2} = (-10, 18, 16), \mathbf{b}_{3,3} = (22, 22, 0) \text{ と}$$

すると, ベジエ曲面は図 17 のような

enneper 曲面になる.