有理ベジエ曲線のド・カステリョのアルゴリズム：

平面 $\mathbb{R}^2$ (あるいは空間 $\mathbb{R}^3$) の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_n$ と正の実数 w_0，$\cdots$，w_n と実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$w_i^0(t) = w_i$，$\boldsymbol{b}_i^0(t) = \boldsymbol{b}_i$ とし，

$$w_i^r(t) = (1-t)w_i^{r-1}(t) + tw_{i+1}^{r-1}(t)$$
$$(r = 1, \cdots, n;\ i = 0, 1, \cdots, n-r)$$

とおき、

$$\boldsymbol{b}_i^r(t) = (1-t)\frac{w_i^{r-1}(t)}{w_i^r(t)}\boldsymbol{b}_i^{r-1}(t) + t\frac{w_{i+1}^{r-1}(t)}{w_i^r(t)}\boldsymbol{b}_{i+1}^{r-1}(t) \qquad (13)$$
$$(r = 1, \cdots, n;\ i = 0, 1, \cdots, n-r)$$

とおく．

中間点 $\boldsymbol{b}_i^r(t)$ は，r 次のベルンシュタイン多項式を用いて，

$$\boldsymbol{b}_i^r(t) = \frac{\sum_{j=0}^{r} w_{i+j}\boldsymbol{b}_{i+j}B_j^r(t)}{\sum_{j=0}^{r} w_{i+j}B_j^r(t)} \tag{14}$$

$$(r = 0, 1, \cdots, n;\ i = 0, 1, \cdots, n-r)$$

と表せる．

特に，$r = n$ のとき，有理ベジエ曲線

$$\boldsymbol{b}_0^n(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n} w_j\boldsymbol{b}_jB_j^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_jB_j^n(t)} = \boldsymbol{x}(t)$$

を得る．

証明はベジエ曲線のド・カステリョのアルゴリズムにおける中間点の場合と同様である．

例 6．ベジエ点を $\boldsymbol{b}_0 = (1,0)$，$\boldsymbol{b}_1 = (1, \frac{4}{5})$，$\boldsymbol{b}_2 = (\frac{8}{25}, \frac{36}{25})$，$\boldsymbol{b}_3 = (-\frac{7}{10}, \frac{7}{5})$，$\boldsymbol{b}_4 = (-\frac{7}{5}, \frac{28}{45})$，$\boldsymbol{b}_5 = (-\frac{49}{37}, -\frac{14}{37})$，$\boldsymbol{b}_6 = (-\frac{28}{45}, -\frac{14}{15})$，$\boldsymbol{b}_7 = (\frac{1}{10}, -\frac{4}{5})$，$\boldsymbol{b}_8 = (\frac{9}{25}, -\frac{8}{25})$，$\boldsymbol{b}_9 = (\frac{1}{5}, 0)$，$\boldsymbol{b}_{10} = (0,0)$，その重みを $w_0 = 1$，$w_1 = 1$，$w_2 = \frac{10}{9}$，$w_3 = \frac{4}{3}$，$w_4 = \frac{12}{7}$，$w_5 = \frac{148}{63}$，$w_6 = \frac{24}{7}$，$w_7 = \frac{16}{3}$，$w_8 = \frac{80}{9}$，$w_9 = 16$，$w_{10} = 32$ とすると，$\boldsymbol{b}_0^{10}(t)$

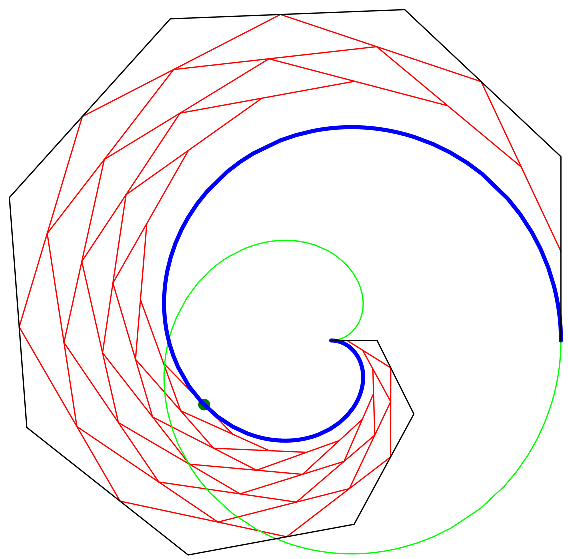

図 12

$$= \left(\frac{(1-t^2)(1-28t^2+70t^4-28t^6+t^8)}{(1+t^2)^5}, \frac{8t(1-t^2)^2(1-6t^2+t^4)}{(1+t^2)^5} \right)$$

$t = \frac{1}{2}$ におけるド・カステリョのアルゴリズムによる中間点 $\boldsymbol{b}_j^r(t)$ の様子は図 12 のようになる．この曲線は極座標表示で $r = \cos(\theta/4)$ となる曲線の一部である．

有理ベジエ曲線の次数上げ，導関数

ベジエ曲線の場合と同様に，有理ベジエ曲線の形状を変えないようにベジエ点と重みを 1 個追加することできる．これが有理ベジエ曲線の次数上げである．平面 $\mathbb{R}^2$ (あるいは空間 $\mathbb{R}^3$) の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_n$ と (正の) 実数 w_0，$\cdots$，w_n と実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$w_i^{(1)}$，$\boldsymbol{b}_i^{(1)}$ を

$$
\begin{aligned}
w_i^{(1)} &= \frac{i}{n+1} w_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) w_i \\
\boldsymbol{b}_i^{(1)} &= \frac{i}{n+1} \frac{w_{i-1}}{w_i^{(1)}} \boldsymbol{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \frac{w_i}{w_i^{(1)}} \boldsymbol{b}_i, \quad (i = 0, \ldots, n+1)
\end{aligned}
$$

で定義すると，n 次の有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ は，$\boldsymbol{b}_i^{(1)}$ をベジエ点とし，その重みを $w_i^{(1)}$ とする $n+1$ 次の有理ベジエ曲線 $\tilde{\boldsymbol{b}}_0^{n+1}(t)$ と一致する．これはつぎのように使われる．

例 7．ベジエ点を $\boldsymbol{b}_0=(1,0)$，$\boldsymbol{b}_1=(0,1)$，$\boldsymbol{b}_2=(-1,0)$ とし，その重みを $w_0=1$，$w_1=0$，$w_2=1$ とすると，有理ベジエ曲線

$$\boldsymbol{b}_0^2(t)=\left(\frac{1-2t}{1-2t+t^2},\frac{2(1-t)t}{1-2t+t^2}\right)$$

は半円となる．これを次数上げすると，ベジエ点は $\boldsymbol{b}_0^{(1)}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}_1^{(1)}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}_2^{(1)}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}_3^{(1)}=(-1,0)$ で，その重みは $w_0=1$，$w_1=1/3$，$w_2=1/3$，$w_3=1$ となる．

例 8．　例３で円全体をあらわす有理ベジエ曲線を考えたが，これはどのように求められるかを考えてみよう．

$(-\cos 2\theta,\sin 2\theta)\quad(0\le\theta\le\pi)$ は円全体をあらわす．
$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ に注意して，
$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を代入し，t を $2t-1$ と変換すると，

円全体は

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(-1 + \frac{8(1-2t)^2}{(1+(1-2t)^2)^2}, \frac{4(1-t)t(2t-1)}{(1-2t+2t^2)^2}\right)$$

とあらわされる．

空間の４次ベジエ曲線として，ベジエ点を求めると， $(1, 0, 1)$，$(0, -1, 0)$，$(-1, 0, 1/3)$，$(0, 1, 0)$，$(1, 0, 1)$ となる．次数上げを行って， $(1, 0, 1)$，$(1/5, -4/5, 1/5)$，$(-3/5, -2/5, 1/5)$，$(-3/5, 2/5, 1/5)$，$(1/5, 4/5, 1/5)$，$(1, 0, 1)$ を得る．５次の有理ベジエ曲線として，ベジエ点と重みを求めると $\boldsymbol{b}_0 = (1, 0)$，$\boldsymbol{b}_1 = (1, -4)$，$\boldsymbol{b}_2 = (-3, -2)$，$\boldsymbol{b}_3 = (-3, 2)$，$\boldsymbol{b}_4 = (1, 4)$，$\boldsymbol{b}_5 = (1, 0)$，$w_0 = 1$，$w_1 = 1/5$，$w_2 = 1/5$，$w_3 = 1/5$，$w_4 = 1/5$，$w_5 = 1$ となり，例３のものが得られた．

つぎに，有理ベジエ曲線の導関数について考える．有理 n 次ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ の $t=0$ における導関数は

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}'(0) = n\frac{w_1}{w_0}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0), \\
&\boldsymbol{x}''(0) = n(n-1)\frac{w_2}{w_0}(\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_0) - \frac{2nw_1(nw_1 - w_0)}{w_0^2}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0), \\
&\boldsymbol{x}'''(0) = n(n-1)(n-2)\frac{w_3}{w_0}(\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_0) \\
&\quad - 3n(n-1)\frac{w_2(nw_1 - 2w_0)}{w_0^2}(\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_0) \\
&\quad - 3nw_1\frac{(n^2w_0w_2 - 2n^2w_1^2 + 4nw_0w_1 - nw_0w_2 - 2w_0)}{w_0^3}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0)
\end{aligned}
$$

のようになる．