例　曲線 $2x^2+5xy+2y^2-7x-5y+3=0$ に対して,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5/2 & -7/2 \\ 5/2 & 2 & -5/2 \\ -7/2 & -5/2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

となる．　実際,

$$2(2x^2+5xy+2y^2-7x-5y+3)$$
$$= (2x+(5/2)y-7/2)^2-(9/4y^2-(15/2)y+25/4)$$
$$= (2x+(5/2)y-7/2)^2-1/4(3y-5)^2 = (2x+4y-6)(2x+y-1)$$

となり，２直線をあらわす.

平面上の 2 次曲線 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ はどの 4 点も同一直線にないように相異なる 5 点 $p_0 = (x_0, y_0)$, $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, $p_3 = (x_3, y_3)$, $p_4 = (x_4, y_4)$ をあたえることにより一意的に定まる．実際、点 p_i は 2 次曲線上にあるから $a{x_i}^2 + 2bx_iy_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i + f = 0$ $(i = 0, \cdots, 4)$．これより連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ {x_0}^2 & x_0y_0 & {y_0}^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ {x_1}^2 & x_1y_1 & {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2y_2 & {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2 & x_3y_3 & {y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ {x_4}^2 & x_4y_4 & {y_4}^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る．$(a, b, c, d, e, f) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ より方程式は非自明な解を持ち，行列式 $= 0$ を得る．

5 点を通る 2 次曲線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ {x_0}^2 & x_0y_0 & {y_0}^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ {x_1}^2 & x_1y_1 & {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2y_2 & {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2 & x_3y_3 & {y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ {x_4}^2 & x_4y_4 & {y_4}^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

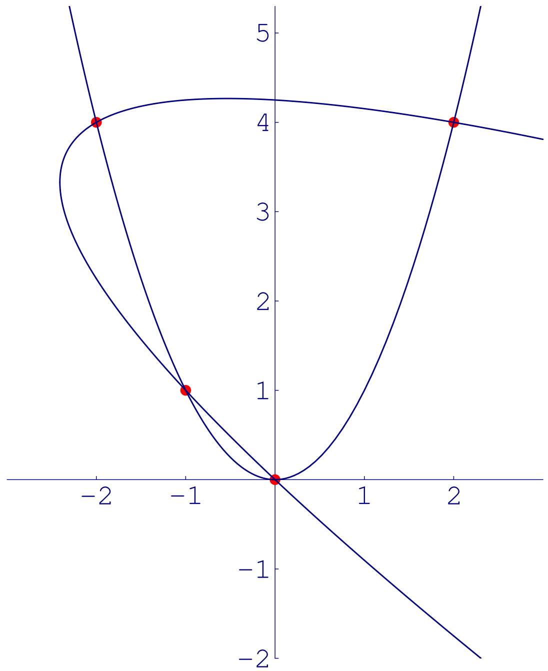
で与えられる．どの 4 点も同一直線にないように与えられていることから、x^2, xy, y^2, x, y の係数のどれかが 0 でないことがわかる．

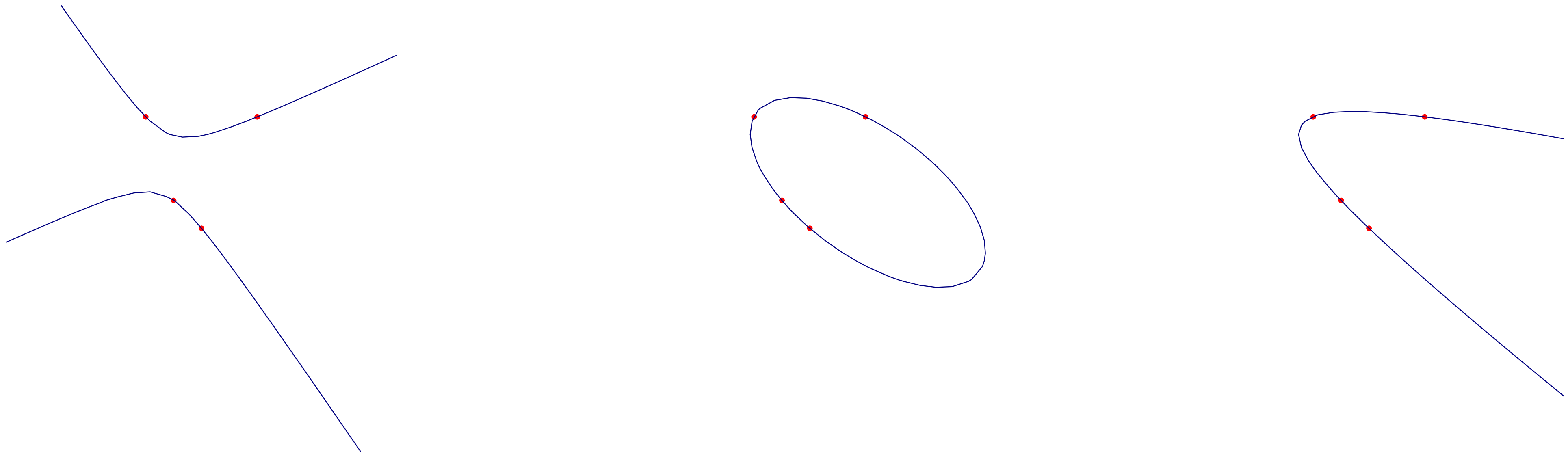
例　4 点を $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (-2,4)$, $p_2 = (2,4)$, $p_3 = (-1,1)$ で与えるとき，これらを通る 2 次曲線の一つは $y = x^2$ で与えられる．4 点を通る別の放物線は $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16x - 17y = 0$ で与えられる．

$p_4=(x_4,y_4)$ を通る２次曲線の方程式は

$$-48(x_4+y_4)(y_4-4)x^2+48({x_4}^2-y_4)xy$$
$$+48({x_4}^2-y_4)y^2-192({x_4}^2-y_4)x$$
$$-48(4{x_4}^2-x_4y_4-{y_4}^2+4x_4)y=0$$

で与えられる．５番目の点 $p_4=(x_4,y_4)$ の与え方を変えることにより，２次曲線は双曲線，放物線，楕円，放物線，双曲線と変化する．





有理ベジエ曲線

円錐曲線と同様に，空間 $\mathbb{R}^2$ の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_n$ と正の実数 w_0，$\cdots$，w_n を与えるとき，有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ を

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{w_0\boldsymbol{b}_0B_0^n(t) + \cdots + w_n\boldsymbol{b}_nB_n^n(t)}{w_0B_0^n(t) + \cdots + w_nB_n^n(t)} \tag{12}$$

で定義する．

w_i を**重み**，$\boldsymbol{b}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を**ベジエ点**あるいは**制御点**，$\boldsymbol{b}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ で生成される多面体を**制御多角形**とよぶ．

すべての重みが等しいならば，有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は ベジエ曲線となる．

また，有理ベジエ曲線はベジエ曲線と同様の性質，すなわち，アフィン不変性，凸包性，端点一致，対称性をもつ．

例 1．デカルトの葉線は $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で定義される曲線である．

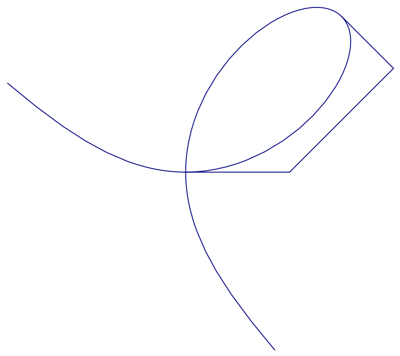


図 11a

これは，次のような制御点と重みによる有理ベジエ曲線である．$\boldsymbol{b}_0 = (0,0)$，$\boldsymbol{b}_1 = (1,0)$，$\boldsymbol{b}_2 = (2,1)$，$\boldsymbol{b}_3 = (3/2, 3/2)$ とし，それぞれの重みを $w_0 = 1$，$w_1 = 1$，$w_2 = 1$，$w_3 = 2$ とすると，$\boldsymbol{x}(t) = (3t/(1+t^3), 3t^2/(1+t^3))$ となる (図 11a).

例 2．アステロイドは $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ で定義される曲線である．

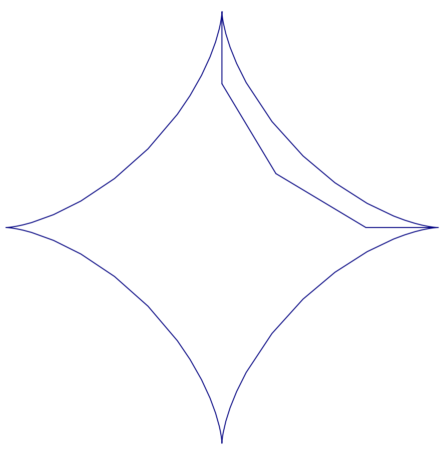


図 11b

これは，次のような制御点と重みによる有理ベジエ曲線である．$\boldsymbol{b}_0 = (0,1)$，$\boldsymbol{b}_1 = (0,1)$，$\boldsymbol{b}_2 = (0, 2/3)$，$\boldsymbol{b}_3 = (1/4, 1/4)$，$\boldsymbol{b}_4 = (2/3, 0)$，$\boldsymbol{b}_5 = (1,0)$，$\boldsymbol{b}_6 = (1,0)$ とし，それぞれの重みを $w_0 = 1$，$w_1 = 1$，$w_2 = 6/5$，$w_3 = 8/5$，$w_4 = 12/5$，$w_5 = 4$，$w_6 = 8$ とすると，$\boldsymbol{x}(t) = (8t^3/(1+t^2)^3, (1-t^2)^3/(1+t^2)^3)$ となる (図 11b).

例 3. 制御点と重みを $\boldsymbol{b}_0=(1,0)$, $\boldsymbol{b}_1=(1,-4)$, $\boldsymbol{b}_2=(-3,-2)$,

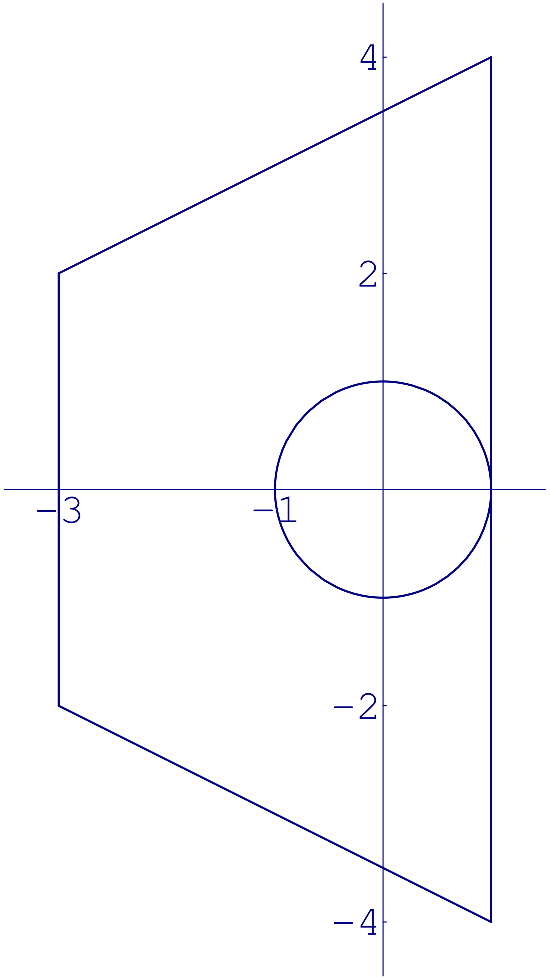


図 11c

$\boldsymbol{b}_3=(-3,2)$, $\boldsymbol{b}_4=(1,4)$, $\boldsymbol{b}_5=(1,0)$,
$w_0=1$, $w_1=1/5$, $w_2=1/5$, $w_3=1/5$,
$w_4=1/5$, $w_5=1$ で与えると，有理ベジエ曲線は $\boldsymbol{x}(t)=$

$$\left(\frac{-(2t^2-4t+1)(2t^2-1)}{(1+2t^2-2t)^2}, \frac{4(2t-1)(1-t)t}{(1+2t^2-2t)^2}\right)$$

となり，$(0 \leqq t \leqq 1)$ を動くとき，$\boldsymbol{x}(t)$ は半径 1 の円をあらわす（図 11c）.

例 4. 制御点と重みを $\boldsymbol{b}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1,2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1,2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-1,0)$, $w_0 = 1$, $w_1 = 1/3$, $w_2 = 1/3$, $w_3 = 1$ で与えると, 有理ベジエ曲線は

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\frac{1-2t}{1-2t+2t^2}, \frac{2t(1-t)}{1-2t+2t^2} \right)$$

となり, $(0 \leqq t \leqq 1)$ を動くとき, $\boldsymbol{x}(t)$ は半径 1 の半円をあらわす (図 11d).

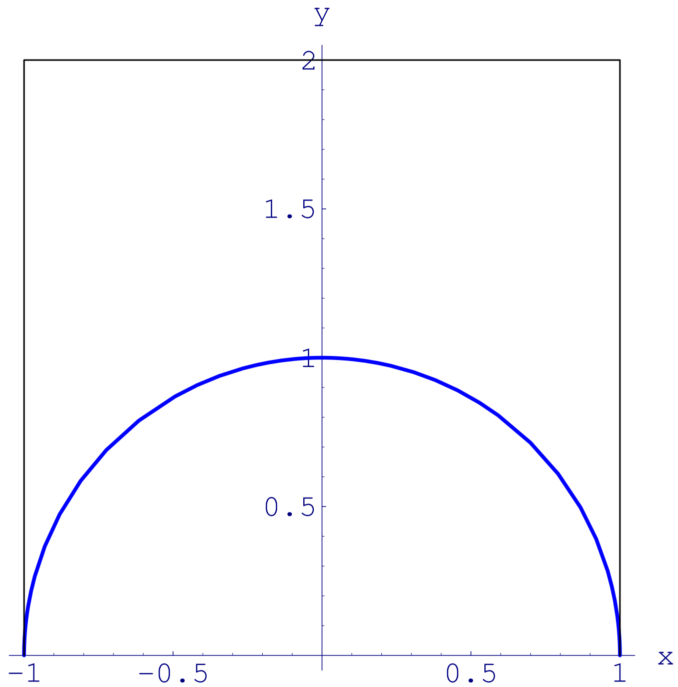


図 11d