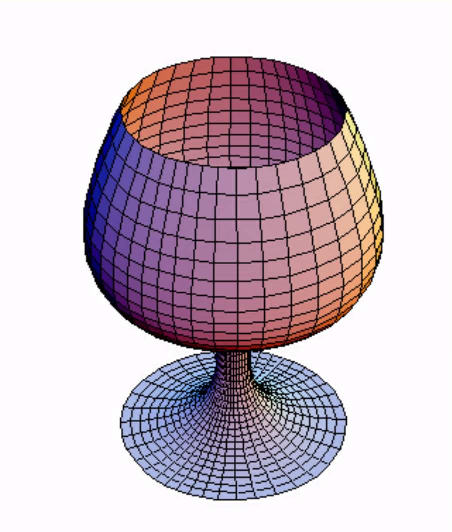
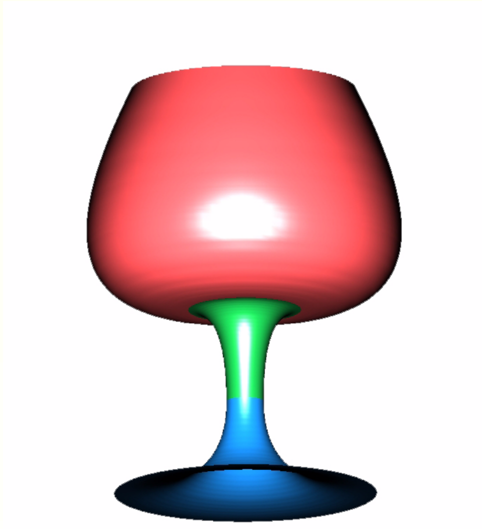
ベジエ曲線とベジエ曲面

坂根　由昌





まず，ベジエ曲線・曲面が生まれた歴史的状況をごく簡単にふり返って見よう．我々の身近にはさまざまな曲線や曲面がある．自動車などの工業製品のデザインにも曲線や曲面が多くもちいられている． これらの曲線や曲面はどのようにしてデザインされ，工業製品に実現されているのだろうか．

1960年頃には，設計者たちは雲形定規や自在定規を利用して曲線や曲面を描いていた． 一方，コンピュータに基本的な形状のデータを記憶させて，これを用いれば効率よく設計が行えるのではないかという考えから CAD (Computer Aided Design) があらわれた．

初期の CAD においては，記憶させる形状は，直線や円などに限られていたので， 自動車などのデザインに用いられるもう少し複雑な曲線や曲面を描くには，曲線や曲面をどのように表現すればよいかが問題であった．

初期のコンピュータはハードディスクの容量も小さかったので，できるだけ少ないデータにより，設計・デザインに用いる形状を効率よく記憶することも要求された．

さらに，モデルの小さな設計図から実物大の大きさのデータを容易に得るにはどうすればよいか，また，デザインされた形状を平行移動，拡大・縮小，回転移動などで容易に移動できるように曲線や曲面を表現することも要求された．

このような状況で，デザインに用いる曲線や曲面を効率よくコントロールするには，データをどのように与えればよいかが問題となった．これらを解決するものの一つとして考えだされたのが，ベジエ曲線・曲面である．

データとして制御点や重みを与えるとき，ベジエ曲線は多項式や有理式のパラメータ曲線として定まるものである．

これらの曲線・曲面は自動車会社などで 1950 年代の後半に研究が開始され、シトロエン社のド・カステリョ（de Casteljau）とルノー社のベジエ (Bézier) によって独立に考案されたが，企業秘密として 1960 年代の後半になるまで公表されなかった.

実際，ド・カステリョによる研究はベジエより少し早かったが，公表されなかったために，ベルンシュタイン表現の多項式曲線と曲面に関する理論にはベジエの名前がついている.

現在では，ベジエ曲線・曲面は，自動車・船・飛行機を製作するにあたってのモデリング曲面のほか，テレビ・映画における画像やコマーシャル画像の作成に代表されるコンピュータグラフィックス（CG ）など多くの応用分野で使われている.

また，ベジエ曲線は活字 (フォント) のデザインやコンピュータのドローイング・ソフトにも取り入れられている.

1 ベジエ曲線

ベジエ曲線は線分の内分点を繰り返しとることにより得られる曲線である.

これらは制御点とベルンシュタイン多項式を用いてあらわされる.

また，円や双曲線などの２次曲線は、制御点と重みを用いて有理ベジエ曲線としてあらわされる.

1.1 ベジエ曲線とは

まず線分の内分点を繰り返しとることにより放物線が得られることをみよう.

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の３点 $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ をとる.

0 と 1 の間の実数 t に対して，２点 $\boldsymbol{b}_0$ と $\boldsymbol{b}_1$ とを $t:1-t$ に内分する点を $\boldsymbol{b}_0^1(t)$ とし，２点 $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ とを $t:1-t$ に内分する点を $\boldsymbol{b}_1^1(t)$ とする:　　$\boldsymbol{b}_0^1(t)=(1-t)\boldsymbol{b}_0+t\boldsymbol{b}_1,\quad \boldsymbol{b}_1^1(t)=(1-t)\boldsymbol{b}_1+t\boldsymbol{b}.$

さらに，２点 $\boldsymbol{b}_0^1(t)$ と $\boldsymbol{b}_1^1(t)$ とを $t:1-t$ に内分する点を $\boldsymbol{b}_0^2(t)$ とする:

$$\boldsymbol{b}_0^2(t)=(1-t)\boldsymbol{b}_0^1(t)+t\boldsymbol{b}_1^1(t).$$

このとき，t を変化させると $\boldsymbol{b}_0^2(t)$ は放物線をあらわす（図１）.

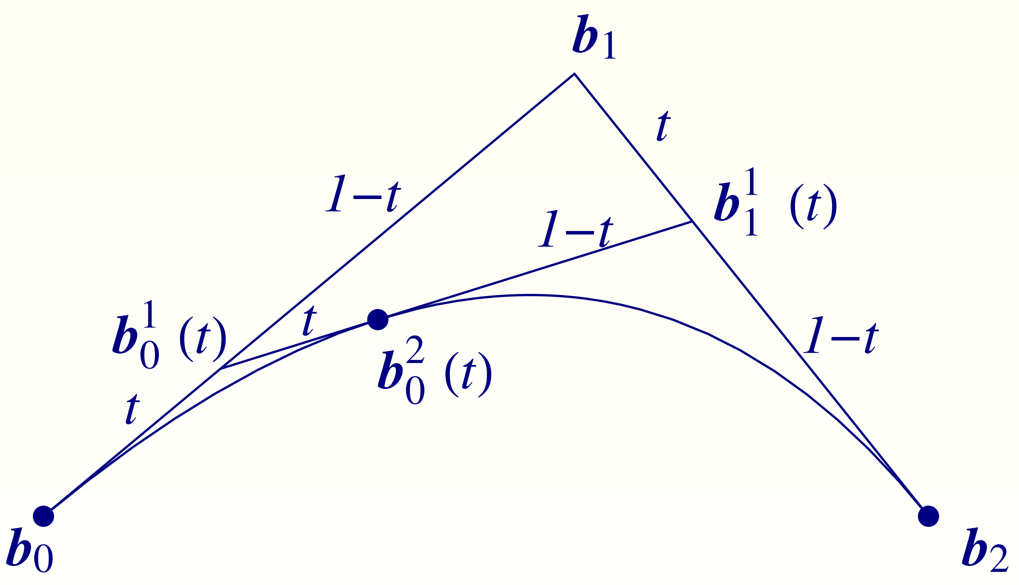


図１

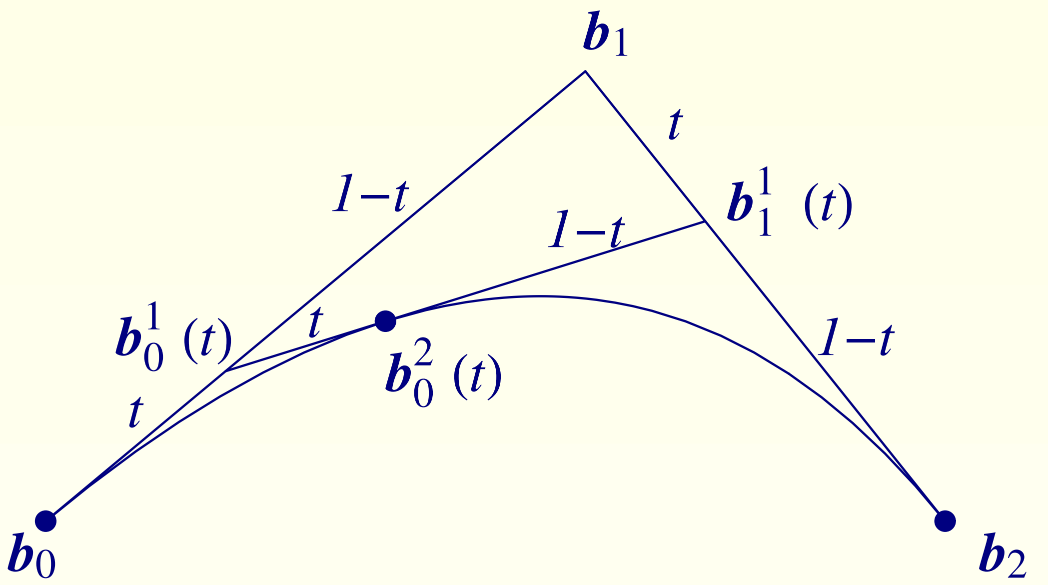


図 1

また，t が 0 から 1 の間を動くとき，曲線 $\boldsymbol{b}_0^2(t)$ は 3 点 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ が作る三角形の内部にあり，$\boldsymbol{b}_0^2(0) = \boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_0^2(1) = \boldsymbol{b}_2$ となる．

また，得られた放物線は，点 $\boldsymbol{b}_0$ で 2 点 $\boldsymbol{b}_0$ と $\boldsymbol{b}_1$ とを結ぶ直線に接し，$\boldsymbol{b}_2$ で 2 点 $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ とを結ぶ直線に接する．

$\boldsymbol{b}_0^1(t)$，$\boldsymbol{b}_1^1(t)$ を $\boldsymbol{b}_0^2(t)$ に代入すると，$\boldsymbol{b}_0^2(t)$ は t の 2 次式となる：

$$\boldsymbol{b}_0^2(t) = (1-t)^2\boldsymbol{b}_0 + 2t(1-t)\boldsymbol{b}_1 + t^2\boldsymbol{b}_2.$$

曲線 $\boldsymbol{b}_0^2(t)$ が，放物線をあらわすことを，簡単な例でみよう．

例 1．$\boldsymbol{b}_0 = (-1, 1)$，$\boldsymbol{b}_1 = (0, -1)$，$\boldsymbol{b}_2 = (1, 1)$ のとき，
$\boldsymbol{b}_0^2(t) = (2t-1, (2t-1)^2)$ となり，t を消去して，放物線 $y = x^2$ を得る（図 2 左）．

例 2．$\boldsymbol{b}_0 = (5, 2)$，$\boldsymbol{b}_1 = (6, 2)$，$\boldsymbol{b}_2 = (6, 1)$ のとき，
$\boldsymbol{b}_0^2(t) = (5 + 2t - t^2, 2 - t^2)$ となり，(図 2 右) の放物線を得る．

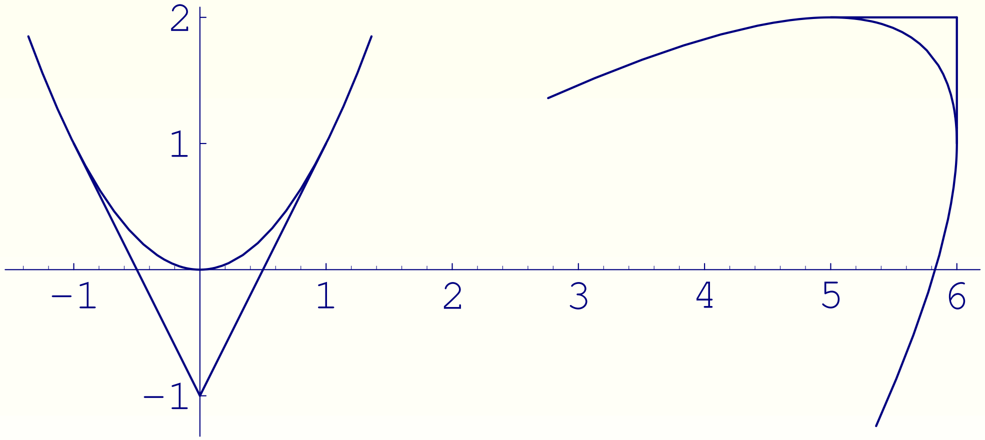


図 2

1.2 ド・カステリョのアルゴリズム

上述の放物線の構成法を一般化したものが，ド・カステリョのアルゴリズムである．

ド・カステリョのアルゴリズム：平面 $\mathbb{R}^2$ あるいは空間 $\mathbb{R}^3$ の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_n$ と実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\boldsymbol{b}_i^0(t) = \boldsymbol{b}_i$ とし，

$$\boldsymbol{b}_i^r(t) = (1-t)\boldsymbol{b}_i^{r-1}(t) + t\boldsymbol{b}_{i+1}^{r-1}(t) \tag{1}$$
$$(r = 1, \cdots, n;\ i = 0, 1, \cdots, n-r)$$

とおく．

ド・カステリョのアルゴリズムから得られる曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ を点 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{b}_n$ で定まる**ベジエ曲線**と呼ぶ．ベジエ曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ を $\mathcal{B}[\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n, t]$ であらわすこともある．

点 $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_n$ で生成される多角形 $\boldsymbol{P}$ を**ベジエ多角形**あるいは**制御多角形**と呼び，頂点 $\boldsymbol{b}_i$ を**制御点**あるいは**ベジエ点**と呼ぶ.

中間の点 $\boldsymbol{b}_i^r(t)$ を三角形状にならべたものを**ド・カステリョの図式**と呼ぶ.

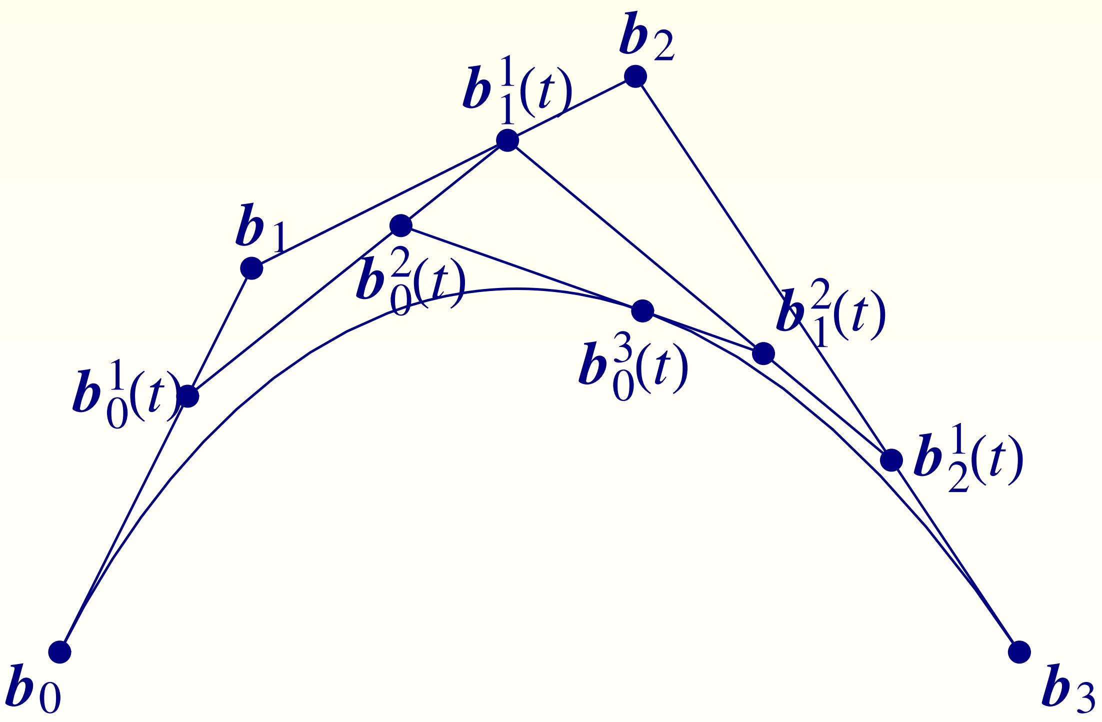


図 3

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{b}_0 & & & \\
\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_0^1(t) & & \\
\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1^1(t) & \boldsymbol{b}_0^2(t) & \\
\boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_2^1(t) & \boldsymbol{b}_1^2(t) & \boldsymbol{b}_0^3(t)
\end{array}
$$

ド・カステリョの図式

例３． $\boldsymbol{b}_0 = (3,2)$，$\boldsymbol{b}_3 = (3,-2)$ とする．

$\boldsymbol{b}_1 = (-1,-3)$，$\boldsymbol{b}_2 = (-1,3)$ のとき，ベジエ曲線は
$\boldsymbol{b}_0^3(t) = (3(2t-1)^2, -(2t-1)(11t^2-11t+2))$ となる (図４左)．

$\boldsymbol{b}_1 = (-1,-2)$，$\boldsymbol{b}_2 = (-1,2)$ のとき，ベジエ曲線は
$\boldsymbol{b}_0^3(t) = (3(2t-1)^2, -2(2t-1)^3)$ となる (図４中)．

$\boldsymbol{b}_1 = (-1,-1)$，$\boldsymbol{b}_2 = (-1,1)$ のとき，ベジエ曲線は
$\boldsymbol{b}_0^3(t) = (3(2t-1)^2, -(2t-1)(5t^2-5t+2))$ となる (図４右)．

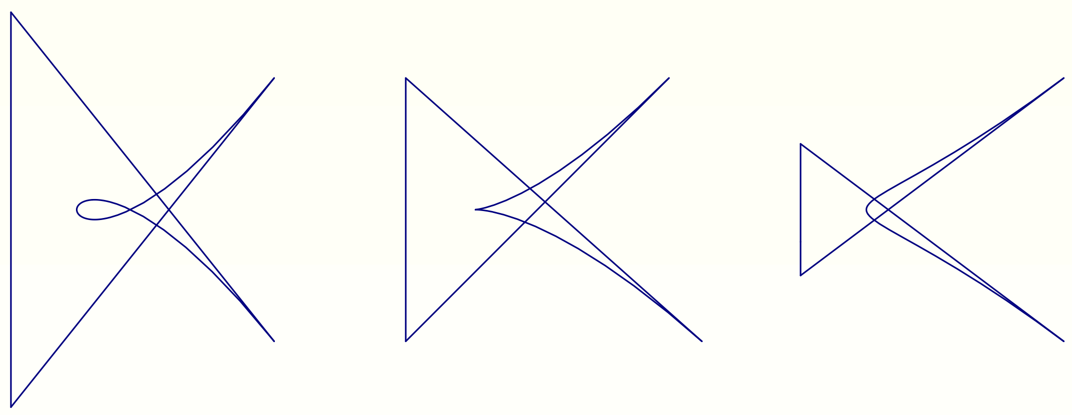


図４