

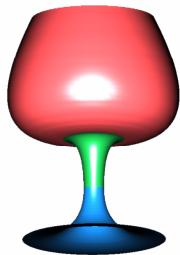
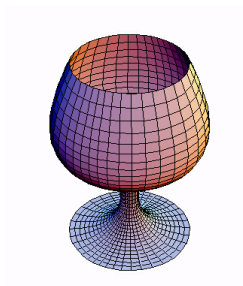
現代数学の基礎

形状設計のための数学入門

坂根 由昌

大阪大学

現代数学の基礎
形状設計のための数学入門



- 我々の身近にはさまざまな曲線や曲面がある。自動車などの工業製品のデザインにも曲線や曲面が多くもちいられている。
- これらの曲線や曲面はどのようにしてデザインされ、工業製品に実現されているのだろうか。
- 1960年頃には、設計者たちは雲形定規や自在定規を利用して曲線や曲面を描いていた。
- 一方、コンピュータに基本的な形状のデータを記憶させて、これを用いれば効率よく設計が行えるのではないかという考えから CAD (Computer Aided Design) があらわれた。

- 初期の CAD においては、記憶させる形状は、直線や円などに限られていたので、自動車などのデザインに用いられるもう少し複雑な曲線や曲面を描くには、曲線や曲面をどのように表現すればよいか問題であった。
- 初期のコンピュータはハードディスクの容量も小さかったので、できるだけ少ないデータにより、設計・デザインに用いる形状を効率よく記憶することも要求された。
- さらに、モデルの小さな設計図から実物大の大きさのデータを容易に得るにはどうすればよいか問題であった。

ベジエ曲線・曲面が生まれた歴史的状況

- 曲線や曲面を表現するときの要求 ⇒

デザインされた形状を平行移動，拡大・縮小，回転移動などで容易に移動できる

- これらの要求を満たすように，デザインに用いる曲線や曲面のデータを効率よく与えて曲線や曲面を表現するには？
- これらを解決するものの一つとして考えだされたのが，**ベジエ曲線・曲面**である
- データとして**制御点や重み**を与えるとき，**ベジエ曲線は多項式や有理式のパラメータ曲線**として定まる

- これらの曲線・曲面は自動車会社などで 1950 年代の後半に研究が開始され、
シトロエン社の **ド・カステリヨ (de Casteljaou)**
ルノー社の **ベジエ (Bézier)**
によって独立に考案されたが、企業秘密として 1960 年代の後半になるまで公表されなかった。
- ベルンシュタイン多項式を用いて曲線・曲面を表現する方法はベジエの名前がついている。

- 区分的多項式曲線はスプライン曲線とよばれる。
2次および3次のスプライン曲線がよく用いられている。
- B-スプライン曲線とは、ベジエ曲線をつないだもので、2次のベジエ曲線を C^1 級、3次のベジエ曲線を C^2 級につないだものがよく用いられている。
- B-スプライン曲線のパラメータの定義域を決めるために必要な単調増加数列はノット列と呼ばれ、
ノット列が非一様な有理 B-スプライン曲線 (Non-Uniform Rational B-Spline) は NURBS とよばれる。

- 現在では, ベジエ曲線・曲面, NURBS は, 自動車・船・飛行機を製作するにあたってのモデリング曲面のほか, テレビ・映画における画像やコマーシャル画像の作成に代表されるコンピュータグラフィックス (CG) など多くの応用分野で使われている.
- また, ベジエ曲線, NURBS 曲線は活字 (フォント) のデザインやコンピュータのドローイング・ソフトにも取り入れられている.

ベジエ曲線

- ベジエ曲線は線分の内分点を繰り返すことにより得られる曲線
- 制御点とベルンシュタイン多項式を用いてあらわされる。
- また、円や双曲線などの2次曲線は、制御点と重みを用いて有理ベジエ曲線としてあらわされる。

まず線分の内分点を繰り返すことにより放物線が得られることをみよう。

放物線

- 平面 \mathbb{R}^2 上の 3 点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ をとる.
実数 t ($0 < t < 1$) に対して, 2 点 \mathbf{b}_0 と \mathbf{b}_1 とを $t : 1-t$ に内分する点を $\mathbf{b}_0^1(t)$ とし, 2 点 \mathbf{b}_1 と \mathbf{b}_2 とを $t : 1-t$ に内分する点を $\mathbf{b}_1^1(t)$ とする:

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2.$$

- さらに, 2 点 $\mathbf{b}_0^1(t)$ と $\mathbf{b}_1^1(t)$ とを $t : 1-t$ に内分する点を $\mathbf{b}_0^2(t)$ とする:

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t).$$

このとき, t を変化させると $\mathbf{b}_0^2(t)$ は放物線をあらわす (図 1).

ベジエ曲線とは

- t が 0 から 1 の間を動くとき、曲線 $b_0^2(t)$ は 3 点 b_0, b_1, b_2 が作る三角形の内部にあり、 $b_0^2(0) = b_0, b_0^2(1) = b_2$ となる。

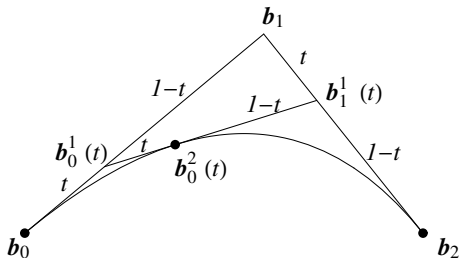


図 1

- 得られた放物線は、点 b_0 で 2 点 b_0 と b_1 とを結ぶ直線に接し、 b_2 で 2 点 b_1 と b_2 とを結ぶ直線に接する。
- $b_0^1(t), b_1^1(t)$ を $b_0^2(t)$ に代入すると、 $b_0^2(t)$ は t の 2 次式となる：

$$b_0^2(t) = (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2 b_2.$$

- 例 1. $\mathbf{b}_0 = (-1, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (0, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1)$ のとき,
 $\mathbf{b}_0^2(t) = (2t - 1, (2t - 1)^2)$ となり, t を消去して, 放物線 $y = x^2$ を得る (図 2 左).

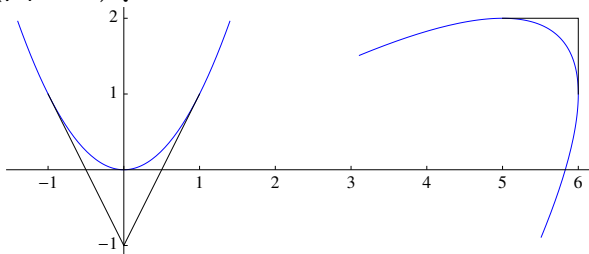


図 2

- 例 2. $\mathbf{b}_0 = (5, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (6, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (6, 1)$ のとき,
 $\mathbf{b}_0^2(t) = (5 + 2t - t^2, 2 - t^2)$ となり, (図 2 右) の放物線を得る.

- 上述の放物線の構成法を一般化したもの。

ド・カステリヨのアルゴリズム

平面 \mathbb{R}^2 あるいは空間 \mathbb{R}^3 の $n+1$ 個の点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ と実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$ とし,

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) \quad (1)$$

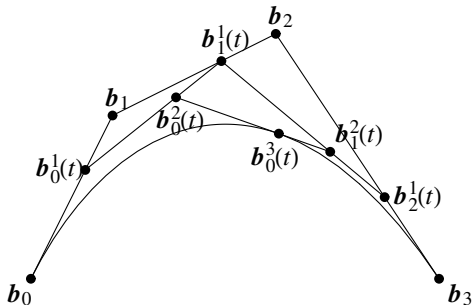
$$(r = 1, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n-r)$$

とおく.

- 上のアルゴリズムから得られる曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ を点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ で定まる**ベジエ曲線**と呼ぶ.

ド・カステリヨのアルゴリズム

点 b_0, b_1, \dots, b_n で生成される多角形 P をベジエ多角形あるいは制御多角形と呼び，頂点 b_i を制御点あるいはベジエ点と呼ぶ．中間の点 $b_i^r(t)$ を三角形状にならべたものをド・カステリヨの図式と呼ぶ．



b_0			
b_1	$b_0^1(t)$		
b_2	$b_1^1(t)$	$b_0^2(t)$	
b_3	$b_2^1(t)$	$b_1^2(t)$	$b_0^3(t)$

ド・カステリヨの図式

図 3

- 例 3. $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 4)$, $\mathbf{b}_3 = (6, 0)$ のとき, ベジエ曲線は図 4.1 のようになる.

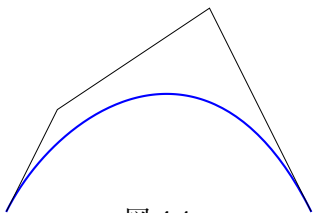


図 4.1

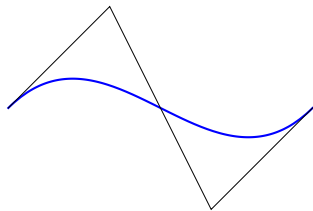


図 4.2

- 例 4. $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (2, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (4, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (6, 0)$ のとき, ベジエ曲線は図 4.2 のようになる.

- 例 5. $b_0 = (0, 0)$, $b_1 = (3, 2)$, $b_2 = (3, 0)$, $b_3 = (5, 2)$ のとき, ベジエ曲線は図 4.3 のようになる.

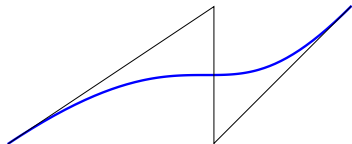


図 4.3

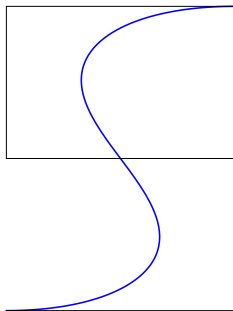


図 4.4

- 例 6. $b_0 = (0, 0)$, $b_1 = (3, 0)$, $b_2 = (3, 2)$, $b_3 = (0, 2)$, $b_4 = (0, 4)$, $b_5 = (3, 4)$ のとき, ベジエ曲線は図 4.4 のようになる.

ド・カステリヨのアルゴリズム

例 7. $b_0 = (3, 2)$, $b_3 = (3, -2)$ とする.

- $b_1 = (-1, -3)$, $b_2 = (-1, 3)$ のとき, ベジエ曲線は図 5 左のようになる.
- $b_1 = (-1, -2)$, $b_2 = (-1, 2)$ のとき, ベジエ曲線は図 5 中のようになる.
- $b_1 = (-1, -1)$, $b_2 = (-1, 1)$ のとき, ベジエ曲線は図 5 右のようになる.

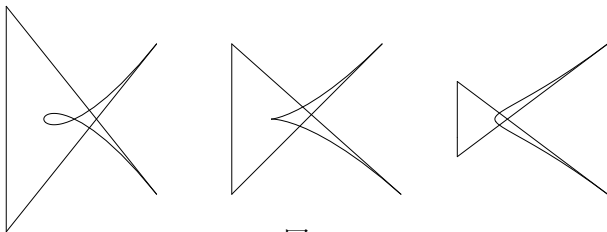


図 5