平面上の２次曲線は方程式

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{15}$$

であらわされる．$D = b^2 - ac$ とおく．
曲線が２直線でないとき，次が成り立つ：

- 1) $D < 0$ のとき，２次曲線は楕円である．
  例 1) $x^2 - xy + 2y^2 = 1$ は楕円である．
- 2) $D > 0$ のとき，２次曲線は双曲線である．
  例 2) $x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$ は双曲線である．
- 3) $D = 0$ のとき，２次曲線は放物線である．
  例 3) $x^2 - 4xy + 4y^2 + x = 2$ は放物線である．

２次曲線

方程式 (15) が２直線をあらわす判定条件を求めておこう．(15) 式の左辺 $\times a = (ax+by+d)^2 - ((b^2-ac)y^2 + 2(bd-ae)y + (d^2-af)) = 0$

$A = b^2 - ac$, $B = 2(bd - ae)$, $C = d^2 - af$ とおくと，

$$(ax + by + d)^2 - (Ay^2 + By + C) = 0$$

これが２直線をあらわすための条件は $Ay^2 + By + C$ が完全平方式となることである．従って， $B^2 - 4AC = 0$ が条件となる．すなわち，

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 4(bd - ae)^2 - 4(b^2 - ac)(d^2 - af) \\ &= 4a\left(-acf + ae^2 + b^2 f - 2bde + cd^2\right) \end{aligned}$$

$-4a$ で割って，条件は

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

と書くことができる．

例　曲線 $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 7x - 5y + 3 = 0$ に対して，

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5/2 & -7/2 \\ 5/2 & 2 & -5/2 \\ -7/2 & -5/2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

となる．実際，
$2(2x^2 + 5xy + 2y^2 - 7x - 5y + 3)$
$= (2x + (5/2)y - 7/2)^2 - (9/4y^2 - (15/2)y + 25/4)$
$= (2x + (5/2)y - 7/2)^2 - 1/4(3y - 5)^2 = (2x + 4y - 6)(2x + y - 1)$ となり，２直線をあらわす．

２次曲線のパラメータ表示

例 (双曲線) 方程式 $-2x^2-5xy+4y^2+x-5y+15=0$ で定義される曲線を考える．この曲線のパラメータ表示は次で与えられる：

$$(x,y)=\left(\frac{18-19t+8t^2}{-2-5t+4t^2},\frac{-6+7t+3t^2}{-2-5t+4t^2}\right).$$

これを示そう．まず，方程式をみたす点を求める．点 $(2,3)$ はこの方程式をみたす． 直線 $y=t(x-2)+3$ を方程式に代入することにより，$(x-2)(-2x-5tx+4t^2x-8t^2+19t-18)=0$ を得る．これを解いて，$x=\dfrac{18-19t+8t^2}{-2-5t+4t^2}$ を得る． 直線 $y=t(x-2)+3$ に代入して，$y=\dfrac{-6+7t+3t^2}{-2-5t+4t^2}$ を得る． ベジエ点と重みはベジエ点 $\boldsymbol{b}_0=(-9,3)$, $\boldsymbol{b}_1=\left(-\dfrac{17}{9},\dfrac{5}{7}\right)$, $\boldsymbol{b}_2=\left(-\dfrac{7}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$ と重み $w_0=2$, $w_1=\dfrac{9}{2}$, $w_2=3$ で与えられる．

２次曲線のパラメータ表示

例 (楕円) 方程式 $4x^2 - 6xy + 4y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$ で定義される曲線を考える．この曲線のパラメータ表示は次で与えられる：

$$(x, y) = \left(\frac{5 - 12t + 8t^2}{2(2 - 3t + 2t^2)}, \frac{5 - 9t + 5t^2}{2 - 3t + 2t^2} \right).$$

これを示そう．まず，方程式をみたす点を求める．点 $(2, 5/2)$ はこの方程式をみたす． 直線 $y = t(x - 2) + 5/2$ を方程式に代入することにより，$(x - 2)(-5 + 12t - 8t^2 + 4x - 6tx + 4t^2x) = 0$ を得る．これを解いて，$x = \dfrac{5 - 12t + 8t^2}{2(2 - 3t + 2t^2)}$, を得る． 直線 $y = t(x - 2) + 5/2$ に代入して，$y = \dfrac{5 - 9t + 5t^2}{2 - 3t + 2t^2}$ を得る． ベジエ点と重みはベジエ点 $\boldsymbol{b}_0 = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right), \boldsymbol{b}_1 = (-1, 1), \boldsymbol{b}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ と重み $w_0 = 4,\ w_1 = 1,\ w_2 = 2$ で与えられる．

平面上の２次曲線は５点で定まる

平面上の２次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ はどの４点も同一直線にないように相異なる５点 $p_0=(x_0,y_0)$, $p_1=(x_1,y_1)$, $p_2=(x_2,y_2)$, $p_3=(x_3,y_3)$, $p_4=(x_4,y_4)$ をあたえることにより一意的に定まる．実際、点 p_i は２次曲線上にあるから $ax_i^2+2bx_iy_i+cy_i^2+2dx_i+2ey_i+f=0$ $(i=0,\cdots,4)$. これより連立１次方程式

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ {x_0}^2 & x_0y_0 & {y_0}^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ {x_1}^2 & x_1y_1 & {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2y_2 & {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2 & x_3y_3 & {y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ {x_4}^2 & x_4y_4 & {y_4}^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る．$(a,b,c,d,e,f)\neq(0,0,0,0,0,0)$ より方程式は非自明な解を持ち，行列式 $=0$ を得る．

平面上の２次曲線は５点で定まる

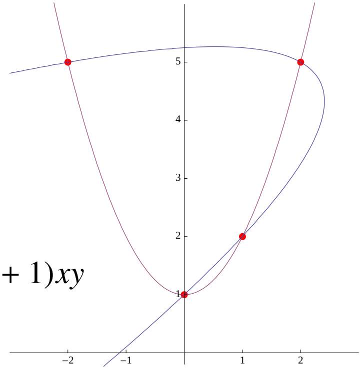
５点を通る２次曲線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ {x_0}^2 & x_0y_0 & {y_0}^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ {x_1}^2 & x_1y_1 & {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2y_2 & {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2 & x_3y_3 & {y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ {x_4}^2 & x_4y_4 & {y_4}^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられる．どの４点も同一直線にないように与えられていることから、x^2, xy, y^2, x, y の係数のどれかが０でないことがわかる．

４点を与えたときの平面上の２次曲線

４点を $p_0 = (0,1)$, $p_1 = (-2,5)$, $p_2 = (2,5)$, $p_3 = (1,2)$ で与えるとき，これらを通る２次曲線の一つは $y = x^2 + 1$ で与えられる． ４点を通る別の放物線は $x^2 - 4xy + 4y^2 + 20x - 25y + 21 = 0$ で与えられる．



$p_4 = (x_4, y_4)$ を通る２次曲線の方程式は

$$
\begin{aligned}
&-48(x_4 - y_4 + 1)(y_4 - 5)x^2 + 48({x_4}^2 - y_4 + 1)xy \\
&-48({x_4}^2 - y_4 + 1)y^2 - 240({x_4}^2 - y_4 + 1)x \\
&+48(y_4 + 2x_4 - 1)(3x_4 - y_4 - 1)y \\
&-48(5{x_4}^2 + x_4y_4 - {y_4}^2 - 5x_4 + y_4) = 0
\end{aligned}
$$

で与えられる． ５番目の点 $p_4 = (x_4, y_4)$ の与え方を変えることにより， ２次曲線は楕円，放物線，双曲線，放物線，楕円，放物線，双曲線と変化する．

４点を与えたときの平面上の２次曲線の変化