有理ベジエ曲線

円錐曲線と同様に，平面 $\mathbb{R}^2$ の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ と正の実数 $w_0, \cdots, w_n$ を与えるとき，有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ を

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{w_0\boldsymbol{b}_0B_0^n(t) + \cdots + w_n\boldsymbol{b}_nB_n^n(t)}{w_0B_0^n(t) + \cdots + w_nB_n^n(t)} \tag{14}$$

で定義する．

w_i を**重み**，$\boldsymbol{b}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を**ベジエ点**あるいは**制御点**，$\boldsymbol{b}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ で生成される多面体を**制御多角形**とよぶ．すべての重みが等しいならば，有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は ベジエ曲線となる．

有理ベジエ曲線

例 1. 重みによる変化の様子.

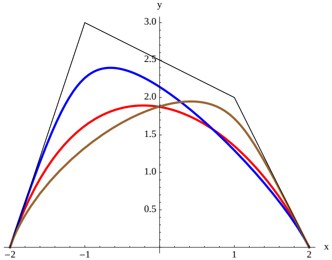

図 17

制御点を $\boldsymbol{b}_0 = (-2, 0), \boldsymbol{b}_1 = (-1, 3), \boldsymbol{b}_2 = (1, 2), \boldsymbol{b}_3 = (2, 0)$，それぞれの重みを

$w_0 = 1, w_1 = 1, w_1 = 1, w_3 = 1$ とすると, 有理ベジエ曲線は赤の曲線（ベジエ曲線）

$w_0 = 1, w_1 = 3, w_1 = 1, w_3 = 1$ とすると, 有理ベジエ曲線は青の曲線

$w_0 = 1, w_1 = 1, w_1 = 4, w_3 = 1$ とすると, 有理ベジエ曲線は茶色の曲線

となり, 重みの大きい方に引っ張られる.

例 2. デカルトの葉線は $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で定義される曲線である.

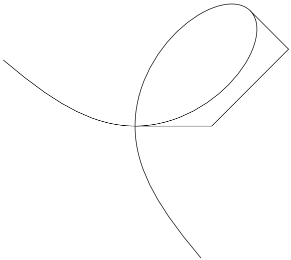

図 18a

制御点を
$\boldsymbol{b}_0 = (0,0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1,0)$,
$\boldsymbol{b}_2 = (2,1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (3/2, 3/2)$

それぞれの重みを
$w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$ とすると

$\boldsymbol{x}(t) = (3t/(1+t^3), 3t^2/(1+t^3))$

例 3. アステロイドは $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ で定義される曲線である.

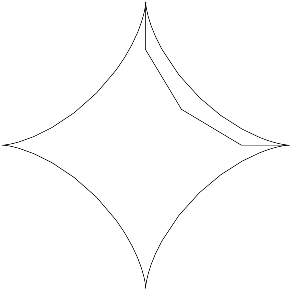

図 18b

制御点を
$\boldsymbol{b}_0 = (0, 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (0, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 2/3)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1/4, 1/4)$, $\boldsymbol{b}_4 = (2/3, 0)$, $\boldsymbol{b}_5 = (1, 0)$, $\boldsymbol{b}_6 = (1, 0)$

それぞれの重みを
$w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = 6/5$, $w_3 = 8/5$, $w_4 = 12/5$, $w_5 = 4$, $w_6 = 8$ とすると

$$\boldsymbol{x}(t) = (8t^3/(1+t^2)^3, (1-t^2)^3/(1+t^2)^3)$$

例 4. 制御点を
$\boldsymbol{b}_0 = (1, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2)$,
$\boldsymbol{b}_2 = (-1, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-1, 0)$,
それぞれの重みを
$w_0 = 1$, $w_1 = 1/3$, $w_2 = 1/3$,
$w_3 = 1$ で与えると,

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\frac{1-2t}{1-2t+2t^2}, \frac{2t(1-t)}{1-2t+2t^2} \right)$$

となり, $0 \leqq t \leqq 1$ を動くとき, $\boldsymbol{x}(t)$ は半径 1 の半円をあらわす.

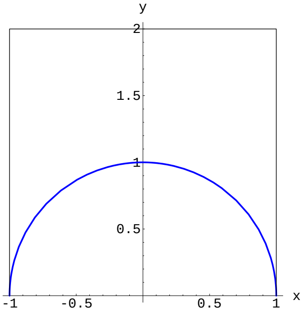

図 18c

ド・カステリョのアルゴリズム

有理ベジエ曲線のド・カステリョのアルゴリズム

平面 $\mathbb{R}^2$ あるいは空間 $\mathbb{R}^3$ の $n+1$ 個の点 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$, $n+1$ 個の正の数 $w_0, \cdots, w_n$ と実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\boldsymbol{b}_i^0(t) = \boldsymbol{b}_i$, $w_i^0(t) = w_i$ とし，

$$\boldsymbol{b}_i^r(t) = (1-t)\frac{w_i^{r-1}(t)}{w_i^r(t)}\boldsymbol{b}_i^{r-1}(t) + t\frac{w_{i+1}^{r-1}(t)}{w_i^r(t)}\boldsymbol{b}_{i+1}^{r-1}(t)$$

$$w_i^r(t) = (1-t)w_i^{r-1}(t) + tw_{i+1}^{r-1}(t)$$

$$(r = 1, \cdots, n\,;\ i = 0, 1, \cdots, n-r)$$

とおくと, 有理ベジエ曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}_0^n(t)$ で与えられる.

空間 $\mathbb{R}^3$ 上の 3 点 $\boldsymbol{p}_0 = (w_0\boldsymbol{b}_0, w_0)$, $\boldsymbol{p}_1 = (w_1\boldsymbol{b}_1, w_1)$, $\boldsymbol{p}_2 = (w_2\boldsymbol{b}_2, w_2)$ をとる． 0 と 1 の間の実数 t に対して，2 点 $\boldsymbol{p}_0$ と $\boldsymbol{p}_1$ とを $t : 1-t$ に内分する点を $\boldsymbol{p}_0^1(t)$ とし， 2 点 $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ とを $t : 1-t$ に内分する点を $\boldsymbol{p}_1^1(t)$ とする:

$\boldsymbol{p}_0^1(t) = (1-t)\boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{p}_1 = (1-t)(w_0\boldsymbol{b}_0, w_0) + t(w_1\boldsymbol{b}_1, w_1) =$
$((1-t)w_0\boldsymbol{b}_0 + tw_1\boldsymbol{b}_1, (1-t)w_0 + tw_1)$,
$w_0^1(t) = (1-t)w_0 + tw_1$.

$\boldsymbol{b}_0^1(t) = \dfrac{1}{(1-t)w_0 + tw_1}((1-t)w_0\boldsymbol{b}_0 + tw_1\boldsymbol{b}_1)$ とおくと,
$\boldsymbol{b}_0^1(t) = (1-t)\dfrac{w_0}{w_0^1(t)}\boldsymbol{b}_0 + t\dfrac{w_1}{w_0^1(t)}\boldsymbol{b}_1$,
$\boldsymbol{p}_0^1(t) = (w_0^1(t)\boldsymbol{b}_0^1(t), w_0^1(t))$ と書くことができる.

同様に, $\boldsymbol{p}_1^1(t) = (1-t)\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2 = (1-t)(w_1\boldsymbol{b}_1, w_1) + t(w_2\boldsymbol{b}_2, w_2) =$
$((1-t)w_1\boldsymbol{b}_1 + tw_2\boldsymbol{b}_2, (1-t)w_1 + tw_2)$.
$w_1^1(t) = (1-t)w_1 + tw_2$, $\boldsymbol{b}_1^1(t) = \dfrac{1}{(1-t)w_1 + tw_2}((1-t)w_1\boldsymbol{b}_1 + tw_2\boldsymbol{b}_2)$
とおくと,

$\boldsymbol{b}_1^1(t) = (1-t)\dfrac{w_1}{w_1^1(t)}\boldsymbol{b}_1 + t\dfrac{w_2}{w_1^1(t)}\boldsymbol{b}_2,$
$\boldsymbol{p}_1^1(t) = (w_1^1(t)\boldsymbol{b}_1^1(t), w_1^1(t))$ と書くことができる．

さらに，２点 $\boldsymbol{p}_0^1(t)$ と $\boldsymbol{p}_1^1(t)$ とを $t : 1-t$ に内分する点を $\boldsymbol{p}_0^2(t)$ とすると，
$\boldsymbol{p}_0^2(t) = (1-t)\boldsymbol{p}_0^1(t) + t\boldsymbol{p}_1^1(t) = (1-t)(w_0^1(t)\boldsymbol{b}_0^1(t), w_0^1(t)) +$
$t(w_1^1(t)\boldsymbol{b}_1^1(t), w_1^1(t)) = ((1-t)w_0^1\boldsymbol{b}_0^1(t) + tw_1^1\boldsymbol{b}_1^1(t), (1-t)w_0^1(t) + tw_1^1(t))$

$w_0^2(t) = (1-t)w_0^1(t) + tw_1^1(t),$
$\boldsymbol{b}_0^2(t) = \dfrac{1}{((1-t)w_0^1(t) + tw_1^1(t)}((1-t)w_0^1(t)\boldsymbol{b}_0^1(t) + tw_1^1(t)\boldsymbol{b}_1^1(t))$ とおくと，
$\boldsymbol{b}_0^2(t) = (1-t)\dfrac{w_0^1(t)}{w_0^2(t)}\boldsymbol{b}_0^1(t) + t\dfrac{w_1^1(t)}{w_0^2(t)}\boldsymbol{b}_1^1(t),$
$\boldsymbol{p}_0^2(t) = (w_0^2(t)\boldsymbol{b}_0^2(t), w_0^2(t))$ と書くことができる．

ド・カステリョのアルゴリズム

$w_0^1(t)\boldsymbol{b}_0^1(t) = (1-t)w_0\boldsymbol{b}_0 + tw_1\boldsymbol{b}_1$, $w_1^1(t)\boldsymbol{b}_1^1(t) = (1-t)w_1\boldsymbol{b}_1 + tw_2\boldsymbol{b}_2$ より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_0^2(t) &= \frac{(1-t)^2 w_0\boldsymbol{b}_0 + 2t(1-t)w_1\boldsymbol{b}_1 + t^2 w_2\boldsymbol{b}_2}{(1-t)^2 w_0 + 2t(1-t)w_1 + t^2 w_2} \\ &= \frac{B_0^2(t)w_0\boldsymbol{b}_0 + B_1^2(t)w_1\boldsymbol{b}_1 + B_2^2(t)w_2\boldsymbol{b}_2}{B_0^2(t)w_0 + B_1^2(t)w_1 + B_2^2(t)w_2}.\end{aligned}$$

これは $\boldsymbol{p}_0^2(t) = (1-t)^2\boldsymbol{p}_0 + 2(1-t)t\boldsymbol{p}_1 + t^2\boldsymbol{p}_2 =$ $((1-t)^2 w_0\boldsymbol{b}_0 + 2(1-t)tw_1\boldsymbol{b}_1 + t^2 w_2\boldsymbol{b}_2, (1-t)^2 w_0 + 2(1-t)tw_1 + t^2 w_2)$ からもわかる.

例 5. 原点 $(0,0)$ を中心とする半径 1 の円弧 で, 端点が $(1,0)$, $(\cos s, \sin s)$ $(-\pi \leqq s \leqq \pi)$ であるものは, ベジエ点 $\boldsymbol{b}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, \tan\frac{s}{2})$, $\boldsymbol{b}_2 = (\cos s, \sin s)$ と重み $w_0 = 1$, $w_1 = \cos\frac{s}{2}$, $w_2 = 1$ であらわされる. 実際,

$$x(t) = \frac{(1-t)^2 + 2t(1-t)\cos\frac{s}{2} + t^2\cos s}{(1-t)^2 + 2t(1-t)\cos\frac{s}{2} + t^2},$$

$$y(t) = \frac{2t(1-t)\sin\frac{s}{2} + t^2\sin s}{(1-t)^2 + 2t(1-t)\cos\frac{s}{2} + t^2}$$

と表される. $s = \pi$ のとき, $w_1 = 0$ となり, 図 19b のようになる.

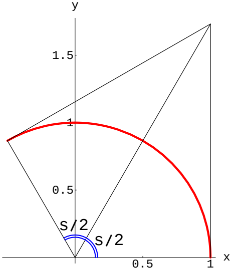

図 19a

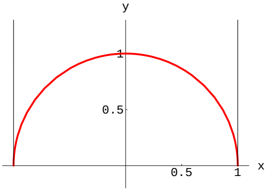

図 19b

例 6. 端点が $(1,0)$, (p,q) である双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ は，$p = \cosh s, q = \sinh s$ とするとき，ベジエ点 $\boldsymbol{b}_0 = (1,0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, \tanh\frac{s}{2})$, $\boldsymbol{b}_2 = (\cosh s, \sinh s)$ と重み $w_0 = 1$, $w_1 = \cosh\frac{s}{2}$, $w_2 = 1$ であらわされる．実際,

$$x(t) = \frac{(1-t)^2 + 2t(1-t)\cosh\frac{s}{2} + t^2\cosh s}{(1-t)^2 + 2t(1-t)\cosh\frac{s}{2} + t^2},$$

$$y(t) = \frac{2t(1-t)\sinh\frac{s}{2} + t^2\sinh s}{(1-t)^2 + 2t(1-t)\cosh\frac{s}{2} + t^2}$$

と表される．$\tanh\frac{s}{2} = \frac{p-1}{q}$, $\cosh\frac{s}{2} = \sqrt{\frac{p+1}{2}}$, $\sinh\frac{s}{2} = \sqrt{\frac{p-1}{2}}$ であることに注意せよ．

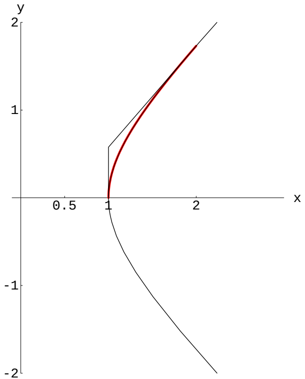

図 20