3点から定まるベジエ曲線は放物線であった．

円，楕円および双曲線など重要な円錐曲線はどのように構成すればよいのであろうか．
これは**重み**をつけるという考え方で解決することができる．

円，楕円および双曲線などの円錐曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は正の実数 w_0, w_1, w_2 と点 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^2$ により次の式で表わされる：

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{w_0 \boldsymbol{b}_0 B_0^2(t) + w_1 \boldsymbol{b}_1 B_1^2(t) + w_2 \boldsymbol{b}_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)} \tag{13}$$

$\boldsymbol{x}(t)$ を**円錐曲線の有理表現**といい， $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を制御点， w_0, w_1, w_2 を制御点 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ における**重み**という．
重みがすべて等しいとき，円錐曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は放物線となる．

例 1. 制御点を $\boldsymbol{b}_0=(1,0)$, $\boldsymbol{b}_1=(1,1)$, $\boldsymbol{b}_2=(0,1)$ それぞれの点における重みを $w_0=1$, $w_1=1$, $w_2=2$ とすると，円錐曲線は $\boldsymbol{x}(t)=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ で与えられる．$0\le t\le 1$ のとき，$\boldsymbol{x}(t)$ は 原点を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ の 4 分の一である．

例 2. 制御点を $\boldsymbol{b}_0=(3,-2\sqrt{2})$, $\boldsymbol{b}_1=(\frac{1}{3},0)$, $\boldsymbol{b}_2=(3,2\sqrt{2})$ とし，それぞれの点における重みを $w_0=1$, $w_1=3$, $w_2=1$ とすると，円錐曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は

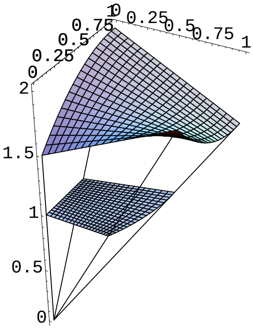
$$\boldsymbol{x}(t)=\left(\frac{3-4t+4t^2}{1+4t-4t^2},\frac{2\sqrt{2}(-1+2t)}{1+4t-4t^2}\right)$$

で与えられる．$\boldsymbol{x}(t)$ は方程式 $x^2-y^2=1$ をみたす双曲線である．

３次元空間の座標系を一つ固定するとき，射影の中心を原点 **O** とし，射影する平面を平面 $z = 1$ とする．すなわち，射影を次の式で定義する：

$$(x,\ y,\ z) \to (x/z,\ y/z,\ 1).$$

また，平面 $z = 1$ を 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ とを同一視すると，平面 $\mathbb{R}^2$ 上の円錐曲線は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の放物線を平面に射影したものとして定義できる．



(13) 式の証明　空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 点 $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を $\boldsymbol{p}_0 = (w_0\boldsymbol{b}_0, w_0)$, $\boldsymbol{p}_1 = (w_1\boldsymbol{b}_1, w_1)$, $\boldsymbol{p}_2 = (w_2\boldsymbol{b}_2, w_2)$ で定める．3 点 $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ から定まるベジエ曲線 $\boldsymbol{p}(t)$ は $\mathbb{R}^3$ の放物線である：

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0 B_0^2(t) + \boldsymbol{p}_1 B_1^2(t) + \boldsymbol{p}_2 B_2^2(t).$$

円錐曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は放物線 $\boldsymbol{p}(t)$ を $z = 1$ 平面に射影したものであるから，放物線 $\boldsymbol{p}(t)$ と円錐曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ との関係は

$$\boldsymbol{p}(t) = (w(t)\boldsymbol{x}(t),\ w(t))$$

で与えられる．$i = 0, 1, 2$ に対して，点 $\boldsymbol{p}_i$ の z-成分は w_i であるから，　$w(t) = w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)$ となる．

円錐曲線

$\boldsymbol{p}(t)$ の (x, y)-成分を $\boldsymbol{a}_0 B_0^2(t) + \boldsymbol{a}_1 B_1^2(t) + \boldsymbol{a}_2 B_2^2(t)$ であらわすと，
$w(t)\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}_0 B_0^2(t) + \boldsymbol{a}_1 B_1^2(t) + \boldsymbol{a}_2 B_2^2(t)$ となる．
$\boldsymbol{a}_i = w_i \boldsymbol{b}_i$ より (13) 式を得る． また $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ はそれぞれ $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を射影して得られる点となっている．

例 1．３点 $\boldsymbol{p}_0 = (1, 0, 1), \boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1), \boldsymbol{p}_2 = (0, 2, 2)$ で定まる２次ベジエ曲線（放物線）を $\boldsymbol{p}(t)$ とすると，$\boldsymbol{p}(t) = (1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$ となり，円錐曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

で与えられる．$\boldsymbol{x}(t)$ は $(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円の一部である．

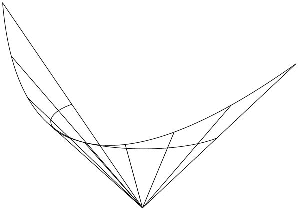


図 16 a

制御点は $\boldsymbol{b}_0 = (1, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 1)$, それぞれの点における重みは $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ となる (図 16a).

例 2. 重みによる曲線の分類

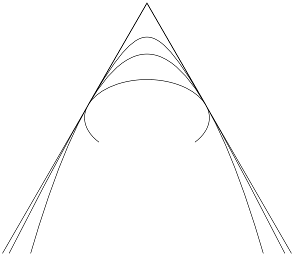


図 16b

平面上に 3 つの制御点を与え，重みを変化させると
楕円，放物線，双曲線が得られる．

図 16b は重みを変えて得られる曲線の様子をあらわしている．