ベジエ曲線のアフィン不変性

次に，平行移動，拡大や縮小，回転移動などと、ベジエ曲線の形の関係を調べよう．まず，平行移動，拡大や縮小，回転移動を含む写像について考える．

- 線形写像 $F : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ により

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}$$

と表わされる写像 $\Phi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ を**アフィン写像**という．

アフィン写像の例としては次のようなものがある．

- 1) 平行移動: $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$ のとき，$\boldsymbol{v}$ による平行移動という (図 13).
- 2) 拡大と縮小: $\boldsymbol{v} = 0$ で $\Phi(\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{x}$ のとき，$k > 1$ のとき拡大, $0 < k < 1$ のとき縮小という．(図 14)
- 3) 回転移動: $\boldsymbol{v} = 0$ で F が直交変換のとき回転移動という．(図 15)

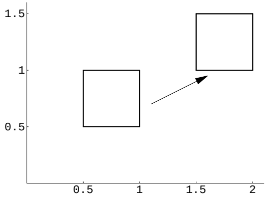

図 13

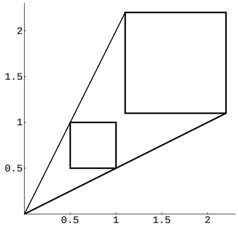

図 14

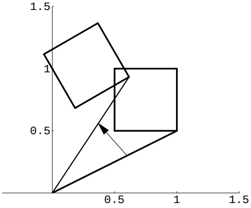

図 15

ベジエ曲線のアフィン不変性

- アフィン写像 $\Phi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ に対して，次が成り立つ：
$$\boldsymbol{b} = \sum_{j=0}^{n} c_j \boldsymbol{b}_j, \ \sum_{j=0}^{n} c_j = 1 \text{ に対して } \Phi(\boldsymbol{b}) = \sum_{j=0}^{n} c_j \Phi(\boldsymbol{b}_j).$$
- ベジエ曲線は**アフィン写像に対して不変**である．すなわち，次の２つの操作で得られる結果は同じである:
１）与えられた制御点をもつベジエ曲線 $\boldsymbol{b}_n(t)$ を計算し，この曲線をアフィン写像で写す．
２）制御点をアフィン写像で写してから，これらの制御点のベジエ曲線を計算する．

すなわち，$\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ を制御点，$\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ をアフィン写像とするとき，次が成り立つ:

$$\Phi\left(\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^n(t) \right) = \sum_{j=0}^{n} \Phi(\boldsymbol{b}_j) B_j^n(t).$$

ベジエ曲線のアフィン不変性

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して，$\boldsymbol{x}(t) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ で定まるアフィン写像 $\boldsymbol{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ を点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**線形補間**という．
線形補間はアフィン写像で不変である．すなわち，

$$\Phi((1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}) = (1-t)\Phi(\boldsymbol{a}) + t\Phi(\boldsymbol{b})$$

である．ベジエ曲線はド・カステリョのアルゴリズムにより，線形補間の繰り返しで構成されている．

ベジエ曲線を平行移動，拡大や縮小，回転移動させるには, ベジエ点を動かしてからベジエ曲線を求めればよい． この性質がアニメーションの製作やフォント (活字) の設計に，ベジエ曲線が用いられる理由の 1 つになっている．

アフィン写像は次のように行列であらわすことができる：
線形写像 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ と $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$ により $\Phi(\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$) と表わされるアフィン写像写像 $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を考える。線形写像 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を 2×2 行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ を用いて、$F(x)=Ax$ とする。アフィン写像写像 $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は 3 項ベクトルを用いて

$$\begin{pmatrix}\Phi(\boldsymbol{x})\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&p\\c&d&q\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix}$$

と表される。特に、平行移動は行列 $\begin{pmatrix}1&0&p\\0&1&q\\0&0&1\end{pmatrix}$ で表される。