

ベジエ曲線の導関数

- ベジエ曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ の導関数は、制御点の差分を用いて計算できる。

制御点の前進差分演算子 $\Delta^k \mathbf{b}_j$ を帰納的に

$\Delta^0 \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j$, $\Delta^k \mathbf{b}_j = \Delta^{k-1}(\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j)$ で定義する。

例. $\Delta \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j$, $\Delta^2 \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{j+2} - 2\mathbf{b}_{j+1} + \mathbf{b}_j$,

$\Delta^3 \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{j+3} - 3\mathbf{b}_{j+2} + 3\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j$.

- $$\frac{d}{dt} \mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \frac{d}{dt} B_j^n(t) = n \sum_{j=0}^n (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)) \mathbf{b}_j$$
$$= n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t) \text{ となる.}$$

- 特に、ベジエ曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ は端点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_n$ でそれぞれ、ベジエ多角形の辺 $\overline{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1}, \overline{\mathbf{b}_{n-1}\mathbf{b}_n}$ に接することがわかる。
上述の細分割とあわせると、ベジエ曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ は点 $\mathbf{b}_0^n(t_0)$ で線分 $\overline{\mathbf{b}_0^{n-1}(t_0)\mathbf{b}_1^{n-1}(t_0)}$ に接していることもわかる。
- また、高階の導関数に対しても、

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{b}_0^n(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \Delta^k \mathbf{b}_j B_j^{n-k}(t) \quad (9)$$

が成り立つ。

ベジエ曲線の高階の導関数の応用例

- 高階の導関数に関する式 (9) を用いて，細分割に関する**補題 2**を示す。

$c_1(t) = \mathbf{b}_0^n(t_0t)$ のベジエ点を求めるために，まずつぎのことに注意する。

多項式 $p(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n$ に対して，原点 $t = 0$ での n 階までの微係数が定まると多項式 $p(t)$ は定まる。すなわち， n 次の多項式 $p(t)$ と $q(t)$ に対して，

$$\frac{d^k}{dt^k} p(t)|_{t=0} = \frac{d^k}{dt^k} q(t)|_{t=0} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

ならば， $p(t) = q(t)$ となる。

- また，

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{b}_0^n(t_0t)|_{t=0} = \frac{n!}{(n-k)!} t_0^k \Delta^k \mathbf{b}_0 \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (10)$$

で，右辺は t_0 と $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ で定まることに注意する。

ベジエ曲線の高階の導関数の応用例

- $c_1(t) = \mathbf{b}_0^n(t_0t)$ のベジエ点を $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ とすると,

$$c_1(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_j B_j^n(t) \text{ で,}$$

$$\frac{d^k}{dt^k} c_1(t)|_{t=0} = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{c}_0 \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (11)$$

となる. また, $\mathbf{c}_0^r(t) = \sum_{j=0}^r \mathbf{c}_j B_j^r(t)$, $\mathbf{b}_0^r(t) = \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_j B_j^r(t)$ (

$r = 0, 1, \dots, n$) とおくと, $\mathbf{b}_0^r(t_0t) = \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_j B_j^r(t_0t)$ で, (10), (11)

より,

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{b}_0^r(t_0t)|_{t=0} = \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{c}_0^r(t)|_{t=0} \quad (k = 0, 1, \dots, r) \quad (12)$$

となる.

- $\mathbf{c}_0^r(t), \mathbf{b}_0^r(t_0t)$ の各成分は r 次の多項式であるから,
 $\mathbf{c}_0^r(t) = \mathbf{b}_0^r(t_0t)$ となる. 特に, $\mathbf{c}_0^r(1) = \mathbf{b}_0^r(t_0)$ ($r = 0, 1, \dots, n$) を
得る. 従って, $\mathbf{c}_r = \mathbf{c}_0^r(1) = \mathbf{b}_0^r(t_0)$ ($r = 0, 1, \dots, n$) を得る.
従って, $\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{b}_0^n(t_0t)$ のベジエ点は

$$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1(t_0), \mathbf{b}_0^2(t_0), \dots, \mathbf{b}_0^n(t_0),$$

で与えられる.

- 同様に, $\mathbf{c}_2(t) = \mathbf{b}_0^n(t_0 + (1 - t_0)t)$ のベジエ点を求めると

$$\mathbf{b}_0^n(t_0), \mathbf{b}_1^{n-1}(t_0), \mathbf{b}_2^{n-2}(t_0), \dots, \mathbf{b}_n$$

となる.

平行移動，拡大や縮小，回転移動などにより，ベジエ曲線はどのように変化するかなどを調べる．

- 平面 \mathbb{R}^2 あるいは空間 \mathbb{R}^3 の $n+1$ 個の点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ を考える．

$$\mathbf{b} = c_0\mathbf{b}_0 + c_1\mathbf{b}_1 + \dots + c_n\mathbf{b}_n, \quad c_0 + c_1 + \dots + c_n = 1$$

と表わされるとき， \mathbf{b} を $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ の**重心結合**という．

- 例えば3点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ の作る三角形の重心 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2$ は，重心結合の一例である．

集合 $P = \left\{ \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j \mid \sum_{j=0}^n c_j = 1, 0 \leq c_j \leq 1 \right\}$ を $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ で生成される凸包とよぶ。

例 1. 2点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ のとき, P は線分である。

例 2. 3点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ のとき, P は三角形の内部と境界である。



図 11

例 3. 空間 \mathbb{R}^3 の 4 点 b_0, b_1, b_2, b_3 を考えると, 一般には P は四面体の内部と境界である (図 12a).

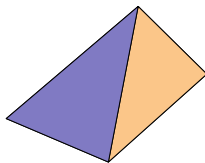


図 12a

例 4. 4 点 b_0, b_1, b_2, b_3 が同一平面上にあるとき, P は四辺形の内部と境界である (図 12b).

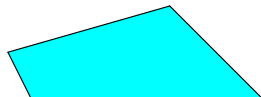


図 12b

ベジエ曲線とその制御多角形との関係を見よう.

- ベジエ曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ のとき、制御多角形内にある。これをベジエ曲線の凸包性という。

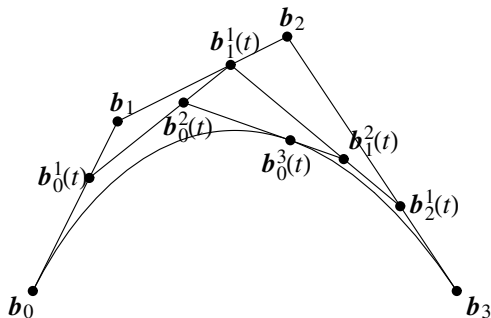
このことは次のようにしてわかる：ベルンシュタイン多項式 $B_j^n(t)$ は

$$B_j^n(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq 1), \quad \sum_{j=0}^n B_j^n(t) = 1$$

をみtas. ベジエ曲線 $\mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t)$ は集合

$$P = \left\{ \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j \mid \sum_{j=0}^n c_j = 1, 0 \leq c_j \leq 1 \right\} \text{ に含まれる.}$$

別証



ド・カステリヨのアルゴリズムにおいて、 $b_i^r(t)$ は1つ前の段階である $b_i^{r-1}(t)$ と $b_{i+1}^{r-1}(t)$ とを $t : 1-t$ に内分する点として得られ、これを繰り返すことにより $b_i^r(t)$ は得られる。

従って、 $b_i^r(t)$ は b_0, b_1, \dots, b_n から生成される制御多角形内にある。特に、ベジエ曲線 $b_0^n(t)$ は制御多角形内にあることがわかる。