ベジエ曲線の細分割

- ベジエ曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ に対して，曲線上の点 $\boldsymbol{b}_0^n(t_0)$ で曲線を分割する．このとき，二つに分割した曲線はともにベジエ曲線となる．

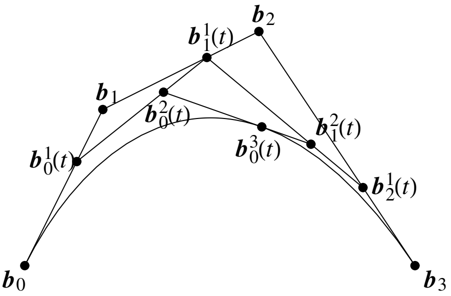

図 8

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{b}_0 & & & & \\
\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_0^1(t) & & & \\
\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1^1(t) & \boldsymbol{b}_0^2(t) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\boldsymbol{b}_n & \boldsymbol{b}_{n-1}^1(t) & \boldsymbol{b}_{n-2}^2(t) & \cdots & \boldsymbol{b}_0^n(t)
\end{array} \tag{7}$$

補題 2 (細分割) ド・カステリョのアルゴリズムを用いて，ベジエ曲線を $t = t_0$ で 2 つのベジエ曲線に細分割することができる．細分割された 2 つのベジエ曲線 $c_1(t), c_2(t)$ のベジエ点はド・カステリョの図式 (7) の境界の点で与えられる．すなわち，

$$\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_0^1(t_0), \boldsymbol{b}_0^2(t_0), \ldots, \boldsymbol{b}_0^n(t_0),$$

$$\boldsymbol{b}_0^n(t_0), \boldsymbol{b}_1^{n-1}(t_0), \boldsymbol{b}_2^{n-2}(t_0), \ldots, \boldsymbol{b}_n$$

がそれぞれのベジエ点となる．

証明． $c_1(t) = \boldsymbol{b}_0^n(t_0 t)$ のベジエ点を求めよう．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_0^n(t_0 t) &= \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^n(t_0 t) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j \sum_{r=j}^{n} B_j^r(t_0) B_r^n(t) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j \sum_{r=0}^{n} B_j^r(t_0) B_r^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{r=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^r(t_0) B_r^n(t) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^r(t_0) \right) B_r^n(t) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{b}_j B_j^r(t_0) \right) B_r^n(t) = \sum_{r=0}^{n} \boldsymbol{b}_0^r(t_0) B_r^n(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

$\boldsymbol{b}_0^0(t_0) = \boldsymbol{b}_0$ に注意して，$c_1(t)$ のベジエ点は $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_0^1(t_0), \boldsymbol{b}_0^2(t_0), \ldots, \boldsymbol{b}_0^n(t_0)$ となる．同様にして，$c_2(t)$ のベジエ点は $\boldsymbol{b}_0^n(t_0), \boldsymbol{b}_1^{n-1}(t_0), \boldsymbol{b}_2^{n-2}(t_0), \ldots, \boldsymbol{b}_n$ となる．

ベジエ曲線の細分割

ここで，証明に用いた式 (8) $B^n_j(s\,t) = \sum_{r=j}^{n} B^r_j(s) B^n_r(t)$ を示す.

$$
\begin{aligned}
B^n_j(st) &= {}_nC_j\,(1-st)^{n-j}(st)^j = {}_nC_j\,(1-t+t-st)^{n-j}(st)^j \\
&= {}_nC_j \sum_{i=0}^{n-j} {}_{n-j}C_i\,(1-t)^{n-j-i} t^i (1-s)^i (st)^j \\
&= \sum_{i=0}^{n-j} {}_nC_j \cdot {}_{n-j}C_i \cdot (1-s)^i s^j \cdot (1-t)^{n-j-i}\, t^{i+j} \\
&\quad \text{ここで } i+j=r \text{ とおくと,} \\
&= \sum_{r=j}^{n} {}_nC_j \cdot {}_{n-j}C_{r-j} \cdot \frac{1}{{}_rC_j} B^r_j(s) \cdot \frac{1}{{}_nC_r} B^n_r(t).
\end{aligned}
$$

$\dfrac{{}_nC_j \cdot {}_{n-j}C_{r-j}}{{}_rC_j \cdot {}_nC_r} = 1$ に注意すると求める式を得る.

例 $\boldsymbol{b}_0 = (-1,-1)$, $\boldsymbol{b}_1 = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, $\boldsymbol{b}_2 = \left(\frac{1}{3}, -1\right)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,1)$ をベジエ点とすると，ベジエ曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ は $(2t-1, (2t-1)^3)$ となる．$t = \frac{1}{3}$ で細分割 したときの制御多角形は図 9 のようになる．

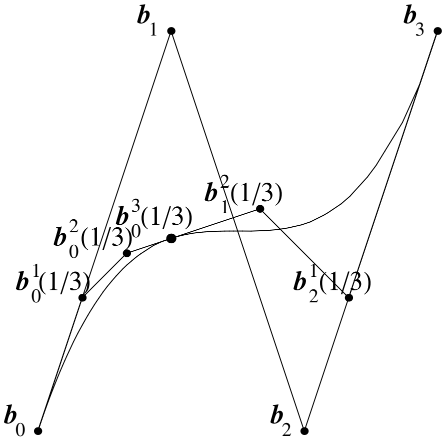

図 9 $t = \frac{1}{3}$ で細分割

ベジエ曲線の細分割

ベジエ曲線を細分割すると，それぞれのベジエ曲線の制御点が定まり，細分割を繰り返すとこれらの制御多角形は元のベジエ曲線に収束する．

$t = \dfrac{1}{2}$ で細分割を繰り返したとき，制御多角形が元のベジエ曲線に収束する様子は図 10 のようになる．

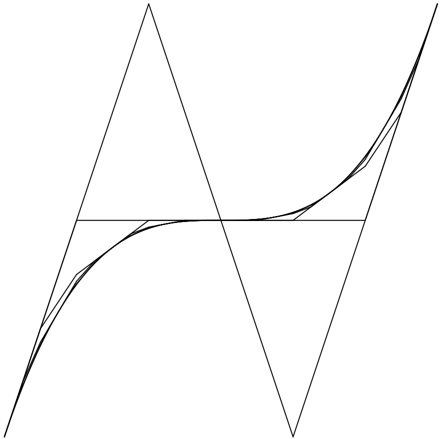

図 10 $t = \dfrac{1}{2}$ で細分割を 4 回繰り返し