ベジエ点を求める

単項式をベルンシュタイン多項式であらわす式 (3) の応用として
ベジエ点を求めてみよう.

1) 放物線 $y = x^2$ のベジエ点を求めることを考えよう。

$1 = B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t)$, $t = \dfrac{1}{2}B_1^2(t) + B_2^2(t)$, $t^2 = B_2^2(t)$ に注意する.

a) $x = t, y = t^2$ ($0 \le t \le 1$) の場合

$\boldsymbol{b}_0 = (0, 0), \boldsymbol{b}_1 = (1/2, 0), \boldsymbol{b}_2 = (1, 1)$.

b) $x = 2t - 1, y = (2t-1)^2$ ($0 \le t \le 1$) の場合

$2t - 1 = -B_0^2(t) + B_2^2(t)$, $4t^2 - 4t + 1 = B_0^2(t) - B_1^2(t) + B_2^2(t)$ より

$\boldsymbol{b}_0 = (-1, 1), \boldsymbol{b}_1 = (0, -1), \boldsymbol{b}_2 = (1, 1)$ を得る .

2) 放物線 $y = x^2 - 2x$ ($-1 \le x \le 3$) のベジエ点を求めることを考えよう。$x = 4t - 1, y = (4t-1)^2 - 2(4t-1)$ ($0 \le t \le 1$) とおいて

$4t - 1 = -B_0^2(t) + B_1^2(t) + 3B_2^2(t)$,

$(4t-1)^2 - 2(4t-1) = 16t^2 - 16t + 3 = 3B_0^2(t) - 5B_1^2(t) + 3B_2^2(t)$ より

$\boldsymbol{b}_0 = (-1, 3), \boldsymbol{b}_1 = (1, -5), \boldsymbol{b}_2 = (1, 3)$ を得る .

3) 曲線 $y^2 = x^3$ ($0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$) のベジエ点を求めることを考えよう。
$x = (2t-1)^2, y = (2t-1)^3 \quad (0 \le t \le 1)$ とおいて
$(2t-1)^2 = B_0^3(t) - \frac{1}{3}B_1^3(t) - \frac{1}{3}B_2^3(t) + B_3^3(t),$
$(2t-1)^3 = -B_0^3(t) + B_1^3(t) - 1B_2^3(t) + B_3^3(t)$ より
$\boldsymbol{b}_0 = (1, -1), \boldsymbol{b}_1 = (-\frac{1}{3}, 1), \boldsymbol{b}_2 = (-\frac{1}{3}, -1), \boldsymbol{b}_3 = (1, 1)$ を得る．

4) 曲線 $y = x^3$ ($-1 \le x \le 1$) のベジエ点を求めることを考えよう。
$x = (2t-1), y = (2t-1)^3 \quad (0 \le t \le 1)$ とおいて
$(2t-1) = -B_0^3(t) - \frac{1}{3}B_1^3(t) + \frac{1}{3}B_2^3(t) + B_3^3(t),$
$(2t-1)^3 = -B_0^3(t) + B_1^3(t) - 1B_2^3(t) + B_3^3(t)$ より
$\boldsymbol{b}_0 = (-1, -1), \boldsymbol{b}_1 = (-\frac{1}{3}, 1), \boldsymbol{b}_2 = (\frac{1}{3}, -1), \boldsymbol{b}_3 = (1, 1)$ を得る．

- 区分的にはベジエ曲線となっている曲線を用いて形状設計を行っているとき，制御多角形を何度か変更した後で，ある部分が n 次の曲線では望ましい形状を作成するだけの自由度をもっていないことが分かったとする．
- このとき，すでにある望ましい部分の形状を変えないで，自由度を上げる必要が生じる．すなわち，曲線の形状を変えないようにベジエ点を 1 個追加することが必要となる．

  これはベジエ曲線の次数上げで解決される．
- $\boldsymbol{b}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ をベジエ点とする．$\boldsymbol{b}_i^{(1)}$ を

$$\boldsymbol{b}_i^{(1)} = \frac{i}{n+1}\boldsymbol{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\boldsymbol{b}_i, \quad (i = 0, \ldots, n+1) \qquad (6)$$

  で定義すると

n 次ベジエ曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ は，$\boldsymbol{b}_i^{(1)}$ をベジエ点とする $n+1$ 次ベジエ曲線として表せる：

$$\boldsymbol{b}_0^n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \boldsymbol{b}_i^{(1)} B_i^{n+1}(t).$$

実際，左辺に $1 = ((1-t)+t)$ をかけて
$\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i \binom{n}{i}((1-t)^{n-i+1}t^i + (1-t)^{n-i}t^{i+1})$ となる。$(1-t)^{n-i+1}t^i$ の係数を比較して $\boldsymbol{b}_i^{(1)}\binom{n+1}{i} = \boldsymbol{b}_i\binom{n}{i} + \boldsymbol{b}_{i-1}\binom{n}{i-1}$ を得る。よって

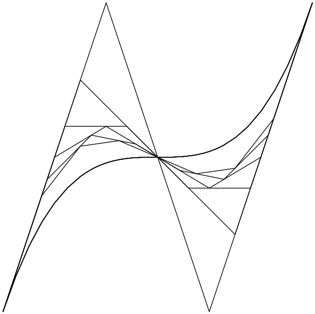
$$\boldsymbol{b}_i^{(1)} = \frac{\binom{n}{i-1}}{\binom{n+1}{i}}\boldsymbol{b}_{i-1} + \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}}\boldsymbol{b}_i = \frac{i}{n+1}\boldsymbol{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\boldsymbol{b}_i$$ を得る。

ベジエ曲線の次数上げ

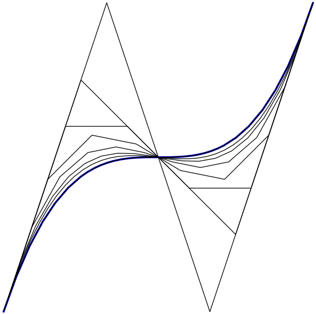
- 次数上げを繰り返すことにより，n 次ベジエ曲線を $n+r$ 次ベジエ曲線としてあらわすことができる．このとき，対応するベジエ点 $\boldsymbol{b}_i^{(r)}$ は
$$\boldsymbol{b}_i^{(r)} = \sum_{j=i-r}^{i} \frac{{}_nC_j \cdot {}_rC_{i-j}}{{}_{n+r}C_i} \boldsymbol{b}_j, \quad i = 0, \ldots, n+r$$
で与えられる．
- また，制御多角形を次数上げする作用素を $\mathcal{E}$，$\boldsymbol{P}$ を n 次ベジエ多角形とし，次数上げを行ったベジエ多角形の列 $\boldsymbol{P}, \mathcal{E}\boldsymbol{P}, \mathcal{E}^2\boldsymbol{P}, \ldots$ について次の定理が成り立つことがわかる．
- **定理 1 (収束)** 次数上げを繰り返していくと，ベジエ多角形はベジエ曲線に収束する．すなわち
$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{E}^r \boldsymbol{P} = \boldsymbol{b}_0^n(t)$$
が成り立つ．

ベジエ曲線の次数上げ

例 $\boldsymbol{b}_0 = (-1,-1), \boldsymbol{b}_1 = \left(-\frac{1}{3}, 1\right), \boldsymbol{b}_2 = \left(\frac{1}{3}, -1\right), \boldsymbol{b}_3 = (1,1)$ をベジエ点とすると，ベジエ曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ は $(2t-1,(2t-1)^3)$ となる．このときのベジエ多角形がベジエ曲線に収束する様子は図 7 のようになる．



$1,2,3,4,5$ と次数上げしたもの



$1,2,4,8,16,32$ と次数上げしたもの

図 7