ベジエ曲線のベルンシュタイン表現

- n 次の**ベルンシュタイン多項式** $B^n_i(t)$ は次で定義される t の多項式である：

$$B^n_i(t) = {}_nC_i\,(1-t)^{n-i}t^i, \quad \text{ここに } {}_nC_i = \frac{n!}{(n-i)!i!},$$

  ただし，$B^0_0(t) = 1$ とし，j が $\{0, 1, \cdots, n\}$ 以外の値をとるとき $B^n_j(t) = 0$ とおく．

- $n = 2$ のとき，$B^2_0(t) = (1-t)^2$, $B^2_1(t) = 2(1-t)t$, $B^2_2(t) = t^2$,
- $n = 3$ のとき，$B^3_0(t) = (1-t)^3$, $B^3_0(t) = 3(1-t)^2t$, $B^3_2(t) = 3(1-t)t^2$, $B^3_3(t) = t^3$ となる．
- $n = 4$ のとき，$B^4_0(t) = (1-t)^4$, $B^4_0(t) = 4(1-t)^3t$, $B^4_2(t) = 6(1-t)^2t^2$, $B^4_3(t) = 4(1-t)t^3$, $B^4_4(t) = t^4$ となる．

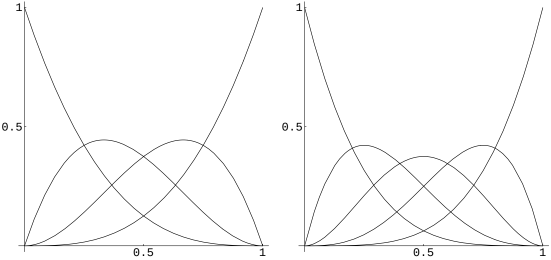

図 6a 図 6b

3 次，および 4 次のベルンシュタイン多項式のグラフは図 6a, 図 6b のようになる．

ベルンシュタイン多項式の性質

1) ベルンシュタイン多項式 $B_i^n(t)$ は次の漸化式をみたす.

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \tag{2}$$

2) 単項式 $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ はベルンシュタイン多項式 $\{B_0^n(t), B_1^n(t), \cdots, B_n^n(t)\}$ を用いてあらわせる：

$$1 = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t), \qquad t^i = \sum_{j=i}^{n} \frac{{}_jC_i}{{}_nC_i} B_j^n(t) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{3}$$

が成り立つ.

- **証明**

$$
\begin{aligned}
1)\ B_i^n(t) &= {}_nC_i\, t^i(1-t)^{n-i} = ({}_{n-1}C_i + {}_{n-1}C_{i-1})\ t^i(1-t)^{n-i} \\
&= (1-t)\,{}_{n-1}C_i\, t^i(1-t)^{n-1-i} + t\cdot\ {}_{n-1}C_{i-1}\, t^{i-1}(1-t)^{n-i} \\
&= (1-t)\,B_i^{n-1} + t\,B_{i-1}^{n-1}. \\
2)\qquad 1 &= (t+(1-t))^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i\, t^i(1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t).
\end{aligned}
$$

ベジエ曲線のベルンシュタイン表現

線形代数の言葉を持ちいると、次のように言い表される。

- n 次以下の t の実係数の多項式全体のなすベクトル空間を P_n であらわす：$P_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \;\middle|\; a_j \in \mathbb{R} \right\}$.
- 明らかに単項式 $\{1,\ t,\ t^2,\ \cdots,\ t^n\}$ はベクトル空間 P_n の基底である.
- 上記の (3) から，ベルンシュタイン多項式 $\left\{B_0^n(t), B_1^n(t), \cdots, B_n^n(t)\right\}$ もベクトル空間 P_n の基底であることがわかる.

次の命題は，r に関する帰納法により，(2) からわかる．

命題 1 ド・カステリョのアルゴリズムにおける中間点 $\boldsymbol{b}_i^r(t)$ は，r 次のベルンシュタイン多項式を用いて，

$$\boldsymbol{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} \boldsymbol{b}_{i+j} B_j^r(t) \quad (r = 0, 1, \cdots, n;\ i = 0, 1, \cdots, n - r) \tag{4}$$

と表せる．特に，$r = n$ のとき，ベジエ曲線のベルンシュタイン多項式による表現

$$\boldsymbol{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^n(t) \tag{5}$$

を得る．これを，ベジエ曲線の**ベルンシュタイン表現**とよぶ．

- **証明**　r に関する数学的帰納法により示す．
  ド・カステリョのアルゴリズムの式 (1) より

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_i^r(t) &= (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t)\\ &= (1-t)\sum_{j=0}^{r-1}\mathbf{b}_{i+j}B_j^{r-1}(t) + t\sum_{j=0}^{r-1}\mathbf{b}_{i+j+1}B_j^{r-1}(t)\end{aligned}$$

  添字をとりかえて，つぎを得る．

$$\begin{aligned}&= (1-t)\sum_{j=0}^{r}\mathbf{b}_{i+j}B_j^{r-1}(t) + t\sum_{j=0}^{r}\mathbf{b}_{i+j}B_{j-1}^{r-1}(t)\\ &= \sum_{j=0}^{r}\mathbf{b}_{i+j}\left((1-t)B_j^{r-1}(t) + tB_{j-1}^{r-1}(t)\right)\end{aligned}$$

  したがって (2) により，求める結果を得る．

- **端点一致：** ベジエ曲線は $\boldsymbol{b}_0^n(0) = \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_0^n(1) = \boldsymbol{b}_n$ を通る．これは，$j = 0$ のとき $B_j^n(0) = 1, j \neq 0$ のとき $B_j^n(0) = 0$, また，$j = n$ のとき $B_j^n(1) = 1$，$j \neq n$ のとき $B_j^n(1) = 0$ からもわかる．
- **対称性：** ベジエ制御点を $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ あるいは $\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{b}_0$ とするとき，2つの曲線は向きをのぞいて，同じである．すなわち，

$$\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_{n-j} B_j^n(1-t)$$

が成り立つ．これは，ベルンシュタイン多項式の性質 $B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t)$ からわかる．

ベジエ曲線の性質

- **直線再現性**：制御点 $\boldsymbol{b}_j$ が２点 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ をを結ぶ直線上に等間隔に配置されていたとする：

$$\boldsymbol{b}_j = (1 - \frac{j}{n})\mathbf{p} + \frac{j}{n}\mathbf{q} \quad (j = 0, 1, \cdots, n).$$

このとき，$\boldsymbol{b}_j$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$ から作られる曲線 $\boldsymbol{b}_0^n(t)$ は２点 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ を結ぶ直線 $(1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ となる．これは $t = \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{n} B_j^n(t)$ からわかる．