ベジエ曲面

- ベジエ曲線は線分をもとに考えたが，曲面の場合は四辺形を基本において考えられた．これは，次のような開発上の理由による．
  初期の開発がほとんど自動車工業で展開され，曲面の自動車ボディ設計への応用は，屋根，ドア，フードなどの外板に対するものであった．これらの部品は基本的には四辺形に近い形状であり，それらをより小さな四辺形に分割するのは自然な考え方であった．

- **双一次補間** 線形補間は２つの点を直線で結んだが，双一次補間は４つの点から曲面を作る方法である．

テンソル積ベジエ曲面

$\boldsymbol{b}_{0,0}, \boldsymbol{b}_{0,1}, \boldsymbol{b}_{1,0}, \boldsymbol{b}_{1,1}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の 4 つの異なる点とする．$u, v \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}^3$ の点

$$\boldsymbol{x}(u, v) = (1-u)(1-v)\boldsymbol{b}_{0,0} + (1-u)v\boldsymbol{b}_{0,1} + u(1-v)\boldsymbol{b}_{1,0} + uv\boldsymbol{b}_{1,1}$$

を対応させる写像を**双一次補間**といい，これら点の集合を $\boldsymbol{b}_{0,0}$, $\boldsymbol{b}_{0,1}, \boldsymbol{b}_{1,0}, \boldsymbol{b}_{1,1}$ を通る**双曲放物面**という．

4 点を $\boldsymbol{b}_{0,0} = (0,0,0)$，$\boldsymbol{b}_{0,1} = (0,1,0)$，$\boldsymbol{b}_{1,0} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{b}_{1,1} = (1,1,1)$ とするとき，$\boldsymbol{x}(u, v) = (u, v, uv)$ となり，曲面は $z = xy$ で与えられる．図 19 は $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ に対する曲面をあらわす．

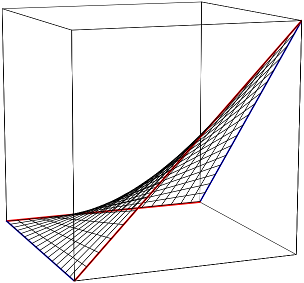

図 19

テンソル積ベジエ曲面

双一次補間 $\boldsymbol{x}(u,v)$ を２段階に分けて考える．まず次の式によって中間点を計算する．

$$\boldsymbol{b}_{0,0}^{(0,1)} = (1-v)\boldsymbol{b}_{0,0} + v\boldsymbol{b}_{0,1},$$

$$\boldsymbol{b}_{1,0}^{(0,1)} = (1-v)\boldsymbol{b}_{1,0} + v\boldsymbol{b}_{0,1}$$

次に $\boldsymbol{b}_{0,0}^{(0,1)}$ と $\boldsymbol{b}_{1,0}^{(0,1)}$ とを線形補間すると，

$(1-u)\boldsymbol{b}_{0,0}^{(0,1)} + u\boldsymbol{b}_{1,0}^{(0,1)}$ となり，

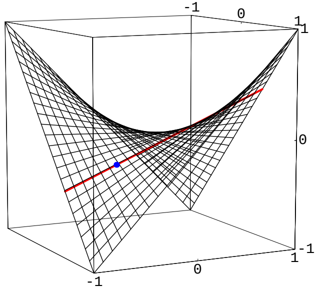

図 20

曲面 $\boldsymbol{x}(u,v) = (1-u)(1-v)\boldsymbol{b}_{0,0} + (1-u)v\boldsymbol{b}_{0,1} + u(1-v)\boldsymbol{b}_{1,0} + uv\boldsymbol{b}_{1,1}$
$= \boldsymbol{b}_{0,0}B_0^1(u)B_0^1(v) + \boldsymbol{b}_{0,1}B_0^1(u)B_1^1(v) + \boldsymbol{b}_{1,0}B_1^1(u)B_0^1(v) + \boldsymbol{b}_{1,1}B_1^1(u)B_1^1(v)$ を得る．

テンソル積ベジエ曲面

テンソル積ベジエ曲面は，双一次補間の考え方を一般化したものである．$\mathbb{R}^3$ の $(m+1)(n+1)$ 個の点 $\boldsymbol{b}_{i,j}$ を与える．最初に移動する曲線を m 次のベジエ曲線とすると次のように表わされる:

$$\boldsymbol{b}^m = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{b}_i B_i^m(u).$$

各 $\boldsymbol{b}_i$ が n 次のベジエ曲線上を移動すると，$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_{i,j} B_j^n(v)$ となる．これら 2 つの式をあわせて次の式で定義される曲面 $\boldsymbol{b}^{m,n}(u,v)$ が得られる:

$$\boldsymbol{b}^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

曲面 $\boldsymbol{b}^{m,n}(u,v)$ を $(m+1)(n+1)$ の制御点 $\boldsymbol{b}_{i,j}$ $(i=0,1,\cdots,m,\ j=0,1,\cdots,n)$ から構成される**テンソル積ベジエ曲面**または**ベジエ曲面**という（図21）．格子点配列された制御点の並びは，**ベジエネット**または**制御ネット**と呼ばれる．

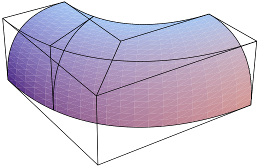

図 21

曲面 $\boldsymbol{b}^{m,n}(u,v)$ の $v=v_0$ である等パラメータ曲線は u についての m 次のベジエ曲線であり，その $m+1$ 個のベジエ制御点は $\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{b}_{i,j}B_j^n(v_0)$ $(i=0,1,\cdots,m)$ で与えられる．

テンソル積ベジエ曲面の性質

a) **アフィン不変性：**
曲面上の点 $\boldsymbol{b}^{m,n}(u,v)$ は $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(u)B_j^n(v)=1$ より $\boldsymbol{b}_{i,j}$ $(i=0,1,\cdots,m,\ j=0,1,\cdots,n)$ の重心結合とみなせる．従って，アフィン写像で不変である．

b) **凸包性：**
曲面 $\boldsymbol{b}^{m,n}(u,v)$ は $u,v\in I=[0,\ \ 1]$ に対して制御多角形の凸包内にある．これは，多項式 $B_i^m(u)B_j^n(v)$ は非負であり，その和は 1 であることからわかる．

c) **境界曲線：**
曲面 $\boldsymbol{b}^{m,n}(u,v)$ $((u,v)\in I\times I)$ の境界曲線は u あるいは v についてのベジエ曲線である．特に，曲面 $\boldsymbol{b}^{m,n}(u,v)$ は 4 点 $\boldsymbol{b}_{0,0},\boldsymbol{b}_{m,0},\boldsymbol{b}_{0,n},\boldsymbol{b}_{m,n}$ を通る．

テンソル積ベジエ曲面の例

例 1. $m = 2, n = 2$ で，9 点を $\boldsymbol{b}_{0,0} = (0,0,0)$, $\boldsymbol{b}_{0,1} = (1,0,1)$, $\boldsymbol{b}_{0,2} = (2,0,0)$, $\boldsymbol{b}_{1,0} = (0,1,1)$, $\boldsymbol{b}_{1,1} = (1,1,2)$, $\boldsymbol{b}_{1,2} = (2,1,1)$, $\boldsymbol{b}_{2,0} = (0,2,0)$, $\boldsymbol{b}_{2,1} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{b}_{2,2} = (2,2,0)$ とすると，ベジエ曲面は図 22 のようになる.

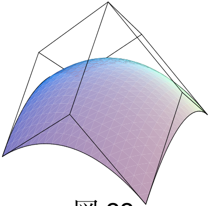

図 22

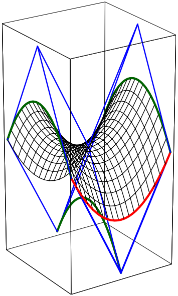

図 23

例 2. $m = 2, n = 2$ で，9 点を $\boldsymbol{b}_{0,0} = (-1,-1,0)$, $\boldsymbol{b}_{0,1} = (-1,0,2)$, $\boldsymbol{b}_{0,2} = (-1,1,0)$, $\boldsymbol{b}_{1,0} = (0,-1,-2)$, $\boldsymbol{b}_{1,1} = (0,0,0)$, $\boldsymbol{b}_{1,2} = (0,1,-2)$, $\boldsymbol{b}_{2,0} = (1,-1,0)$, $\boldsymbol{b}_{2,1} = (1,0,2)$, $\boldsymbol{b}_{2,2} = (1,1,0)$ とすると，ベジエ曲面は図 23 のようになる.

例 3. $m = 2, n = 2$ で，9 点を $\boldsymbol{b}_{0,0} = (2, 0, 2)$, $\boldsymbol{b}_{0,1} = (4, 0, 2)$, $\boldsymbol{b}_{0,2} = (4, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_{1,0} = (2, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_{1,1} = (4, 4, 2)$, $\boldsymbol{b}_{1,2} = (4, 4, 0)$, $\boldsymbol{b}_{2,0} = (0, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_{2,1} = (0, 4, 2)$, $\boldsymbol{b}_{2,2} = (0, 4, 0)$ とすると，ベジエ曲面は図 24 のようになる．

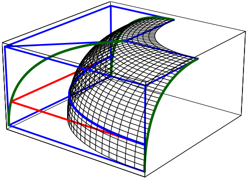

図 24

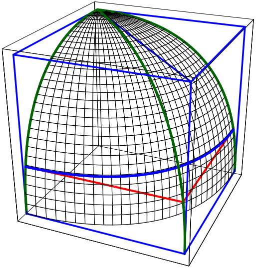

図 25

例 4. $m = 2, n = 2$ で，9 点を $\boldsymbol{b}_{0,0} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_{0,1} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_{0,2} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_{1,0} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_{1,1} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_{1,2} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_{2,0} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_{2,1} = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_{2,2} = (0, 0, 1)$ とすると，ベジエ曲面は図 25 のようになる．

テンソル積ベジエ曲面の例

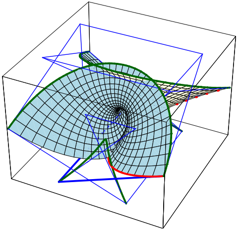

図 26a

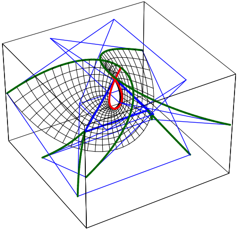

図 26b

例 5. $m = 3, n = 3$ で，16 点を $\boldsymbol{b}_{0,0} = (-22, -22, 0)$, $\boldsymbol{b}_{0,1} = (10, -18, 16)$, $\boldsymbol{b}_{0,2} = (10, 18, 16)$, $\boldsymbol{b}_{0,3} = (-22, 22, 0)$, $\boldsymbol{b}_{1,0} = (-18, 10, -16)$, $\boldsymbol{b}_{1,1} = (-22/3, -22/3, 0)$, $\boldsymbol{b}_{1,2} = (-22/3, 22/3, 0)$, $\boldsymbol{b}_{1,3} = (-18, -10, -16)$, $\boldsymbol{b}_{2,0} = (18, 10, -16)$, $\boldsymbol{b}_{2,1} = (22/3, -22/3, 0)$, $\boldsymbol{b}_{2,2} = (22/3, 22/3, 0)$, $\boldsymbol{b}_{2,3} = (18, -10, -16)$, $\boldsymbol{b}_{3,0} = (22, -22, 0)$, $\boldsymbol{b}_{3,1} = (-10, -18, 16)$, $\boldsymbol{b}_{3,2} = (-10, 18, 16)$, $\boldsymbol{b}_{3,3} = (22, 22, 0)$ とすると，ベジエ曲面は図 26a, 26b のような enneper 曲面になる．