

有理ベジエ曲線の性質

円錐曲線と同様に，空間 \mathbb{R}^2 の $n+1$ 個の点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ と正の実数 w_0, \dots, w_n を与えるとき，有理ベジエ曲線 $\mathbf{x}(t)$ を

$$\mathbf{x}(t) = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \dots + w_n \mathbf{b}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)} \quad (16)$$

で定義する． w_i を**重み**， \mathbf{b}_i ($i = 0, 1, \dots, n$) を**ベジエ点**あるいは**制御点**， \mathbf{b}_i ($i = 0, 1, \dots, n$) で生成される多面体を**制御多角形**とよぶ．すべての重みが等しいならば，有理ベジエ曲線 $\mathbf{x}(t)$ はベジエ曲線となる．

また，有理ベジエ曲線はベジエ曲線と同様の性質，すなわち，アフィン不変性，凸包性，端点一致，対称性をもつ．

これは，ベジエ点 \mathbf{b}_i の係数が $\frac{w_i B_i^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)}$ で与えられることからわかる．

有理ベジエ曲線の次数上げ

平面 \mathbb{R}^2 の $n+1$ 個の点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ と正の実数 w_0, \dots, w_n を与えるとき,

- $n+2$ 個のベジエ点 $\mathbf{b}_i^{(1)}$ と重み $w_i^{(1)}$ ($i = 0, \dots, n+1$) を

$$w_i^{(1)} = \frac{i}{n+1} w_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) w_i \quad (17)$$

$$\mathbf{b}_i^{(1)} = \frac{i w_{i-1} \mathbf{b}_{i-1} + (n+1-i) w_i \mathbf{b}_i}{i w_{i-1} + (n+1-i) w_i} \quad (18)$$

で定義すると、有理ベジエ曲線 $\mathbf{x}(t)$ は

$$\mathbf{x}(t) = \frac{w_0^{(1)} \mathbf{b}_0^{(1)} B_0^{n+1}(t) + \dots + w_{n+1}^{(1)} \mathbf{b}_{n+1}^{(1)} B_{n+1}^{n+1}(t)}{w_0^{(1)} B_0^{n+1}(t) + \dots + w_{n+1}^{(1)} B_{n+1}^{n+1}(t)}$$

とあらわされる。

有理ベジエ曲線の次数上げの応用

例 1. 制御点を $\mathbf{b}_0 = (0, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0)$ それぞれの点における重みを $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ とすると. 円錐曲線は

$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$ で与えられる. $0 \leq t \leq 1$ のとき, $\mathbf{x}(t)$ は原点

を中心とする半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ の 4 分の一である. t に $2t-1$ を代入すると, $\left(\frac{2t-1}{1-2t+2t^2}, \frac{2t(1-t)}{1-2t+2t^2} \right)$ を得る. 2 次のベルンシュタイン多項式を用いて, 重みを求めると,

$1-2t+2t^2 = (1-t)^2 + t^2 = B_0^2(t) + B_2^2(t)$ より, $w_0 = 1$, $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ を得る. 次数上げをおこなうと, $w_0^{(1)} = 1$, $w_1^{(1)} = 1/3$, $w_2^{(1)} = 1/3$,

$w_3^{(1)} = 1$ を得る. $2t-1 = -B_0^3(t) - \frac{1}{3}B_1^3(t) + \frac{1}{3}B_2^3(t) + B_3^3(t)$,

$2t(1-t) = \frac{2}{3}B_1^3(t) + \frac{2}{3}B_2^3(t)$ であるから,

$\mathbf{b}_0^{(1)} = (-1, 0)$, $\mathbf{b}_1^{(1)} = (-1, 2)$, $\mathbf{b}_2^{(1)} = (1, 2)$, $\mathbf{b}_3^{(1)} = (1, 0)$ を得る.

有理ベジエ曲線の次数上げの応用

例 2. 円全体を表す有理ベジエ曲線を求める.

まず, $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ を有理式であらわす.

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \text{ として,}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1, \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta \text{ より,}$$

$$\cos 2\theta = 2 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 - 1, \quad \sin 2\theta = 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{2t}{1+t^2}$$

は $0 \leq t \leq 1$ のとき半円をあらわす. t に $2t-1$ を代入すると,

$$\cos 2\theta = -\frac{(2t^2-1)(2t^2-4t+1)}{(2t^2-2t+1)^2}$$

$$\sin 2\theta = -\frac{4(t-1)t(2t-1)}{(2t^2-2t+1)^2}$$

となり, これは $0 \leq t \leq 1$ のとき円全体をあらわす.

有理ベジエ曲線の次数上げの応用

4 次のベルンシュタイン多項式を用いて、重みを求めると、

$$\begin{aligned}(1-2t+2t^2)^2 &= ((1-t)^2+t^2)^2 \\ &= (1-t)^4 + 2(1-t)^2t^2 + t^4 \\ &= B_0^4(t) + \frac{1}{3}B_2^4(t) + B_4^4(t) \text{ より, } w_0 = 1,\end{aligned}$$

$w_1 = 0, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = 0, w_4 = 1$ を得る. 次数上げをおこなうと、

$$w_0^{(1)} = 1, w_1^{(1)} = \frac{1}{5}, w_2^{(1)} = \frac{1}{5}, w_3^{(1)} = \frac{1}{5},$$

$w_4^{(1)} = \frac{1}{5}, w_5^{(1)} = 1$ を得る. ベジエ

点は $\mathbf{b}_0^{(1)} = (1, 0), \mathbf{b}_1^{(1)} = (1, -4),$

$\mathbf{b}_2^{(1)} = (-3, -2), \mathbf{b}_3^{(1)} = (-3, 2),$

$\mathbf{b}_4^{(1)} = (1, 4), \mathbf{b}_5^{(1)} = (1, 0)$ となる.

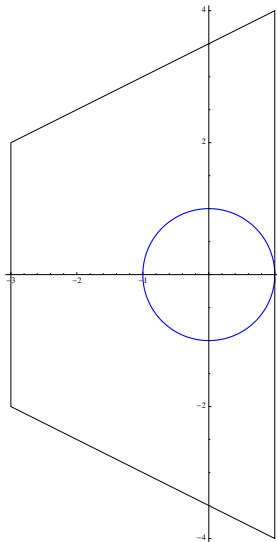


図 21

有理ベジエ曲線

例 3. ベジエ点を $\mathbf{b}_0 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1, \frac{4}{5})$, $\mathbf{b}_2 = (\frac{8}{25}, \frac{36}{25})$, $\mathbf{b}_3 = (-\frac{7}{10}, \frac{7}{5})$, $\mathbf{b}_4 = (-\frac{7}{5}, \frac{28}{45})$, $\mathbf{b}_5 = (-\frac{49}{37}, -\frac{14}{37})$, $\mathbf{b}_6 = (-\frac{28}{45}, -\frac{14}{15})$, $\mathbf{b}_7 = (\frac{1}{10}, -\frac{4}{5})$, $\mathbf{b}_8 = (\frac{9}{25}, -\frac{8}{25})$, $\mathbf{b}_9 = (\frac{1}{5}, 0)$, $\mathbf{b}_{10} = (0, 0)$, その重みを $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{10}{9}$, $w_3 = \frac{4}{3}$, $w_4 = \frac{12}{7}$, $w_5 = \frac{148}{63}$, $w_6 = \frac{24}{7}$, $w_7 = \frac{16}{3}$, $w_8 = \frac{80}{9}$, $w_9 = 16$, $w_{10} = 32$ とすると,

$$\mathbf{b}_0^{10}(t) = \left(\frac{(1-t^2)(1-28t^2+70t^4-28t^6+t^8)}{(1+t^2)^5}, \frac{8t(1-t^2)^2(1-6t^2+t^4)}{(1+t^2)^5} \right)$$

$t = \frac{1}{2}$ におけるド・カステリョのアルゴリズムによる中間点 $\mathbf{b}_j^r(t)$ の様子は図 22 のようになる. この曲線は極座標表示で $r = \cos(\theta/4)$ となる曲線の一部である.

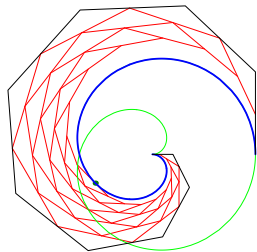


図 22