

ベジエ曲線とベジエ曲面

— コンピュータによる形状設計入門 —

我々の身近にはさまざまな曲線や曲面がある。自動車などの工業製品のデザインにも曲線や曲面が多くもちいられている。これらの曲線や曲面はどのようにしてデザインされ、工業製品に実現されているのだろうか。1960年頃には、設計者たちは雲形定規や自在定規を利用して曲線や曲面を描いていた。しかしながら、このようにして生成された図面上の曲線や曲面を量産用の機械設備である鋳型として完全に実現するには、いくつかの技術上の難点があった。

一方、基本的な形状のデータをコンピュータに記憶させて、これを用いれば効率よく設計をすることができるという考えから CAD (Computer Aided Design) があらわれた。初期の CAD においては、記憶させる形状は、直線や円などに限られていたので、もう少し複雑な曲線や曲面を描くには、どうすればいいかということが設計を行う上で問題となった。あるいはこれらが組み合わさった問題として、できるだけ少ないデータにより、量産用の設備を設計するにはどうすればよいか、モデルの小さな設計図から実物大の大きさのデータを容易に得るにはどうすればよいかなどがあった。これらを解決するものの一つとして考えられたのが、ベジエ曲線・曲面である。

以上のような経緯のもとに生まれた計算機を利用した形状の設計を、今日では、CAGD (Computer Aided Geometric Design) と呼んでいる。その基礎の一つとして重要な役割を果たすのがベジエ曲線・曲面である。ベジエ曲線・曲面はシトロエン社のド・カステリヨ (de Casteljau) とルノー社のベジエ (Bezier) によって、独立に考察されたが、企業秘密として1960年代の後半になるまで公表されなかった。

現在では、CAGD は、化学プラントのパイプシステムの設計、自動車・船・飛行機を製作するにあたってのモデリング曲面のほか、靴の設計、テレビ・映画における画像の作成、商業画像の作成、ロボットの動ける範囲の表現や動きのコントロール、など多くの応用分野で使われている。また、ベジエ曲線の考え方はフォントのデザインやコンピュータのドローイング・ソフトにも取り入れられている。

以下ではベジエ曲線・曲面の数学的側面について述べていく。

1 ベジエ曲線

ベジエ曲線は線分の内分点を繰り返しとることにより得られる曲線である。まず、ベジエ曲線の幾何学的な性質についてのべ、これがベルンシュタイン多項式であらわされることを示す。さらに、有理ベジエ曲線を定義し、2次曲線（円や双曲線など）や高次の代数曲線が有理ベジエ曲線としてあらわされることをみよう。

1.1 ベジエ曲線とは

まず線分の内分点を繰り返しとることにより放物線が得られることをみよう。

平面 \mathbb{R}^2 上の3点 b_0, b_1, b_2 をとる。0 と 1 の間の実数 t に対して、2点 b_0 と b_1 とを $t : 1-t$ に内分する点を $b_0^1(t)$ とし、2点 b_1 と b_2 とを $t : 1-t$ に内分する点を $b_1^1(t)$ とする。さらに、2点 $b_0^1(t)$ と $b_1^1(t)$ とを $t : 1-t$ に内分する点を $b_0^2(t)$ とする。このとき、 t を変化させると $b_0^2(t)$ は放物線を表わす（図 1 を参照）。また、 t が 0 から 1 の間を動くとき、点 $b_0^2(t)$ は 3点 b_0, b_1, b_2 が作る三角形の内部にあり、 $b_0^2(0) = b_0, b_0^2(1) = b_2$ となる。また、得られた放物線は、点 b_0 で2点 b_0 と b_1 とを結ぶ直線に接し、 b_2 で2点 b_1 と b_2 とを結ぶ直線に接する。

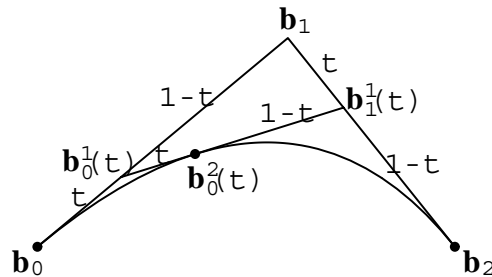


図 1

実際、式であらわすと、

$$b_0^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1$$

$$\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t)$$

となり，上の2つの式を第3式に代入すると

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2$$

を得る．

これが，放物線をあらわすことを，簡単な例でみておく．

例 1. $\mathbf{b}_0 = (-1, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (0, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1)$ のとき， $\mathbf{b}_0^2(t) = (2t-1, (2t-1)^2)$ となり， t を消去して，放物線 $y = x^2$ を得る (図 2 左)

例 2. $\mathbf{b}_0 = (5, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (6, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (6, 1)$ のとき， $\mathbf{b}_0^2(t) = (5+2t-t^2, 2-t^2)$ となり，図 2 右の放物線を得る．

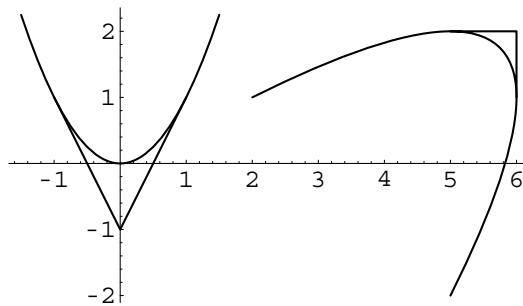


図 2

次に，平面 \mathbf{R}^2 の4点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ に対して，同様の操作をくりかえす．0 と 1 の間の実数 t に対して，2点 \mathbf{b}_0 と \mathbf{b}_1 とを $t : 1-t$ に内分する点を $\mathbf{b}_0^1(t)$ ，2点 \mathbf{b}_1 と \mathbf{b}_2 とを $t : 1-t$ に内分する点を $\mathbf{b}_1^1(t)$ ，2点 \mathbf{b}_2 と \mathbf{b}_3 とを $t : 1-t$ に内分する点を $\mathbf{b}_2^1(t)$ とする．2点 $\mathbf{b}_0^1(t)$ と $\mathbf{b}_1^1(t)$ とを $t : 1-t$ に内分する点を $\mathbf{b}_0^2(t)$ とし，2点 $\mathbf{b}_1^1(t)$ と $\mathbf{b}_2^1(t)$ とを $t : 1-t$ に内分する点を $\mathbf{b}_1^2(t)$ とする．さらに，2点 $\mathbf{b}_0^2(t)$ と $\mathbf{b}_1^2(t)$ とを $t : 1-t$ に内分する点を $\mathbf{b}_0^3(t)$ とする． t を変化させて得られる曲線 $\mathbf{b}_0^3(t)$ を4点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ から得られるベジエ曲線という．

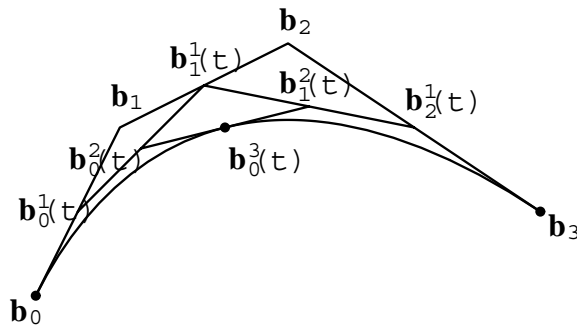


図 3

式であらわすと ,

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_2^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t) \quad \mathbf{b}_1^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_1^1(t) + t\mathbf{b}_2^1(t)$$

$$\mathbf{b}_0^3(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^2(t) + t\mathbf{b}_1^2(t)$$

となり , 代入をくりかえすことにより

$$\mathbf{b}_0^3(t) = (1-t)^3\mathbf{b}_0 + 3(1-t)^2t\mathbf{b}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{b}_2 + t^3\mathbf{b}_3$$

を得る .

例 3. $\mathbf{b}_0 = (-1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (4, 1)$ のとき ,

$\mathbf{b}_0^3(t) = (-1 + 9t^2 - 4t^3, 6t - 3t^2 - 2t^3)$ となる . 図 4 は 4 点 \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{b}_3 を順に結んで得られる折れ線とこれらの点から得られるベジエ曲線の様子をあらわす .

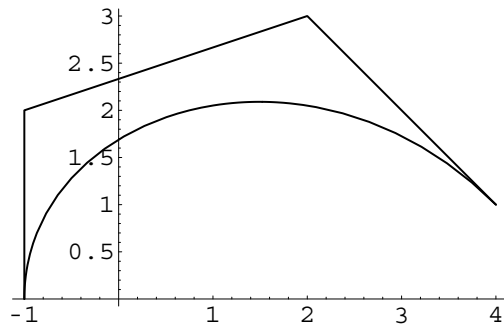


図 4

例 4. $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (4, 1)$ のとき ,
 $\mathbf{b}_0^3(t) = (3t - 3t^2 + 3t^3, 3t - 6t^2 + 4t^3)$ となる . 図 5 は 4 点 \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{b}_3 を順に結んで得られる折れ線とこれらの点から得られるベジエ曲線の様子をあらわす .

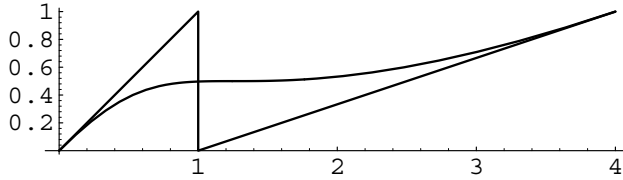


図 5

1.2 ド・カステリヨのアルゴリズム

$n + 1$ 個の点を与えるとき , これらの点から定まるベジエ曲線をド・カステリヨのアルゴリズムにより定義しよう . 前述の曲線の構成法はこのアルゴリズムにおいて $n = 2, 3$ の場合に相当する .

ド・カステリヨのアルゴリズム

空間 \mathbf{R}^3 の $n + 1$ 個の点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ と実数 $t \in \mathbf{R}$ に対して ,

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1 - t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) \quad (1)$$

$$(r = 1, \dots, n, i = 0, 1, \dots, n - r)$$

とおく . ただし , $\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$ とする .

曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ を点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ から定まるベジエ曲線と呼ぶ . ベジエ曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ を $\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n, t]$ であらわすこともある . 点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ で作られる多角形 P をベジエ多角形あるいは制御多角形と呼ぶ . また , 多角形 P の頂点 \mathbf{b}_i を制御点あるいはベジエ制御点と呼ぶ .

例 5. $\mathbf{b}_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1/3, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (2/3, 1/3, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 1)$ のとき ,

$$\mathbf{b}_0^3(t) = (t, t^2, t^3) \text{ となる (図 6) .}$$

例 6. $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (-3, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 1)$, $\mathbf{b}_4 = (-1, 3)$, $\mathbf{b}_5 = (-3, 3)$ のとき ,

$\mathbf{b}_0^5(t) = (-15t + 30t^2 - 10t^3 - 15t^4 + 7t^5, 10t^2 - 20t^3 + 25t^4 - 12t^5)$
 となる (図 7).

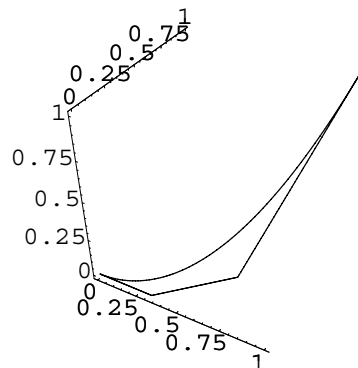


図 6

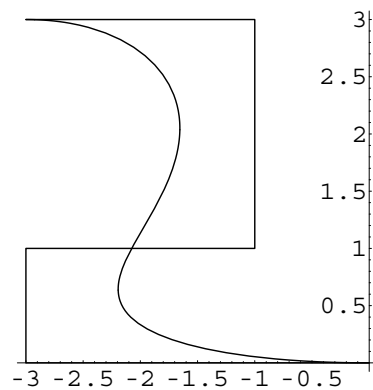


図 7

1.3 重心結合とアフィン写像

ベジエ曲線と制御多角形の関係,あるいは,平行移動,拡大や縮小,回転移動などにより,ベジエ曲線はどのように変化するかなどを調べるために,線形代数からの準備をする.

3次元空間 \mathbb{R}^3 内の $n+1$ 個の点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ を考える.

$$\mathbf{b} = \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j, \quad \sum_{j=0}^n c_j = 1$$

と表わされるとき， \mathbf{b} を $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ の重心結合という．例えば3点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ の作る3角形の重心 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2$ は，重心結合の一例である．

また，集合 $P = \left\{ \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j \mid \sum_{j=0}^n c_j = 1, 0 \leq c_j \leq 1 \right\}$ を $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ で生成される多角形または凸包とよぶ．

例 1. 2点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ のとき， P は線分である．

例 2. 3点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ のとき， P は三角形の内部と境界である．

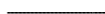


図 8

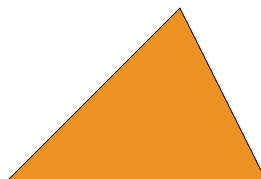


図 9

例 3. 4点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ のとき，一般には P は四面体の内部と境界である．

例 4. 4点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ が同一平面上にあるとき， P は四辺形の内部と境界である．

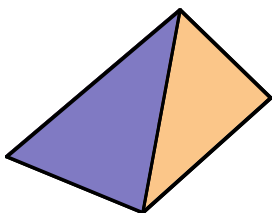


図 10

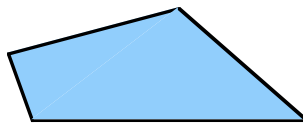


図 11

ベジエ曲線とその制御多角形との関係を見よう．

ベジエ曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ は $t \in [0, 1]$ のとき，制御多角形内にある．これをベジエ曲線の凸包性という．

このことは次のようにしてわかる．ド・カステリヨのアルゴリズム (1) において， $\mathbf{b}_i^r(t)$ が1つ前の段階である $\mathbf{b}_i^{r-1}(t)$ と $\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t)$ とを $t : 1-t$ に内分する点として得られ，これを繰り返すことにより $\mathbf{b}_i^r(t)$ は得られる．従って， $\mathbf{b}_i^r(t)$ は $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ から生成される制御多角形内にある．特

に、ベジエ曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ は制御多角形内にあることがわかる。また、ベジエ曲線は $\mathbf{b}_0^n(0) = \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^n(1) = \mathbf{b}_n$ をみたす。

特に、制御多角形が平面上にあるとき、ベジエ曲線は平面上の曲線を生成することがわかる。

次に、平行移動、拡大や縮小、回転移動などにより、ベジエ曲線の形は変わらないことをみよう。まず、平行移動、拡大や縮小、回転移動を含む写像について考える。

写像 $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ は、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ と実数 c に対して $F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$ および $F(c\mathbf{x}) = cF(\mathbf{x})$ が成り立つとき、線形写像であるという。行列 A に対して、 $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ とおくと、 $F(\mathbf{x})$ は線形写像となる。

線形写像 $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ と $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^\ell$ により $\Phi(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$ と表わされる写像 $\Phi: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ を、アフィン写像という。

アフィン写像 $\Phi: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ に対しては、次が成り立つ。

$n + 1$ 個の点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ の重心結合を \mathbf{b} とすると、 $\Phi(\mathbf{b})$ は $\Phi(\mathbf{b}_0), \Phi(\mathbf{b}_1), \dots, \Phi(\mathbf{b}_n)$ の重心結合となる。この性質をアフィン写像は、重心結合に対して不変であるとよぶ。すなわち、

$$\mathbf{b} = \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j, \quad \sum_{j=0}^n c_j = 1$$

に対して

$$\Phi(\mathbf{b}) = \sum_{j=0}^n c_j \Phi(\mathbf{b}_j), \quad \sum_{j=0}^n c_j = 1$$

となる。実際、 $\mathbf{b} = \sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j, \quad \sum_{j=0}^n c_j = 1$ とすると、

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{b}) &= \Phi\left(\sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j\right) = F\left(\sum_{j=0}^n c_j \mathbf{b}_j\right) + \mathbf{v} = \sum_{j=0}^n c_j F(\mathbf{b}_j) + 1\mathbf{v} \\ &= \sum_{j=0}^n c_j F(\mathbf{b}_j) + \left(\sum_{j=0}^n c_j\right)\mathbf{v} = \sum_{j=0}^n c_j (F(\mathbf{b}_j) + \mathbf{v}) = \sum_{j=0}^n c_j \Phi(\mathbf{b}_j) \end{aligned}$$

アフィン写像の例としては次のようなものがある。

1) 平行移動 $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$ のとき、 \mathbf{v} による平行移動という。(図 12)

2) 拡大と縮小 $v = 0$ で $\Phi(x) = kx$ のとき, $k > 1$ のとき拡大, $0 < k < 1$ のとき縮小という. (図 13)

3) 回転移動 $v = 0$ で F が直交変換のとき回転移動という. (図 14)

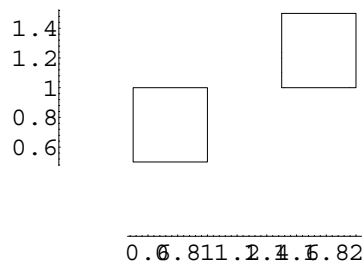


図 12

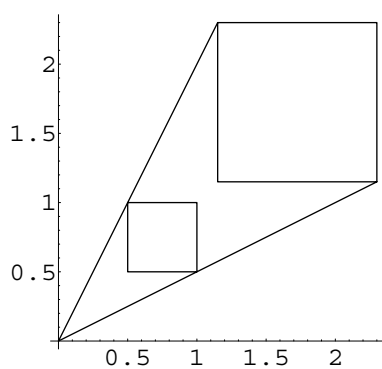


図 13

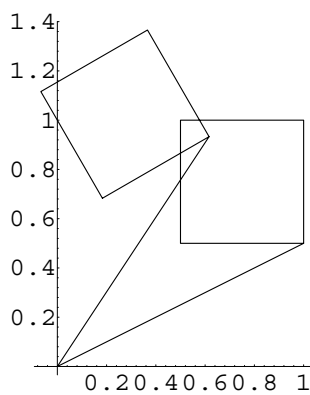


図 14

4) 線形補間 a, b を \mathbb{R}^n の 2 点とする. \mathbb{R} から \mathbb{R}^n への写像

$$x(t) = (1 - t)a + tb$$

を点 a, b の線形補間といい, これら点の集合を a, b を通る直線という. $t \in (0, 1)$ に対し点 $x(t)$ は点 a, b の間を $t : 1 - t$ に内分する. また,

$x(t)$ は a, b の重心結合とみなせるから，線形補間はアフィン写像に対して不変である．すなわち，アフィン写像 Φ に対し

$$\Phi(x(t)) = (1-t)\Phi(a) + t\Phi(b)$$

が成り立つ．

ベジエ曲線の性質

ド・カステリヨのアルゴリズムから次のベジエ曲線の重要な性質が得られる．

a) アフィン不変性

ベジエ曲線は，アフィン写像に対して不変である．つまり，次の2つの操作で得られる結果は同じである．

1) 与えられた制御点をもつベジエ曲線 $b_n(t)$ を計算してからそれにアフィン写像を作用する．

2) 制御点にアフィン写像を作用してから，対応する制御点のベジエ曲線を計算する．

すなわち， b_0, b_1, \dots, b_n を制御点， $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ をアフィン写像とすると，1. 2 節の記号をもちいて，次が成り立つ．

$$\Phi(\mathcal{B}[b_0, b_1, \dots, b_n, t]) = \mathcal{B}[\Phi(b_0), \Phi(b_1), \dots, \Phi(b_n), t]$$

このことは，上で注意したように，線形補間はアフィン写像に対して不変で，ベジエ曲線は，ド・カステリヨのアルゴリズムにより，線形補間の繰り返しで構成されていることからわかる．

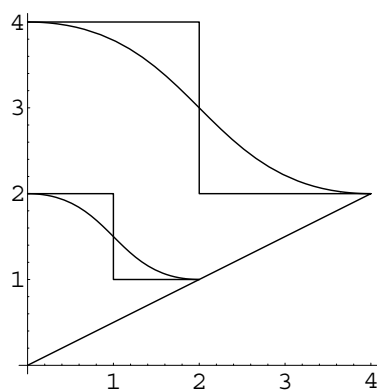


図 15

1.4 ベジエ曲線のベルンシュタイン表現

ベルンシュタイン多項式

ベジエ曲線をベルンシュタイン多項式を用いて表わすことを考える．まず， n 次のベルンシュタイン多項式 $B_i^n(t)$ は次で定義される t の多項式である．

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

図16a, 図16b は 3 次, および 4 次のベルンシュタイン多項式のグラフを示している．

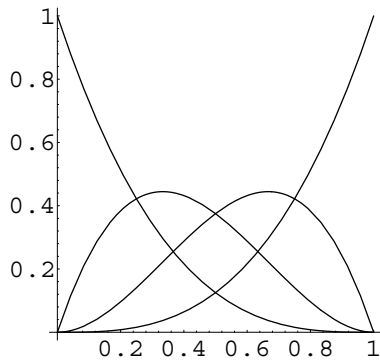


図 16a

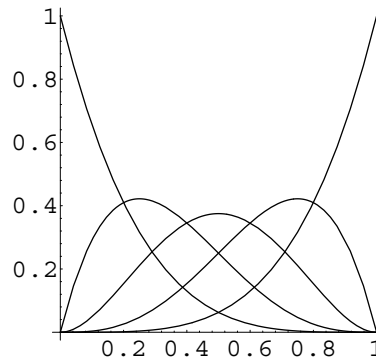


図 16b

$B_i^n(t)$ は次の漸化式をみたす．

$$B_i^n(t) = (1-t)B_{i-1}^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad (2)$$

ただし， $B_0^0(t) = 1$ ， $B_j^n(t) = 0$ ($j \notin \{0, 1, \dots, n\}$) とする．

(2) の証明．

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t)B_{i-1}^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \end{aligned}$$

また， $B_i^n(t)$ は次をみたす．

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1 \quad (3)$$

(3) の証明 .

$$1 = (t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

さて , ベジエ曲線をベルンシュタイン多項式を用いて表す . ド・カステリヨのアルゴリズムにおける中間点 \mathbf{b}_i^r は , r 次のベルンシュタイン多項式を用いて ,

$$\mathbf{b}_i^r = \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_{i+j} B_j^r(t) \quad (r = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots, n - r) \quad (4)$$

と表せる . 特に , $r = n$ のとき , ベジエ曲線のベルンシュタイン多項式による表現

$$\mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) \quad (5)$$

を得る . これを , ベジエ曲線のベルンシュタイン表現とよぶ .

(4) の証明 r に関する数学的帰納法により示す . ド・カステリヨのアルゴリズムの式 (1) より

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^r &= (1 - t)\mathbf{b}_i^{r-1} + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1} \\ &= (1 - t) \sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{b}_{i+j} B_j^{r-1}(t) + t \sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{b}_{i+j+1} B_j^{r-1}(t) \end{aligned}$$

添字をとりかえて , 次を得る .

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^r &= (1 - t) \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i-1}^{r-1}(t) \\ &= \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j \left((1 - t) B_{j-i}^{r-1}(t) + t B_{j-i-1}^{r-1}(t) \right) \end{aligned}$$

したがって (2) により , 求める結果を得る .

例 4. 1.1 節の例 3 で考えた曲線の場合 $n = 3$ で $\mathbf{b}_0 = (-1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (4, 1)$ に対応しているので ,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^3(t) &= (-1, 0)B_0^3(t) + (-1, 2)B_1^3(t) + (2, 3)B_2^3(t) + (4, 1)B_3^3(t) \\ &= (-1 + 9t^2 - 4t^3, 6t - 3t^2 - 2t^3) \end{aligned}$$

となる .

例 5. \mathbf{R}^3 における例を考える . $n = 3$, $\mathbf{b}_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 0)$, のとき ,

$$\mathbf{b}_0^3(t) = (6t^2 - 8t^3 + 3t^4, 4t^3 - 3t^4, 4t - 12t^2 + 12t^3 - 3t^4)$$

となる . 図 17 は 4 点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を順に結んで得られる折れ線とこれらの点から得られるベジエ曲線の様子をあらわす .

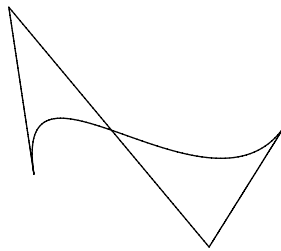


図 17

ベジエ曲線の性質

ベジエ曲線の性質について , 次のいくつかはすでに幾何学的に示したが , ここでは代数的な証明を考えよう .

a) アフィン不変性

ベジエ曲線のベルンシュタイン多項式による表現

$$\mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t)$$

は , 性質 (3) より $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ の重心結合とみなせる . 従って , アフィン写像で不変である .

b) 凸包性

曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ は $t \in [0, 1]$ のとき , 制御多角形の凸包内にある . これは , ベルンシュタイン多項式 $B_j^n(t)$ は非負であり , その和は 1 であることからわかる .

c) 端点一致

ベジエ曲線は $\mathbf{b}_0^n(0) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_0^n(1) = \mathbf{b}_n$ を通る。これは、ベルンシュタイン多項式において、 $B_j^n(0) = 1$ となるのは、 $j = 0$ のときのみ、 $B_j^n(1) = 1$ となるのは、 $j = n$ のときのみからわかる。

d) 対称性

ベジエ制御点を $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ あるいは $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_0$ とするとき、2つの曲線は向きをのぞいて、同じである。すなわち、

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n-j} B_j^n(1-t)$$

が成り立つ。これは、ベルンシュタイン多項式の性質 $B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t)$ からわかる。

e) 直線再現性

$$t = \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t)$$

が成り立つ。実際、

$$t = 1 \cdot t = [(1-t) + t]^{n-1} t = \left(\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} (1-t)^{n-1-r} t^r \right) t$$

となる。ここで、

$$\binom{n-1}{i-1} = \frac{i}{n} \binom{n}{i}$$

に注意して、 $i = r + 1$ と添字をとりかえると、上式は

$$t = \left(\sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^{i-1} \right) t = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} B_i^n(t)$$

となり、求める式を得る。

この式は次のように応用できる。制御点 \mathbf{b}_j が2点 \mathbf{p} と \mathbf{q} をを結ぶ直線上に等間隔に配置されていたとする。

$$\mathbf{b}_j = \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{p} + \frac{j}{n} \mathbf{q} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

このとき、 \mathbf{b}_j ($j = 0, 1, \dots, n$) から作られる曲線は2点 \mathbf{p} と \mathbf{q} をを結ぶ直線となり、もとの直線が再現される。

ベジエ曲線の導関数

ベルンシュタイン多項式 $B_j^n(t)$ の導関数は次をみます .

$$\frac{d}{dt}B_j^n(t) = n(B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t))$$

よって , ベジエ曲線 $\mathbf{b}_0^n(t)$ の導関数は ,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}_0^n(t) = n \sum_{j=0}^n (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t))\mathbf{b}_j$$

となり , したがって

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}_0^n(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j)B_j^{n-1}(t)$$

となる . ここで , 前進差分演算子 $\Delta\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j$ を導入すると ,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}_0^n(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta\mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t)$$

と書ける . 特に , $t = 0$ における接線の勾配は , $\Delta\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ で与えられる . 同様に , $t = 1$ における接線の勾配は , $\Delta\mathbf{b}_{n-1} = \mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}$ で与えられる .

例 6. 1.1 節の例 3 で考えた曲線の場合 $n = 3$ で $\mathbf{b}_0 = (-1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (4, 1)$ であるから , $\mathbf{b}_0^3(t) = (-1 + 9t^2 - 4t^3, 6t - 3t^2 - 2t^3)$ また , $\Delta\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0 = (0, 2)$, $\Delta\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 = (3, 1)$, $\Delta\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 = (2, -2)$ より ,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}_0^3(t) = 3 \sum_{j=0}^2 \Delta\mathbf{b}_j B_j^2(t) = 3(2(3-2t)t, 2(1-t-t^2))$$

となる . 図 18 は曲線 $\mathbf{b}_0^3(t)$, $\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\mathbf{b}_0^3(t)$ の様子を表す .

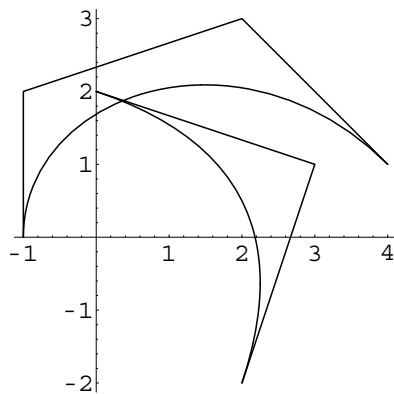


図 18

1.5 有理ベジエ曲線

円錐曲線

3個の点から定まるベジエ曲線は放物線であるが，円，楕円および双曲線など重要な円錐曲線はどのように構成すればよいのであろうか．これは重みをつけるという考え方で解決することができる．まず円錐曲線から始めよう．

円錐曲線の定義には，いろいろなものがあるが，われわれは次の定義を採用する．2次元平面 \mathbf{R}^2 上の円錐曲線は3次元空間 \mathbf{R}^3 の放物線を平面に射影したものである．座標系を一つ固定するとき，射影の中心を原点 O として，射影する平面として平面 $z = 1$ を用いる．この平面と2次元平面 \mathbf{R}^2 とを同一視する．すなわち，射影は次の式で表現される．

$$(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right)$$

2次元平面の点 (a, b) は直線 (ta, tb, t) 上の点を射影して得られることを注意しておく．

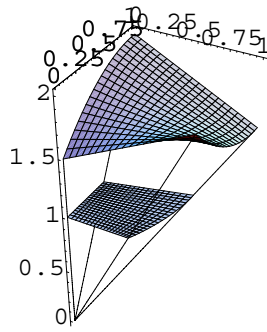


図 19

座標系をうまくとることにより，円錐曲線 $c(t)$ は正の実数 w_0, w_1, w_2 と点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2$ により次の式で表わされる．

$$\mathbf{c}(t) = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^2(t) + w_1 \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + w_2 \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}$$

$\mathbf{c}(t)$ を円錐曲線の有理表現といい， w_0, w_1, w_2 を制御点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ における重みという．

実際，これはつぎのようにしてわかる． \mathbb{R}^3 の放物線 $\mathbf{p}(t)$ は 3 点 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ から定まるベジエ曲線であるから，

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \mathbf{p}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t)$$

で与えられる． \mathbb{R}^3 の座標系を $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の z -成分が正となるように選ぶ．放物線 $\mathbf{p}(t)$ と円錐曲線 $\mathbf{c}(t)$ との関係は $\mathbf{p}(t) = (w(t)\mathbf{c}(t), w(t))$ で与えられる． $i = 0, 1, 2$ に対して，点 \mathbf{p}_i の z -成分を w_i とすると， $w_i > 0$ で $w(t) = w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)$ となる． $\mathbf{p}(t)$ の (x, y) -成分を $\mathbf{a}_0 B_0^2(t) + \mathbf{a}_1 B_1^2(t) + \mathbf{a}_2 B_2^2(t)$ で表わすと， $w(t)\mathbf{c}(t) = \mathbf{a}_0 B_0^2(t) + \mathbf{a}_1 B_1^2(t) + \mathbf{a}_2 B_2^2(t)$ となる． $\mathbf{b}_i = \frac{1}{w_i} \mathbf{a}_i$ とおくと， $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ はそれぞれ $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を射影して得られる点となっており，

$$\mathbf{c}(t) = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^2(t) + w_1 \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + w_2 \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}$$

となる．

例 1. 3点 $\mathbf{p}_0 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{p}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{p}_2 = (0, 2, 2)$ で定まる 2 次ベジエ曲線 (放物線) を $\mathbf{p}(t)$ とすると, $\mathbf{p}(t) = (1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$ となり, 円錐曲線 $\mathbf{c}(t)$ は

$$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

で与えられる. $\mathbf{c}(t)$ は $(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円弧である. このとき, 平面上の対応する制御点は $\mathbf{b}_0 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1)$ でそれぞれの点における重みは $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ となる.

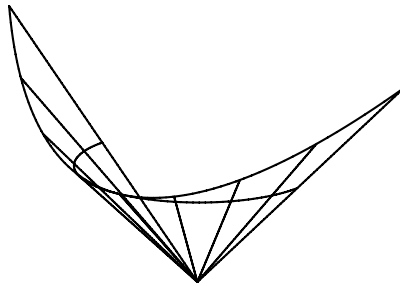


図 20

例 2. 3点 $\mathbf{p}_0 = (3, -2\sqrt{2}, 1)$, $\mathbf{p}_1 = (1, 0, 3)$, $\mathbf{p}_2 = (3, 2\sqrt{2}, 1)$ で定まる 2 次ベジエ曲線 (放物線) を $\mathbf{p}(t)$ とすると, $\mathbf{p}(t) = (3 - 4t + 4t^2, 2\sqrt{2}(-1 + 2t), 1 + 4t - 4t^2)$ となり, 円錐曲線 $\mathbf{c}(t)$ は

$$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{3 - 4t + 4t^2}{1 + 4t - 4t^2}, \frac{2\sqrt{2}(-1 + 2t)}{1 + 4t - 4t^2} \right)$$

で与えられる. $\mathbf{c}(t)$ は方程式 $x^2 - y^2 = 1$ をみたす双曲線である. このとき, 平面上の対応する制御点は $\mathbf{b}_0 = (3, -2\sqrt{2})$, $\mathbf{b}_1 = (\frac{1}{3}, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 2\sqrt{2})$ でそれぞれの点における重みは $w_0 = 1$, $w_1 = 3$, $w_2 = 1$ となる.

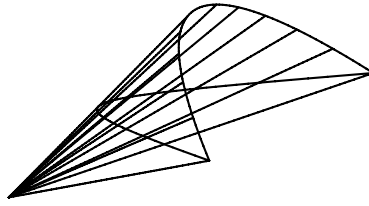


図 21

例 3. 円は 3 つの有理ベジエ曲線によって表現できる．平面上の制御点を $\mathbf{b}_0 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (0, \sqrt{3})$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 0)$ とし, それぞれの重みを $w_0 = 1$, $w_1 = 1/2$, $w_2 = 1$ とすると, これから定まる有理ベジエ曲線は円の 3 分の 1 となる．同様に, $\mathbf{b}_0 = (-1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (-2, -\sqrt{3})$, $\mathbf{b}_2 = (0, -\sqrt{3})$ とし, それぞれの重みを $w_0 = 1$, $w_1 = 1/2$, $w_2 = 1$ とすると, これから定まる有理ベジエ曲線は円の 3 分の 1 となる． $\mathbf{b}_0 = (0, -\sqrt{3})$, $\mathbf{b}_1 = (2, -\sqrt{3})$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0)$ とし, それぞれの重みを $w_0 = 1$, $w_1 = 1/2$, $w_2 = 1$ とすると, これから定まる有理ベジエ曲線は円の 3 分の 1 となる．これらをあわせると円が得られる (図 22)．

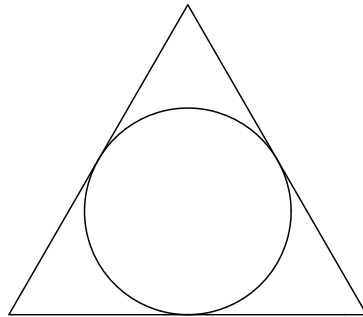


図 22

例 4. 重みによる曲線の分類

平面上に 3 つの制御点を与え, 重みを変化させるとだ円, 放物線, 双曲線が得られる．図 23 は重みを変えて得られる曲線の様子をあらわしている．

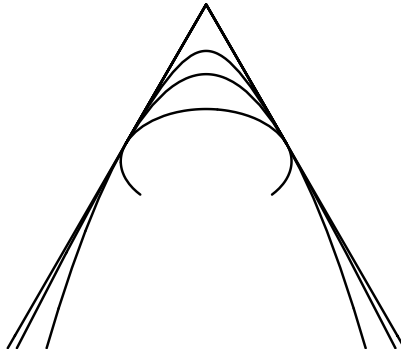


図 23

有理ベジエ曲線

平面 \mathbf{R}^2 上の円錐曲線は 3 次元空間 \mathbf{R}^3 の放物線を平面に射影したものであるとして得られた。これを一般化して 3 次元空間 \mathbf{R}^3 の有理ベジエ曲線を定義しよう。4 次元空間 \mathbf{R}^4 の座標系 (x, y, z, w) を一つ固定するとき，射影の中心を原点 O として，射影する超平面として超平面 $w = 1$ を用いる。この超平面と 3 次元空間 \mathbf{R}^3 とを同一視する。すなわち，射影は次の式で表現される。

$$(x, y, z, w) \rightarrow \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, 1 \right)$$

3 次元空間の点 (a, b, c) は 4 次元空間の直線 (ta, tb, tc, t) 上の点を射影して得られることを注意しておく。

円錐曲線の場合と同様に，空間 \mathbf{R}^3 の $n + 1$ 個の点 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ と正の実数 w_0, \dots, w_n に対して，有理ベジエ曲線 $\mathbf{c}(t)$ を

$$\mathbf{c}(t) = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \dots + w_n \mathbf{b}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)}$$

で定義する。 w_i を重み， \mathbf{b}_i ($i = 0, 1, \dots, n$) で生成される多角形を制御多角形とよぶ。 $\mathbf{c}(t)$ は 4 次元空間のベジエ曲線 $\mathbf{x}(t) = (w_0 \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \dots + w_n \mathbf{b}_n B_n^n(t), w_0 B_0^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t))$ を 3 次元空間 \mathbf{R}^3 に射影して得られる。

すべての重みが等しいならば，有理ベジエ曲線 $\mathbf{c}(t)$ はベジエ曲線となる。また，有理ベジエ曲線はベジエ曲線と同様の性質をもつ。例えば，ア

フィン不変性は

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}$$

と書くことにより, \mathbf{b}_i の係数の和が 1 となることからわかる. また, 凸包性, 端点一致, 対称性などもなりたつ.

有理ベジエ曲線のいくつかの例を考える.

例 1. デカルトの葉線は $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で定義される曲線であるが, これは, 次のような制御点と重みによる有理ベジエ曲線として表現できる. $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1)$, $\mathbf{b}_3 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ とし, それぞれの重みを $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$ とすると, $\mathbf{c}(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$ となる.

$x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ において, パラメータ t を消去すると, $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ となる.

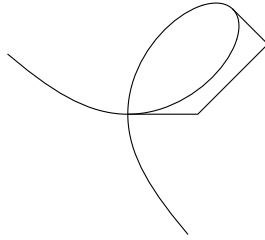


図 24

例 2. アストロイドは $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ で定義される曲線であるが, これは, 次のような制御点と重みによる有理ベジエ曲線として表現できる. $\mathbf{b}_0 = (0, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (0, 1)$, $\mathbf{b}_2 = \left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{b}_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\mathbf{b}_4 = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $\mathbf{b}_5 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_6 = (1, 0)$ とし, それぞれの重みを $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{6}{5}$, $w_3 = \frac{8}{5}$, $w_4 = \frac{12}{5}$, $w_5 = 4$, $w_6 = 8$ とすると,

$$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}, \frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}\right)$$

となる． $x = \frac{8t^3}{(1+t^2)^3}$, $y = \frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}$ において，パラメータ t を消去すると，

$$x^6 + y^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - 3x^4 - 3y^4 + 21x^2y^2 + 3x^2 + 3y^2 - 1 = 0$$

あるいは，

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

となる．

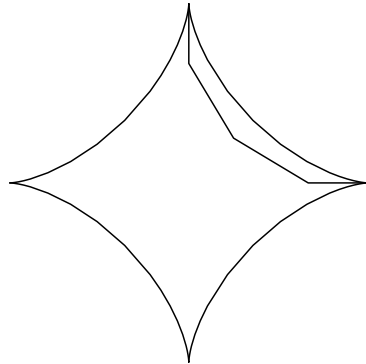


図 25

2 ベジエ曲面

ベジエ曲線は線分をもとに考えたが，曲面の場合は四辺形を基本において考える．これは，次のような開発上の理由による．初期の開発がほとんど自動車工業で展開され，曲面の自動車ボディ設計への応用は，屋根，ドア，フードなどの外板に対するものであった．これらの部品は基本的には四辺形に近い形状であり，それらをより小さな四辺形に分割するのは自然な考え方であった．一方，重心座標の考え方を重視すると，三角形を基本において曲面を考えることもできる．実際，ド・カステリヨ およびベジエ により「ベジエ三角形」の理論も考案され，その後，これらの理論も発展している．これについては，Farin 著『CAGD のための曲線・曲面理論』18章を参照されたい．

2.1 テンソル積ベジエ曲面

双一次補間

線形補間は2つの点を曲線でつなぐ最も簡単な方法であるが，双一次補間は4つの点から曲面を作る最も単純な方法の一つといえる．

$\mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}_{0,1}$, $\mathbf{b}_{1,0}$, $\mathbf{b}_{1,1}$ を \mathbb{R}^3 内の4つの異なる点とする． $u, v \in \mathbb{R}$ に対して， \mathbb{R}^3 の点

$$\mathbf{x}(u, v) = (1-u)(1-v)\mathbf{b}_{0,0} + (1-u)v\mathbf{b}_{0,1} + u(1-v)\mathbf{b}_{1,0} + uv\mathbf{b}_{1,1}$$

を対応させる写像を双一次補間といい，これら点の集合を $\mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}_{0,1}$, $\mathbf{b}_{1,0}$, $\mathbf{b}_{1,1}$ を通る双曲放物面という．

4点を $\mathbf{b}_{0,0} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{0,1} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_{1,0} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{1,1} = (1, 1, 1)$ とするとき， $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, uv)$ となり，曲面は $z = xy$ で与えられる．この曲面は xy 平面と平行な平面で切ると，得られる曲線は双曲線になり， z 軸を含む平面で切ると得られる曲線は放物線になる．

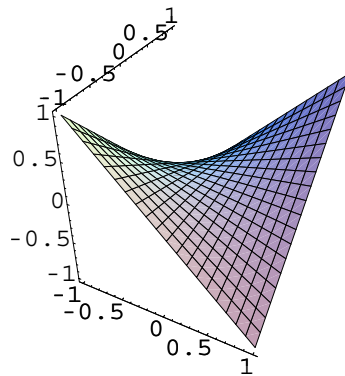


図 26

双一次補間 $\mathbf{x}(u, v)$ は2段階に分けて考えることができる．まず次の式によって中間点を計算する．

$$\mathbf{b}_{0,0}^{(0,1)} = (1-v)\mathbf{b}_{0,0} + v\mathbf{b}_{0,1}$$

$$\mathbf{b}_{1,0}^{(1,1)} = (1-v)\mathbf{b}_{1,0} + v\mathbf{b}_{1,1}$$

次に $\mathbf{b}_{0,0}^{(0,1)}$ と $\mathbf{b}_{1,0}^{(1,1)}$ とを線形補間すると，

$$(1-u)\mathbf{b}_{0,0}^{(0,1)} + u\mathbf{b}_{1,0}^{(1,1)}$$

となり，曲面 $\mathbf{x}(u, v) = (1-u)(1-v)\mathbf{b}_{0,0} + (1-u)v\mathbf{b}_{0,1} + u(1-v)\mathbf{b}_{1,0} + uv\mathbf{b}_{1,1}$ を得る．

テンソル積ベジエ曲面

曲面は形を変えながら空間内を移動する曲線の軌跡と考えて，ベジエ曲線を用いることにより，双一次補間の場合と同様にして，テンソル積ベジエ曲面が定義できる．

最初に移動する曲線を m 次のベジエ曲線とすると次のように表わされる．

$$\mathbf{b}^m = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i B_i^m(u)$$

各 \mathbf{b}_i が n 次のベジエ曲線上を移動すると，

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v)$$

となる．これら 2 つの式をあわせて次の式で定義される曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ が得られる．

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ を $(m+1)(n+1)$ の制御点 $\mathbf{b}_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) から構成されるテンソル積ベジエ曲面またはベジエ曲面という．

曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ の $v = v_0$ である等パラメータ曲線は u についての m 次のベジエ曲線であり，その $m+1$ 個のベジエ制御点は

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_j^n(v_0) \quad (i = 0, 1, \dots, m)$$

で与えられる．

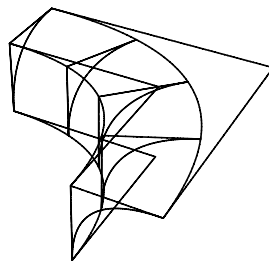


図 27

テンソル積ベジエ曲面の性質

a) アフィン不変性

曲面上の点 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ は $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) = 1$ より $\mathbf{b}_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) の重心結合とみなせる．従って，アフィン写像で不変である．

b) 凸包性

曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ は $u, v \in [0, 1]$ に対して制御多角形の凸包内にある．これは，多項式 $B_i^m(u) B_j^n(v)$ は非負であり，その和は 1 であることからわかる．

c) 境界曲線

曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ の境界曲線は u あるいは v のベジエ曲線である．特に，曲面 $\mathbf{b}^{m,n}(u, v)$ は 4 点 $\mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{b}_{0,n}$, $\mathbf{b}_{m,n}$ を通る．

例 1. $m = 2, n = 2$ で，9 点を $\mathbf{b}_{0,0} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{0,1} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{0,2} = (2, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{1,0} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_{1,1} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_{1,2} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b}_{2,0} = (0, 2, 0)$, $\mathbf{b}_{2,1} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b}_{2,2} = (2, 2, 0)$ とすると，ベジエ曲面は図 28 のようになる．

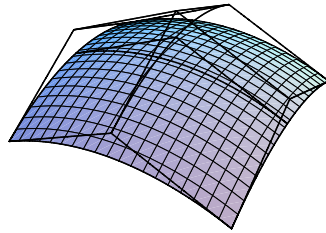


図 28

例 2. $m = 2, n = 2$ で，9 点を $\mathbf{b}_{0,0} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_{0,1} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{0,2} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{1,0} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_{1,1} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_{1,2} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{2,0} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_{2,1} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_{2,2} = (0, 0, 1)$ とすると，ベジエ曲面は図 29 のようになる．

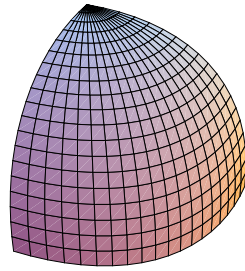


図 29

2.2 有理ベジエ曲面

有理ベジエ曲線と同様にテンソル積ベジエ曲面を有理表現に拡張する．すなわち，4次元空間内のテンソル積ベジエ曲面の射影として3次元空間内の有理ベジエ曲面が定義できる． $(m+1)(n+1)$ 個の点 $\mathbf{b}_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) と正の数 $w_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) を与えるとき，有理ベジエ曲面 $\mathbf{x}(u, v)$ は次の式で定義される．

$$\mathbf{x}^{m,n}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}$$

有理ベジエ曲面はテンソル積ベジエ曲面と同様の性質，すなわち，

a) アフィン不変性

曲面上の点 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ は $\mathbf{b}_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$) の重心結合とみなせる．従って，アフィン写像で不変である．

b) 凸包性

曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ は $u, v \in [0, 1]$ に対して制御多角形の凸包内にある．これは，多項式 $B_i^m(u) B_j^n(v)$ は非負であり， $w_{i,j} > 0$ であることからわかる．

c) 境界曲線

曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ の境界曲線は u あるいは v の有理ベジエ曲線である．特に，曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ は4点 $\mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}_{m,0}$, $\mathbf{b}_{0,n}$, $\mathbf{b}_{m,n}$ を通る．

例 1. $m = 2, n = 2$ で , 9 点とその重みを $\mathbf{b}_{0,0} = (1, 0, 0)$,
 $\mathbf{b}_{0,1} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{0,2} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{1,0} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_{1,1} = (1, 1, 1)$,
 $\mathbf{b}_{1,2} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{2,0} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_{2,1} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_{2,2} = (0, 0, 1)$,
 $w_{0,0} = 1, w_{0,1} = 1, w_{0,2} = 2, w_{1,0} = 1, w_{1,1} = 1, w_{1,2} = 2, w_{2,0} = 2,$
 $w_{2,1} = 2, w_{2,2} = 4$ とすると , 有理ベジエ曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ ($-1 \leq u \leq 1,$
 $-1 \leq v \leq 1$) は図 30 のような半球面になる .

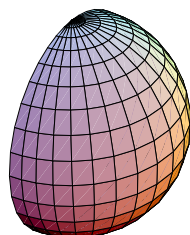


図 30

例 2. $m = 2, n = 2$ で , 9 点とその重みを $\mathbf{b}_{0,0} = (8, 0, 0)$,
 $\mathbf{b}_{0,1} = (8, 0, 2)$, $\mathbf{b}_{0,2} = (6, 0, 2)$, $\mathbf{b}_{1,0} = (8, 8, 0)$, $\mathbf{b}_{1,1} = (8, 8, 2)$,
 $\mathbf{b}_{1,2} = (6, 6, 2)$, $\mathbf{b}_{2,0} = (0, 8, 0)$, $\mathbf{b}_{2,1} = (0, 8, 2)$, $\mathbf{b}_{2,2} = (0, 6, 2)$,
 $w_{0,0} = 1, w_{0,1} = 1, w_{0,2} = 2, w_{1,0} = 1, w_{1,1} = 1, w_{1,2} = 2, w_{2,0} = 2,$
 $w_{2,1} = 2, w_{2,2} = 4$ とすると , 有理ベジエ曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ ($-1 \leq u \leq 1,$
 $-1 \leq v \leq 1$) は図 31 のようなトーラスの一部となる .

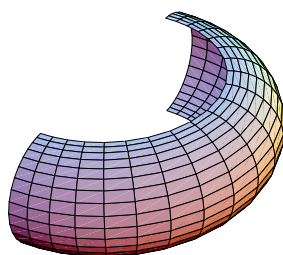


図 31

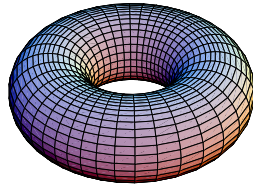


図 32

例 3. $m = 2, n = 2$ で, 9 点とその重みを $\mathbf{b}_{0,0} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{0,1} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{0,2} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{1,0} = (2/3, 0, 1)$, $\mathbf{b}_{1,1} = (2/3, 2/3, 1)$, $\mathbf{b}_{1,2} = (0, 2/3, 1)$, $\mathbf{b}_{2,0} = (12/5, 0, 13/5)$, $\mathbf{b}_{2,1} = (12/5, 12/5, 13/5)$, $\mathbf{b}_{2,2} = (0, 12/5, 13/5)$, $w_{0,0} = 1$, $w_{0,1} = 1$, $w_{0,2} = 2$, $w_{1,0} = 3$, $w_{1,1} = 3$, $w_{1,2} = 6$, $w_{2,0} = 5$, $w_{2,1} = 5$, $w_{2,2} = 10$ とすると, 有理ベジエ曲面 $\mathbf{x}^{m,n}(u, v)$ ($0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$) は図 33 のような 2 葉の双曲面の一部となる.

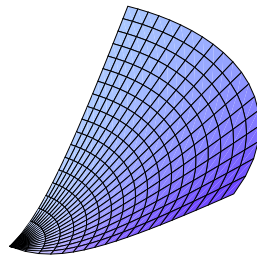


図 33

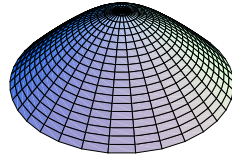
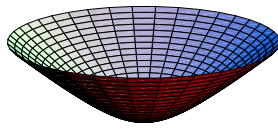


図 34

例 4. 最後に、ワイングラスを描いておく（点の取り方についてはあとの Mathematica のプログラムを参照）.

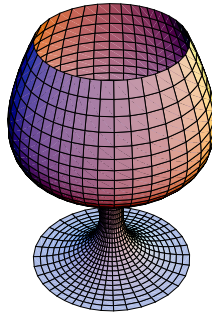


図 35

以下に、ベジエ曲線・曲面を描くための Mathematica のプログラムの例を書いておく。

ベジエ曲線を描くもの

```
Cn[s_]:=n!/(s!*(n-s)!)
Bn[s_,u_]:=Cn[s]*(u^s)*((1-u)^(n-s))
SS[n_]:=Sum[b[j]*Bn[j,t],{j,0,n}]
L[n_]:=Table[(1-t)*b[i]+t*b[i+1],{i,0,n-1}]
```

```

BezierCurve2:=ParametricPlot[Evaluate[SS[n]],{t,0,1},
  AspectRatio -> Automatic,Axes -> False]
B2Poly:=ParametricPlot[Evaluate[L[n]],{t,0,1},
  AspectRatio -> Automatic,Axes -> False]
BezPloy2:=Show[BezierCurve2,B2Poly]

BezierCurve3:=ParametricPlot3D[Evaluate[SS[n]],{t,0,1},
  AspectRatio -> Automatic,Axes -> True]
B3Poly:=ParametricPlot3D[Evaluate[L[n]],{t,0,1},
  AspectRatio -> Automatic,Axes -> True]
BezPloy3:=Show[BezierCurve3,B3Poly]

```

例 1 図 2 左は上記を入力した後に次を入力して得られる .

```

n=2
b[0] = {-1, 1};
b[1] = { 0,-1};
b[2] = { 1, 1};
BezierCurve2

```

例 2 図 3 は上記を入力した後に次を入力して得られる .

```

n=3
b[0] = {-1, 0};
b[1] = {-1, 2};
b[2] = {2, 3};
b[3] = {4, 1};
BezPloy2

```

例 3 図 5 は上記を入力した後に次を入力して得られる .

```

n=3
b[0] = { 0, 0, 0};
b[1] = { 1/3, 0, 0};
b[2] = { 2/3,1/3,0};
b[3] = { 1, 1, 1};
BezPloy3

```

有理ベジエ曲線を描くもの

```

CC[s_]:=n!/(s!*(n-s)!)
BB[s_,u_]:=CC[s]*(u^s)*((1-u)^(n-s))

```

```

AA[n_] := Sum[w[j]*b[j]*BB[j,t], {j,0,n}]/
          Sum[w[j]*BB[j,t], {j,0,n}]
L[n_] := Table[(1-t)*b[i]+t*b[i+1], {i,0,n-1}]

RatBezCurve2[a_,b_] := ParametricPlot[Evaluate[AA[n]],
  {t,a,b}, AspectRatio->Automatic, Axes -> False]
B2Poly := ParametricPlot[Evaluate[L[n]], {t,0,1},
  AspectRatio->Automatic, Axes -> False]
RatBezPloy2[a_,b_] := Show[RatBezCurve2[a,b], B2Poly]

```

例 1 半円は上記を入力した後に次を入力して得られる .

```

n=2
b[0]={1, 0}
b[1]={1, 1}
b[2]={0, 1}
w[0]=1
w[1]=1
w[2]=2
RatBezPloy2[-1, 1]

```

例 2 デカルトの葉線 (図 23) は上記を入力した後にに次を入力して得られる .

```

n=3
b[0]={0, 0}
b[1]={1, 0}
b[2]={2, 1}
b[3]={3/2, 3/2}
w[0]=1
w[1]=1
w[2]=1
w[3]=2
RatBezPloy2[-1/2, 2]

```

ベジエ曲面を描くもの

```

Cn[s_] := n!/(s!*(n-s)!)
Cm[s_] := m!/(s!*(m-s)!)
Bn[s_,u_] := Cn[s]*(u^s)*((1-u)^(n-s))
Bm[s_,u_] := Cm[s]*(u^s)*((1-u)^(m-s))

```

```
A:=Sum[Sum[bb[j][k]*Bn[j,u]*Bm[k,v],
{j,0,n}],{k,0,m}]
```

```
BezSurface[a_,b_,c_,d_]:=ParametricPlot3D[
Evaluate[A,{u,a,b},{v,c,d},
AspectRatio->Automatic]
```

例 双曲放物面 (図26) は上記を入力した後にに次を入力して得られる .

```
n=1;
m=1;
bb[0][0]={0,0,0};
bb[0][1]={0,1,0};
bb[1][0]={1,0,0};
bb[1][1]={1,1,1};
BezSurface[-1,1,-1,1]
```

例 図 28 の曲面は上記を入力した後にに次を入力して得られる .

```
m=2;
n=2;
bb[0][0]={0,0,0};
bb[0][1]={1,0,1};
bb[0][2]={2,0,0};
bb[1][0]={0,1,1};
bb[1][1]={1,1,2};
bb[1][2]={2,1,1};
bb[2][0]={0,2,0};
bb[2][1]={1,2,1};
bb[2][2]={2,2,0};
BezSurface[0,1,0,1]
```

有理ベジエ曲面

```
Cn[s_]:=n!/(s!*(n-s)!)
Cm[s_]:=m!/(s!*(m-s)!)
Bn[s_,u_]:=Cn[s]*(u^s)*((1-u)^(n-s))
Bm[s_,u_]:=Cm[s]*(u^s)*((1-u)^(m-s))
S:=Sum[Sum[ww[j][k]*bb[j][k]*Bn[j,u]*Bm[k,v],
{j,0,n}],{k,0,m}]/(Sum[Sum[ww[j][k]*Bn[j,u]*Bm[k,v],
```



```
{j,0,n},{k,0,m}])
```

```
RatBezSurface[a_,b_,c_,d_]:=ParametricPlot3D[  
Evaluate[S],{u,a,b},{v,c,d},  
AspectRatio->Automatic]
```

例 半球面 (図 30) は上記を入力した後にに次を入力して得られる .

```
m=2;n=2;  
ww[0][0]=1;ww[0][1]=1;ww[0][2]=2;  
ww[1][0]=1;ww[1][1]=1;ww[1][2]=2;  
ww[2][0]=2;ww[2][1]=2;ww[2][2]=4;  
bb[0][0]={-1,0,0};bb[0][1]={-1,0,1};  
bb[0][2]={0,0,1};  
bb[1][0]={-1,1,0};bb[1][1]={-1,1,1};  
bb[1][2]={0,0,1};  
bb[2][0]={0,1,0};bb[2][1]={0,1,1};  
bb[2][2]={0,0,1};  
RatBezSurface[-1,1,-1,0]
```

例 ワイングラス (図 35) は上記を入力した後にに次を入力して得られる .

```
n=2; m=2;  
ww[0][0]=1;ww[0][1]=1;ww[0][2]=2;  
ww[1][0]=1;ww[1][1]=1;ww[1][2]=2;  
ww[2][0]=1;ww[2][1]=1;ww[2][2]=2;  
  
bb[0][0] := {-3,0,12}; bb[0][1] := {-3,3,12};  
bb[0][2] := {0,3,12}; bb[1][0] := {-6,0,6};  
bb[1][1] := {-6,6,6}; bb[1][2] := {0,6,6};  
bb[2][0] := {-3/2,0,6}; bb[2][1] := {-3/2,3/2,6};  
bb[2][2] := {0,3/2,6};  
Bez1=RatBezSurface[0,1,-1,1]  
  
bb[0][0] := {3,0,12}; bb[0][1] := {3,3,12};  
bb[0][2] := {0,3,12}; bb[1][0] := {6,0,6};  
bb[1][1] := {6,6,6}; bb[1][2] := {0,6,6};  
bb[2][0] := {3/2,0,6}; bb[2][1] := {3/2,3/2,6};  
bb[2][2] := {0,3/2,6};
```

```
Bez2=RatBezSurface[0,1,-1,1]
```

```
bb[0][0] := {-3/2,0,6};   bb[0][1] := {-3/2,3/2,6};  
bb[0][2] := {0,3/2,6};   bb[1][0] := {-1/2,0,6};  
bb[1][1] := {-1/2,1/2,6}; bb[1][2] := {0,1/2,6};  
bb[2][0] := {-1/2,0,7/2}; bb[2][1] := {-1/2,1/2,7/2};  
bb[2][2] := {0,1/2,7/2};
```

```
Bez3=RatBezSurface[0,1,-1,1]
```

```
bb[0][0] := {3/2,0,6};   bb[0][1] := {3/2,3/2,6};  
bb[0][2] := {0,3/2,6};   bb[1][0] := {1/2,0,6};  
bb[1][1] := {1/2,1/2,6}; bb[1][2] := {0,1/2,6};  
bb[2][0] := {1/2,0,7/2}; bb[2][1] := {1/2,1/2,7/2};  
bb[2][2] := {0,1/2,7/2};
```

```
Bez4=RatBezSurface[0,1,-1,1]
```

```
bb[0][0] := {-1/2,0,7/2}; bb[0][1] := {-1/2,1/2,7/2};  
bb[0][2] := {0,1/2,7/2}; bb[1][0] := {-1/2,0,1};  
bb[1][1] := {-1/2,1/2,1}; bb[1][2] := {0,1/2,1};  
bb[2][0] := {-7/2,0,1};   bb[2][1] := {-7/2,7/2,1};  
bb[2][2] := {0,7/2,1};
```

```
Bez5=RatBezSurface[0,1,-1,1]
```

```
bb[0][0] := {1/2,0,7/2}; bb[0][1] := {1/2,1/2,7/2};  
bb[0][2] := {0,1/2,7/2}; bb[1][0] := {1/2,0,1};  
bb[1][1] := {1/2,1/2,1}; bb[1][2] := {0,1/2,1};  
bb[2][0] := {7/2,0,1};   bb[2][1] := {7/2,7/2,1};  
bb[2][2] := {0,7/2,1};
```

```
Bez6=RatBezSurface[0,1,-1,1]
```

```
Show[Bez1,Bez2,Bez3,Bez4,Bez5,Bez6,  
Boxed->False,Axes->False]
```

参考文献 G. Farin : CAGDのための曲線・曲面理論, 共立出版, 1991年