連接層の導来圏と
代数多様体の GROTHENDIECK 環

大川新之介

1. 導来同値と不変量

体 $\mathbf{k}$ 上の非特異射影的代数多様体 X, Y を考える。連接層の有界導来圏を $\mathbf{D}(X), \mathbf{D}(Y)$ で表すことにする。これらの間に $\mathbf{k}$ 線型三角圏の構造を保つような同値があるときに X と Y は**導来同値**であるという。

X と Y が同型ならば当然両者は導来同値であるが、逆は正しくない。実際、双有理同値ですらないが導来同値であるような X と Y の例が色々と調べられてきた。その最初の例は記念碑的論文 [Muk81] で発表されたアーベル多様体 A とその双対 $\widehat{A} = \operatorname{Pic}^0 A$ であり、Poincaré 束 (= 普遍対象) $\mathcal{P} \in \operatorname{Pic}^0\left(A \times \widehat{A}\right)$ による *Fourier-Mukai* **変換**

$$\Phi_{\mathcal{P}}^{\widehat{A} \to A} \colon \mathbf{D}\left(\widehat{A}\right) \to \mathbf{D}(A); E \mapsto p_{A*}\left(\mathcal{P} \otimes p_{\widehat{A}}^{*} E\right) \tag{1.1}$$

が同値を与えることが証明されている。一般には A と $\widehat{A}$ は同型でなく、従って双有理同値ですらない (両者がアーベル多様体であることに注意)。詳細や他の例については [Huy06] 等を参照して欲しい[1]。

このように連接層の導来圏は代数多様体の情報を完全には含んでいない[2]のだが、逆に言うと本質的な情報だけを抽出しているという見方もできる。例えば次の予想が知られている。

予想 1.1. X, Y が双有理同値で小平次元が 0 以上のとき[3]、X, Y が導来同値 *(a.k.a. D* 同値*)* $\iff$ X, Y が K 同値。

定義 1.2. X, Y の間に双有理射 $\varphi \colon X \dashrightarrow Y$ が存在し、適当な双有理モデル

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & Y \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

について直線束の同型 $p^* K_X \simeq q^* K_Y$ が成立するとき、X と Y は K **同値**であるという。

予想を仮定すると、同じ多様体の極小モデルは互いに導来同値になる[4]。3 次元以上では極小モデルの一意性が無い[5]わけだが、導来圏を取れば一意に決まるわけである。

さて、連接層の導来圏は具体的に多様体のどのような情報を持っているのであろうか？これがこの記事のテーマである。問題として述べると次のとおりである：

---

[1]連接層の導来圏に関する標準的な教科書の 1 冊である。

[2]なお、連接層の**アーベル圏**からは完全に多様体の情報を復元できる [Gab62](スタックまで拡げると正しくない)。また、導来圏のテンソル積の情報までわかるとやはり多様体が復元できる [Bal05]。

[3]小平次元の仮定を外すと反例がある。実際、D 同値な有理曲面で K 同値でない例が [Ueh04] で構成されている。

[4]極小モデルは一般に端末特異点を持つわけだが、特異点を持つ多様体に関してどのような三角圏を考えるべきか、という問題が未解決で残っている [Kaw09]。その意味で Conjecture 1.1 は十分満足のいく形では定式化できていない

[5]異なる極小モデルの間の双有理射は flop 有限回の合成になっている [Kaw08]。

問題 1.3. X, Y が D 同値の時、X, Y のどのような不変量が一致するか？

知られている結果をいくつか紹介する。以下、$\Phi\colon \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(Y)$ を導来同値とする。

一致: (i) Φ は (反) 標準環の間に、次数つき $\mathbf{k}$ 代数としての同型射

$$\Phi_*\colon R(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} R(Y, \omega_Y) \tag{1.3}$$

および

$$\Phi_*\colon R(X, \omega_X^{-1}) \xrightarrow{\sim} R(Y, \omega_Y^{-1}) \tag{1.4}$$

を誘導する。さらに、ω_X が (反) 豊富ならば ω_Y も (反) 豊富であり、従って同型射 $\Phi^*\colon Y \xrightarrow{\sim} X$ を得る。

(ii) 基礎体 $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ のとき、Φ は向井内積を保つような $\mathbb{Q}$ 線型空間の同型 $H^*(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$ を誘導する。

(iii) Φ は Hochschild (コ) ホモロジー群の同型 $\mathrm{HH}_*(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}_*(Y)$ および $\mathrm{HH}^*(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}^*(Y)$ を誘導する。基礎体 $\mathbf{k}$ が標数 0 のとき、Hochschild-Kostant-Resenberg (HKR) 分解と組み合わせると次数つきベクトル空間の同型

$$\bigoplus_{q-p=i} H^q(X, \Omega_X^p) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{q-p=i} H^q(Y, \Omega_Y^p) \tag{1.5}$$

および

$$\bigoplus_{p+q=i} H^q(X, \bigwedge^p \mathcal{T}_X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p+q=i} H^q(Y, \bigwedge^p \mathcal{T}_Y) \tag{1.6}$$

を得る。

(iv) 一般に $H^1(\mathcal{O})$ と $H^0(T)$ の次元が導来不変量であることが知られている [PS11]。これと上述の (iii) を組み合わせると、3 次元以下では導来同値から Hodge 数の一致が従うことがわかる (導来同値は必ずしも Hodge 分解を保たないが、Hodge 数の一致は従う)。

(v) 上で述べたように、Conjecture 1.1 という予想がある。

(vi) $\mathbf{k}$ が有限体とする。このとき、X, Y の $\mathbf{k}$ 有理点の個数が一致することが期待されている。なお、3 次元以下の場合およびアーベル多様体に対しては最近証明されたようである [Hon15, Hon16]。

(vii) X, Y が双有理同値ならば、Conjecture 1.1 を仮定すれば X, Y は K 同値となるわけだが、K 同値がわかっている状況では $[X] = [Y]$ が Grothendieck 環のある種の完備化において成立することが知られている。これは**モチーフ積分** *(motivic integration)* の応用として証明される (後述)。

(viii) X, Y の Chow モチーフが Tate twist を除いて一致する ([Tab16, Theorem 2.13]。[Rob15] も見よ)。

不一致: (i) 上で述べたように、D 同値であっても双有理同値とは限らない。また、変形同値とも限らない。

(ii) D 同値であっても $\mathbb{Z}$ 係数の 1 次特異ホモロジーが一致しないことがある [Sch12]。

数学において、複数の問題がより強力な 1 つの問題に集約されることがある。これから述べるように、上述の (iv)、(vi)、および (Conjecture 1.1 を仮定した上でだが)(vii) は大雑把に言って問題**「D 同値 $\Rightarrow$ L 同値[6] *?*」**に帰着される。この問題がこの記事の主眼である。

[6] L 同値という言葉は [KS16] で導入された。同じ概念は筆者らも意識していたわけだが、このような気の利いた用語を思いつくことができなかったのは (個人的に) 残念である。

2. 代数多様体の GROTHENDIECK 環とモチーフ的測度

体 $\mathbf{k}$ 上の代数多様体の Grothendieck 環は次のように定義される。

定義 2.1. $\mathbf{k}$ 上の代数多様体 (= 有限型スキーム) の同型類の集合を $\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k}$ と表す。このとき、$\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k}$ 上の自由アーベル群

$$\mathbb{Z}^{\bigoplus \mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k}} \tag{2.1}$$

を関係式

$$[X] = [Z] + [X \setminus Z] \tag{2.2}$$

(ただし $Z \hookrightarrow X$ は closed subscheme) で剰余してできるアーベル群を

$$K_0 (\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k}) \tag{2.3}$$

で表し、**$\mathbf{k}$ 上の代数多様体の** *Grothendieck* **環**と呼ぶ。さらに代数多様体同士の直積を使うことで $K_0 (\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})$ に結合的可換環の構造が入ることもわかる (Spec $\mathbf{k}$ が単位元になる)。

代数多様体 X の定める $K_0 (\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})$ の元を $[X]$ で表す。とくに $[\mathbb{A}^1]$ を記号 $\mathbb{L}$ で表す。

Grothendieck 環 $K_0 (\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})$ は代数多様体の最も普遍的な加法的不変量である。この主張は、数学的に次のように定式化される。

定義 2.2. モチーフ的測度 *(motivic measure)* とは $K_0 (\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})$ からの環準同型のことである。

例 2.3. モチーフ的測度の例を挙げる。

(1) $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ とする。このとき、Hodge-Deligne 多項式

$$E\colon K_0 (\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k}) \to \mathbb{Z}[u, v] \tag{2.4}$$

が

$$E([X]) = \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{0\le i\le 2\dim X} \dim_{\mathbb{C}} h^{p,q}\left(H_c^i (X, \mathbb{C})\right) \right) u^p v^q \tag{2.5}$$

によって定義される。ただし $H_c^i (X, \mathbb{C})$ はコンパクト台コホモロジーであり、$h^{p,q}$ はそこに入る混合 Hodge 構造から定まる部分ベクトル空間である。X が非特異射影的な場合には単に $E(X) = \sum_{p,q} \dim_{\mathbb{C}} H^q (X, \Omega^p)\, u^p v^q$ となる。例えば

$$E(\mathbb{L}) = E\left([\mathbb{P}^1] - [\operatorname{Spec}\mathbb{C}]\right) = (1 + uv) - 1 = uv \tag{2.6}$$

といった具合である。詳しくは [Cra04, Section 3] 等を参照されたい。

(2) $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$ を有限体とする。このとき、有理点の数え上げ関数

$$\#\colon K_0 (\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k}) \to \mathbb{Z} \tag{2.7}$$

が

$$[X] \mapsto \#X(\mathbb{F}_q) \tag{2.8}$$

によって定義される。

(3) $\mathbf{k}$ の標数を 0 とする。SB $/\mathbf{k}$ を $\mathbf{k}$ 上の代数多様体の安定双有理同値類の可換モノイド (積は直積から定める) とし、$\mathbb{Z}[\mathrm{SB}/\mathbf{k}]$ をその半群環とする。このとき環同型

$$K_0 (\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k}) / (\mathbb{L}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\mathrm{SB}/\mathbf{k}] \tag{2.9}$$

であって非特異射影代数多様体 X のクラスをその安定双有理同値類に送るものが存在する [LL03]。ただし $(\mathbb{L})$ は $\mathbb{L}$ の生成する単項イデアルのことである。

適当な自然数 n について $X\times\mathbb{P}^n$ と $Y\times\mathbb{P}^n$ が双有理同値であるとき、代数多様体 X,Y は安定双有理同値であると言われる。仮に X,Y が非特異射影的で小平次元が 0 以上であるならば、X,Y が安定双有理同値であることと X,Y が双有理同値であることとが同値になる (maximally rationally connected fibration の一意性から従う。詳しくは [Bor14, Theorem 2.12] の証明を参照されたい)。この場合、特に $[X]\neq[Y]\in K_0(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})$ が従う。

さて、代数多様体 X,Y が Grothendieck 環 $K_0(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})$ において $[X]=[Y]$ を満たすとしよう。すると、**モチーフ的測度を適用して得られるような不変量は全て一致する**ということになる。例えば $\mathbf{k}=\mathbb{C}$ で両者が非特異射影的ならば Hodge 数の一致が従うし、$\mathbf{k}=\mathbb{F}_q$ ならば有理点の個数の一致が従うわけである。

この点をもう少し精密化しよう。もしも考えているモチーフ的測度が別の環準同型 $K_0(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})\to R$ を経由するならば、X,Y が環 R の元として一致するだけでやはり不変量の一致が従うわけである。これは実際的な応用のある一般化である。

まず、$K_0(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})$ の $\mathbb{L}$ による局所化

$$\varphi\colon K_0(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})\to K_0(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})[\mathbb{L}^{-1}] \tag{2.10}$$

を考えよう。次に、局所化の降下フィルトレーション $(F^m)_{m\in\mathbb{Z}}$ を考え、それによる完備化

$$K_0(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})[\mathbb{L}^{-1}]\to\varprojlim_m\left(K_0(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})[\mathbb{L}^{-1}]/F^m\right)=:R \tag{2.11}$$

を考える。ただし、$F^m\subset K_0(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k})[\mathbb{L}^{-1}]$ は $\dim V-i\leq -m$ を満たす代数多様体 V と $i\in\mathbb{Z}$ から決まる元 $[V]\cdot\mathbb{L}^{-i}$ 達によって生成される部分アーベル群である。

さて、X の弧空間 $\mathcal{J}_\infty X=\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\,\mathbf{k}[[t]],X)$ 上でシリンダー集合たちのなす可測集合族を考え、それらに対する測度 μ を R の元として定めるのであった。そして、弧空間上の $\mathbb{Z}$ に値を取る可測関数を「積分」することで R の元を得るのが**モチーフ積分**であった (詳しくは [Cra04] 等を参照のこと)。この枠組と積分変換公式によって、次が証明されるのであった。

定理 2.4. X,Y が K 同値な非特異射影代数多様体のとき、

$$[X]=[Y]\in R \tag{2.12}$$

が成立する。

R は複雑な手続きで構成された環だが、実は（ログ特異点解消の存在がわかっている状況においては）モチーフ積分の値が R のある部分環に含まれることが証明でき、Hodge-Deligne 多項式 E および数え上げ関数 $\#$ をその部分環を定義域とした準同型に拡張することができる ([Cra04, Proposition 3.3]。値域も $\mathbb{Z}[u,v]$ および $\mathbb{Z}$ の適当な局所化に拡げる必要があるが、この場合の局所化は単射であることに注意する)。従って、定理 2.4 から Hodge 数の一致や有理点の個数の一致が従うことになるわけである。

3. $D\Rightarrow L$?

さて、あらためて (2.10) を思い出そう。意外なことに φ が単射であるか否か、という問題がつい最近 (2014 年) までわかっていなかった。この問題は一見すると意義がよくわからないかもしれないが、[GS14] が次の事実を証明して注目を集めた。

定理 3.1. φ が単射ならば、一般の *4* 次元 *3* 次曲面は非有理的である。

一般の 4 次元 3 次曲面の非有理性は現時点でも未解決の大問題であるため、これは大変魅力的なストーリーであった。しかし、このプレプリントが発表されてすぐに、仮定が正しくないことがわかった。すなわち、(恐らく) この定理に触発されて、Lev Borisov が [Bor14] において φ の核の元を構成したのである。その議論は後に [Mar16] によって精密化され、次の形の定理となっている。

定理 3.2. (X, Y) を *Pfaffian-Grassmann pair of Calabi-Yau 3-folds* とする。このとき

$$([X]-[Y])\cdot \mathbb{L}^6 = 0 \in K_0\left(\mathcal{V}\mathrm{ar}/\mathbf{k}\right) \tag{3.1}$$

が成立する。

環の局所化の定義を思い出すと、

$$\varphi\left([X]-[Y]\right)=0 \iff \mathbb{L}^n\cdot([X]-[Y])=0 \ (\exists n>0) \tag{3.2}$$

であった。よって、上述の $[X]-[Y]$ は核に入るわけである。

X, Y は共に Picard 数 1 の非特異な Calabi-Yau 3-fold であり、共通のミラーを持っていて、導来同値である [BC09]。さらに Picard 群の生成元の次数がそれぞれ 42,14 であることから同型でないので、双有理同値でもない (双有理同値ならば flop でつながるが、Picard 数が 1 なので flop は存在せず、同型にならざるを得ない)。これと上述のモチーフ的測度 (3) によって $[X]-[Y]\neq 0$ がわかるので、定理 3.2 の例が非自明となるわけである。

この例は φ の核と Fourier-Mukai 対に関係があるという事を示唆しており、驚異的であった。これを一般化したのが次に述べる問題である。まず、言葉を準備する。

定義 3.3. 非特異射影代数多様体 X, Y が (3.2) を満たすとき、X, Y は L **同値**であるという。

問題 3.4 (=[KS16, Conjecture 1.6]=[IMOU16b, Problem 1.3])**.** D 同値な多様体同士は L 同値か?

繰り返しになるが、もしも問題 3.4 が証明されたならば、導来同値な多様体の Hodge 数や有理点の個数の一致が従う。これらは現時点で未解決の問題である。

Martin の論文が arXiv に出たのは今年 (2016 年) の 4 月 22 日である。筆者らのグループがそれに触発され、G_2 型等質多様体から新しい例が作れることに気付いた ([IMOU16a]) のは翌週であった。その後、12 月末に [HL16](明示的に書いていないが、次数 12 の K3 曲面の Fourier-Mukai 対 (X, Y) で Picard 数 1 のものについて $\mathbb{L}\cdot([X]-[Y])=0$ を証明しているようである。)、[KS16](次数 8 と次数 2 の K3 曲面の Fourier-Mukai 対 (X, Y) であって $\mathbb{L}\cdot([X]-[Y])=0$ を満たすものの例を構成している。)、筆者らの [IMOU16b] が相次いで arXiv に出た。まさに現在進行系で研究が進んでいる。

これまでに見つかってきた例を見ると、次の 2 点に気付く。これらは今後の課題である。

(1) アーベル多様体の Fourier-Mukai 対による例が 1 つも見つかっていない。
(2) 導来同値あるいはそれを与える積分核と L 同値の関係があまりよく理解されていない。

4. 等質多様体上の等質ベクトル束から得られる具体例

ここでは [IMOU16a] および [IMOU16b] で扱っている問題 3.4 の具体例について簡単に説明する。

4.1. G_2 型の線型代数群の等質多様体のうち Picard 数 1 のものが 2 つあるので、それぞれを Q, G と呼ぶ。これらは共に 5 次元であり、特に 2 次超曲面と同型な方を Q と呼ぶことにする。両者の上には Picard 数 2 の 6 次元等質多様体 F が乗っており、$\pi\colon F\to Q, \rho\colon F\to G$ は共に $\mathbb{P}^1$ 束の構造を持っている。

F の非常に豊富な直線束 $\mathcal{L}=\mathcal{O}_F(1,1)$ の一般切断 s を取り、それに対応する F の超曲面を M とする。また、s を $\pi_*\mathcal{L}$ および $\rho_*\mathcal{L}$ の切断と思い、それらが定める零点集合を

それぞれ X, Y とする。以上を図式にすると以下のようになる。

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, hook] \arrow[ddl] & & M \arrow[d] \arrow[ddl, "\pi_M"'] \arrow[ddr, "\rho_M"] & & E \arrow[ll, hook'] \arrow[ddr] & \\
 & & & F \arrow[dl, "\pi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & & \\
X \arrow[rr, hook] & & Q & & G & & Y \arrow[ll, hook']
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

さて、ここで次のことがわかる。

- X, Y は非特異な Calabi-Yau 3-folds で Picard 数が 1。Picard 群の生成元の次数はそれぞれ 42,14 である[7]。とくに $[X] - [Y] \neq 0$ である。
- π_M は Q の X に沿った爆発になっている。同様に ρ_M は G の Y に沿った爆発になっている (図式の中では、例外因子をそれぞれ D および E で表している)。

さて、モチーフの等式を導こう。まず

$$[M] = [M \setminus D] + [D] = [Q \setminus X] + [X] \cdot [\mathbb{P}^1] = [Q] + [X] \cdot \mathbb{L}. \tag{4.2}$$

同様に

$$[M] = [M \setminus E] + [E] = [G \setminus Y] + [Y] \cdot [\mathbb{P}^1] = [G] + [Y] \cdot \mathbb{L}. \tag{4.3}$$

最後に Bruhat 分解を使って

$$[Q] = 1 + \mathbb{L} + \mathbb{L}^2 + \cdots + \mathbb{L}^5 = [G](= [\mathbb{P}^5]). \tag{4.4}$$

以上を全て合わせると $\mathbb{L} \cdot ([X] - [Y]) = 0$ を得る[8]。

なお、X, Y の導来同値は [Kuz16] によって証明された。方針は以下の通りである。まず、blowup の導来圏に関する Orlov の定理から

$$\mathbf{D}(M) = \langle \mathbf{D}(Q), \mathbf{D}(X) \rangle \tag{4.5}$$
$$\mathbf{D}(M) = \langle \mathbf{D}(G), \mathbf{D}(Y) \rangle \tag{4.6}$$

と 2 通りの半直交分解を得る (埋め込み関手は省略した)。ここで $\mathbf{D}(Q), \mathbf{D}(G)$ はそれぞれさらに長さ 6 の例外対象列に分解され、しかも分解に出てくる成分もよくわかる。以下、(4.6) を細分して得られる長さ 7 の分解に適当な変異 (mutation) を繰り返し施すことで[9]$\mathbf{D}(Q)$ の分解にあらわれる 6 つの例外対象を「1 つずつ順に」作り出すことができる。部分圏 $\mathbf{D}(X) \subset \mathbf{D}(M)$ はそれら 6 つの例外対象が生成する部分圏 ($= \mathbf{D}(Q)$) の左直交補圏として特徴づけられるため、結局、$\mathbf{D}(Y)$ から $\mathbf{D}(X)$ へ変異関手の合成という圏同値ができたことになる。

4.2. D_4 型の線型代数群の等質多様体を考える。4 次元ベクトル空間 V_0 を考え、$V_0 \oplus V_0^\vee$ に入っている自然な内積に関して isotropic な $V_0 \oplus V_0^\vee$ の 4 次元部分空間全体を考えると直交群 $\mathrm{O}(V_0 \oplus V_0^\vee)$ の等質多様体になる。それは連結成分を 2 つ持つので、それらを $\mathrm{Spin}(V_0 \oplus V_0^\vee)$ の等質多様体とみなしたものを F_1, F_2 とする。F_1, F_2 の上には Picard 数 2 の (Spin に関する) 等質多様体 F_{12} が乗っており、2 つの射 $p_i \colon F_{12} \to F_i$ は $i = 1, 2$ どちらについても (Zariski 位相において局所自明化できる) $\mathbb{P}^3$ 束である。先ほどと同様に

[7] 実は、これらは上述の Pfaffian-Grassmann pair の退化になっている。詳しくは [IMOU16a] を読んでいただきたい。

[8] この状況は「M は Q から G への双有理射のグラフであり、X および Y は双有理射の不確定点集合である」と解釈できる。実は [HL16] の例では $\mathbb{P}^4$ の自己双有理射の固定点集合として次数 12 の K3 曲面 (の双有理モデル) の Fourier-Mukai 対が現れる。

[9] 具体的にどのような変異を施せばよいか、ということを見抜くのは勘がいる。しかし、この素朴な手法自体は他の例にも応用が効きそうである。

$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{F_{12}}(1,1)$ の一般切断 s の定める超曲面 M を考え、また s を $p_{i*}\mathcal{L}$ の切断とみなしてできる F_i の閉部分多様体を $i = 1, 2$ に応じて X, Y とする。すると $p_i|_M : M \to F_i$ は X (あるいは Y) の外では $\mathbb{P}^2$ 束となり、X (あるいは Y) の上では $\mathbb{P}^3$ 束となる。あとはこれまでと同様の計算をすることで $\mathbb{L}^3 \cdot ([X] - [Y]) = 0$ を得ることができる (ここまでは V_0 が一般に m 次元 $(m \geq 4)$ で正しく、その場合 $\mathbb{L}^{m-1} \cdot ([X] - [Y]) = 0$ という等式を得る)。

なお、X の Picard 数が 1 になるような一般切断を取っておけば、Y が X と同型でない唯一の Fourier-Mukai 対であることが示せる (詳しくは [IMOU16b] を見ていただきたい)。従って $[X] \neq [Y]$ とわかるので、これは非自明な例になっている。

なお、上で述べたように、[HL16] ではより強い等式 $\mathbb{L} \cdot ([X] - [Y]) = 0$ を証明したようである。

謝辞

講演およびプロシーディングスに記事を書く機会を下さった世話人の皆さまに御礼申し上げます。また、有益な議論をさせていただいた Sergey Galkin 氏、岩成勇氏、Alexander Kuznetsov 氏、松村英樹氏、三田史彦氏、安田健彦氏にこの場をお借りして御礼申し上げます。

References

[Bal05] Paul Balmer, *The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories*, J. Reine Angew. Math. **588** (2005), 149–168. MR 2196732 (2007b:18012)

[BC09] Lev Borisov and Andrei Căldăraru, *The Pfaffian-Grassmannian derived equivalence*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), no. 2, 201–222. MR 2475813 (2010i:14069)

[Bor14] Lev Borisov, *Class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring*, arXiv:1412.6194, 12 2014.

[Cra04] Alastair Craw, *An introduction to motivic integration*, Strings and geometry, Clay Math. Proc., vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 203–225. MR 2103724 (2005k:14027)

[Gab62] Pierre Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448. MR 0232821 (38 #1144)

[GS14] Sergey Galkin and Evgeny Shinder, *The Fano variety of lines and rationality problem for a cubic hypersurface*, arXiv:1405.5154, 05 2014.

[HL16] Brendan Hassett and Kuan-Wen Lai, *Cremona transformations and derived equivalences of K3 surfaces*, arXiv:1612.07751, 12 2016.

[Hon15] Katrina Honigs, *Derived equivalent surfaces and abelian varieties, and their zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 10, 4161–4166. MR 3373916

[Hon16] ———, *Derived equivalence, albanese varieties, and the zeta functions of 3-dimensional varieties*, arXiv preprint arXiv:1604.00042 (2016).

[Huy06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006. MR 2244106 (2007f:14013)

[IMOU16a] Atsushi Ito, Makoto Miura, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda, *The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring: via G_2 Grassmannians*, arXiv:1606.04210, 06 2016.

[IMOU16b] ———, *The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring: via K3 surfaces of degree 12*, arXiv:1612.08497, 12 2016.

[Kaw08] Yujiro Kawamata, *Flops connect minimal models*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 2, 419–423. MR 2426353 (2009d:14011)

[Kaw09] ———, *Derived categories and birational geometry*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 655–665. MR 2483950 (2009m:14018)

[KS16] Alexander Kuznetsov and Evgeny Shinder, *Grothendieck ring of varieties, D- and L-equivalence, and families of quadrics*, arXiv:1612.07193, 12 2016.

[Kuz16] Alexander Kuznetsov, *Derived equivalence of Ito-Miura-Okawa-Ueda Calabi-Yau 3-folds*, arXiv:1611.08386, 11 2016.

[LL03] Michael Larsen and Valery A. Lunts, *Motivic measures and stable birational geometry*, Mosc. Math. J. **3** (2003), no. 1, 85–95, 259. MR 1996804

[Mar16] Nicolas Martin, *The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring: an improvement*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **354** (2016), no. 9, 936–939. MR 3535349

[Muk81] Shigeru Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 153–175. MR 607081 (82f:14036)

[PS11] Mihnea Popa and Christian Schnell, *Derived invariance of the number of holomorphic 1-forms and vector fields*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **44** (2011), no. 3, 527–536. MR 2839458

[Rob15] Marco Robalo, *K-theory and the bridge from motives to noncommutative motives*, Adv. Math. **269** (2015), 399–550. MR 3281141

[Sch12] Christian Schnell, *The fundamental group is not a derived invariant*, Derived categories in algebraic geometry, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2012, pp. 279–285. MR 3050707

[Tab16] Goncalo Tabuada, *Recent developments on noncommutative motives.*

[Ueh04] Hokuto Uehara, *An example of Fourier-Mukai partners of minimal elliptic surfaces*, Math. Res. Lett. **11** (2004), no. 2-3, 371–375. MR 2067481

大阪大学大学院理学研究科　大阪府豊中市待兼山町 1-1 560-0043
E-mail address: okawa@math.sci.osaka-u.ac.jp