非可換代数曲面
(NONCOMMUTATIVE ALGEBRAIC SURFACES)

大川新之介

概要. 非可換代数曲面についてサーベイする。

謝辞. 講演およびプロシーディングスに記事を書く機会を下さった世話人の皆様に感謝致します。

0. 序

非可換代数幾何学は 1987 年に発表された [AS87] にはじまり、以降 30 年、今日に至るまで発展を続けてきた分野である。特に 2 次元の場合 (すなわち非可換代数曲面) が最も深く研究されてきた。3 次元以上についての研究もあるが、曲面の場合と比較するとさらに未開拓である。

非可換代数幾何学は、当初、非可換代数あるいは非可換次数つき代数を基本対象として始まった。実際、[AS87] で導入された Artin-Schelter 正則代数は多項式環 (" = " 射影空間) の持つ性質の一部を満たす非可換次数つき代数として定義された。また、それに続き、非可換次数つき代数とそれに付随する「非可換偏極多様体」に関する基礎が [AZ94] で与えられた。

その後、アーベル圏や導来圏 (あるいはその適切な enhancement) を基本対象とする視点の重要性が明らかになってきた [BP93, VdB11]。この記事ではその点に重きを置いて説明をしたいと思っている。

非可換代数幾何学に関する標準的な教科書は存在しない。これは分野の性格によるところが大きいが、そのため、分野の全体像を把握するのが容易ではない。このサーベイではこの分野に対する筆者なりの視点を提供したい。半分は本人のためのまとめである。

教科書のかわりに既存のサーベイ記事を挙げる。2001 年に発表された [SvdB01] は非可換曲線・曲面に関するとても良い入門記事である。日本語で書かれた解説記事である [Mor10] もある。筆者の講演では非可換 del Pezzo 曲面のモジュライに関する共同研究について話をしたが、その一部は共同研究者の植田一石氏が [Ued14][1]において日本語で解説している。この記事では [Mor10, Ued14] であまり説明されていない点を扱ったつもりである。

筆者は大学院生の頃は従来の代数多様体に関する研究をしていたのだが、4 年ほど前から非可換代数多様体にも興味を持って研究をしている。やってみて驚いたことに、非可換代数多様体は通常の代数多様体と極めて似た性格を持っていると感じた。また、従来の代数幾何学の考え方や手法を様々な形で適用することができた。代数幾何学の知識・経験を持っていることが小さくないアドヴァンテージになる分野なのではないかと思う。

さらに個人的な印象の話をすると、非可換代数多様体は K3 曲面に代表されるような「特殊で豊かな構造を持つ代数多様体」に類する対象であると感じる。また、「可換」と「非可換」の関係が「線型」と「非線型」の関係と相似であると思ったとき、非可換代数多様体はちょうど可積分系に相当するような対象なのではないかと思う[2]。

Date: January 2, 2017.

[1]`http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/202022` にて入手可能。

[2][OR15] では非可換射影平面およびその blowup と [Sak01] の意味の elliptic Painlevé equation の関係が議論されている。

この記事では中心上有限な非可換代数多様体 (= 代数多様体上の有限多元環の層) については触れないが、これも多くの研究がある興味深い話題である。ちなみに、2 次元の場合には [CI05] において極小モデル理論が確立されている。この結果が曲面上の conic bundle の研究に活かせないか、というのは気になる問題である [CI12]。

1. $\mathbb{Z}$ 代数と非可換代数多様体

以下、基礎体を $\mathbf{k}$ とする。特に断らない限り、考える圏は全て $\mathbf{k}$ 線型圏とする[3]。

定義 1.1. 集合 I を考える。I **代数**とは $\mathbf{k}$ 線型圏 $\mathcal{C}$ であって

$$\operatorname{ob}\mathcal{C} = I \tag{1.1}$$

を満たすもののことである。

I 代数は次のようにも定義できる。

定義 1.2. I 代数とは (単位元を持つとは限らない) 結合的 $\mathbf{k}$ 代数 A で、集合 $I \times I$ で次数づけられており、さらに局所単位元を持つものである。すなわち $\mathbf{k}$ 線型空間としての分解

$$A = \bigoplus_{i,j \in I} A_{i,j} \tag{1.2}$$

が存在して

$$A_{i,j} \cdot A_{k,\ell} \begin{cases} \subset A_{i,\ell} & \text{if } j = k \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.3}$$

を満たし、さらに各 $i \in I$ ごとに元 $e_i \in A_{i,i}$ であって

$$e_i a = a \ \ (\forall a \in A_{i,*}) \tag{1.4}$$

$$b e_i = b \ \ (\forall b \in A_{*,i}) \tag{1.5}$$

$$\tag{1.6}$$

を満たすものが存在するような結合代数のことである。

I 代数の 2 通りの定義は

$$\mathcal{C}(j,i) = A_{i,j} \tag{1.7}$$

によって結びついている[4]。A を記号 $\operatorname{Alg}(\mathcal{C})$ で表すことにする。状況に応じて考えやすい方を用いる。

例 1.3.
(1) I が 1 元集合のとき、I 代数とは (通常の意味の) 単位元を持つ結合的な $\mathbf{k}$ 代数のことに他ならない。
(2) 有限集合 Q_0 および半単純環 $\mathbf{k}^{Q_0}$ 上の有限生成両側加群 V を考える。このとき、自由代数

$$T_{\mathbf{k}^{Q_0}} V = \bigoplus_{d \geq 0} \overbrace{V \otimes_{\mathbf{k}^{Q_0}} V \otimes_{\mathbf{k}^{Q_0}} \cdots \otimes_{\mathbf{k}^{Q_0}} V}^{d\,回} \tag{1.8}$$

は標準的に Q_0 代数の構造を持つ ($I = Q_0$)。なお、$V = \bigoplus_{i,j \in Q_0} e_i V e_j$ と分解することで上述の自由代数が箙 (= 有向グラフ) の道代数に他ならないということが

[3] $\mathbf{k}$ 線型空間の圏は通常のテンソル積についてモノイダル圏になる。$\mathbf{k}$ 線型圏とは、そのモノイダル圏上の豊穣圏 (enriched category) に他ならない。

[4] $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ を $\mathcal{C}(-,-)$ とも書く。

わかる。頂点 j から i へ $\dim_{\mathbf{k}} e_i V e_j$ 本の矢があるような箙を考えれば良いわけである。

(3) $I=\mathbb{Z}$ とする。このとき、$\mathbb{Z}$ 次数つき代数 $S=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} S_d$ に付随する $\mathbb{Z}$ 代数 $\check{S}=A=\bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}} A_{i,j}$ が

$$A_{i,j} := S_{j-i} \tag{1.9}$$

として構成される。

$\mathbb{Z}$ 代数 A と $d\in\mathbb{Z}$ に対して新しい $\mathbb{Z}$ 代数 $A(d)$ を $A(d)_{i,j} := A_{i+d,j+d}$ で定義することができる。$A\simeq A(d)$ が成立するときに A は d 周期的であると言う。A が 1 周期的であるということは、適当な次数つき代数 S が存在して $A\simeq\check{S}$ が成立するということと同値である。

偏極多様体 (X,L) に対し、充満部分圏 $\left(L^{\otimes -d}\right)_{d\in\mathbb{Z}}\subset\operatorname{coh}X$ は自然に $\mathbb{Z}$ 代数の構造を持つが、それは切断環 $R(X,L)$ に付随する $\mathbb{Z}$ 代数に他ならない。偏極の選択は $\operatorname{coh}X$ の然るべき充満部分圏の選択とみなせるわけである。

$\mathbb{Z}$ 代数を基礎において非可換射影平面を考察したのは [BP93] である。筆者の知る限り、$\mathbb{Z}$ 代数の有用性を最初に露わにした論文である。上述の「偏極に相当する然るべき部分圏を選ぶ」というアイディアはこの論文で明示的に述べられている。

なお、次数つき代数 S,T が $\check{S}\simeq\check{T}$ を満たすための必要十分条件が知られている [Sie11]。特に、同型でない次数つき代数が同型な $\mathbb{Z}$ 代数を与えることがある。これは非可換射影平面を考える上で実際に現れる現象である (後述)。

定義 1.4. I 代数 $\mathcal{C}$ に対し、右 $\mathcal{C}$ 加群 ($\Longleftrightarrow$ 右 $A=\operatorname{Alg}(\mathcal{C})$ 加群) の圏を

$$\operatorname{Grmod}A=\operatorname{Grmod}\mathcal{C}=\operatorname{Fun}\left(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}},\operatorname{Vect}_{\mathbf{k}}\right) \tag{1.10}$$

と定める。ただし Fun は $\mathbf{k}$ 線型関手のなす $\mathbf{k}$ 線型圏であり、$\operatorname{Vect}_{\mathbf{k}}$ は $\mathbf{k}$ 線型空間のなす $\mathbf{k}$ 線型圏である。

すなわち、関手 1 つ 1 つを加群と呼び、それらの間の自然変換を加群の射と呼ぶのである。対応する定義を A の言葉で表すとその正当性が納得できるはずである ([VdB11, Section 2] 参照)。また、次数つき代数 S に対して標準的な圏同値

$$\operatorname{Grmod}S\simeq\operatorname{Grmod}\check{S} \tag{1.11}$$

が構成できる。この意味で $\mathbb{Z}$ 代数は次数つき代数の一般化になっている。

以下、右加群のことを単に加群と呼ぶことにする。

定義 1.5. (1) $\mathbb{Z}$ 代数 A が

$$A=\bigoplus_{i\le j} A_{i,j} \tag{1.12}$$

かつ

$$A_{i,i}=\mathbf{k}e_i \quad (\forall i) \tag{1.13}$$

を満たすとき、A は連結であるという。

(2) A 加群 M が $i\gg 0$ に対して $M_i=0$ を満たすとき、上に有界であるという。上に有界な加群の順極限になっている加群全体のなす $\operatorname{Grmod}A$ の部分圏を $\operatorname{Tors}A$ で表す。これは Serre 部分圏になっているため商アーベル圏 $\operatorname{Grmod}A/\operatorname{Tors}A$ が定義できるが、それを $\operatorname{QGr}A$ で表す。

(3) A が右 Noether の時、有限生成右加群からなる $\operatorname{Grmod} A$ の部分圏を $\operatorname{grmod} A$ で表す。これは再びアーベル圏である。また、$\operatorname{Tors} A$ との共通部分を $\operatorname{tors} A$ で表し、それによる Serre 商を $\operatorname{qgr} A$ で表す。また、商関手を

$$\pi\colon \operatorname{grmod} A \to \operatorname{qgr} A \tag{1.14}$$

で表す。

QGr は元来次数つき代数に対して定義されていた概念だが、$\mathbb{Z}$ 代数にまで一般化された。次数つき代数から構成された $\mathbb{Z}$ 代数に対しては次数つき代数の QGr と自然に同値になる。

qgr を考える動機は次の圏同値にある (Serre の定理)。

$$\begin{aligned} \operatorname{coh} X \simeq \operatorname{coh}[V \setminus \{0\} / \mathbb{G}_m] \simeq \operatorname{coh}[V/\mathbb{G}_m] / \operatorname{coh}_{[0/\mathbb{G}_m]}[V/\mathbb{G}_m] \\ \simeq \operatorname{coh}^{\mathbb{G}_m} V / \operatorname{coh}_0^{\mathbb{G}_m} V \simeq \operatorname{grmod} R(X,L) / \operatorname{tors} R(X,L) \simeq \operatorname{qgr} R(X,L) \end{aligned} \tag{1.15}$$

ただし (X, L) は L が十分豊富な偏極多様体であり、$V = \operatorname{Spec} R(X,L)$ である。代数群 $\mathbb{G}_m = \mathbf{k}^*$ の作用は $R(X,L)$ の次数づけから決まっている。また、coh_Z は閉部分多様体 (スタック)Z に台を持つ (同変) 層のなす部分圏である。

2. 非可換変形とその変形理論

[Gab62] で証明されたように、体 $\mathbf{k}$ 上の代数多様体 X の同型類は連接層の圏 $\operatorname{coh} X$ の $\mathbf{k}$ 線型アーベル圏としての構造から一意的に復元することができる。また、X の平坦な変形はアーベル圏 $\operatorname{coh} X$ の [LVdB06] の意味での平坦な変形を引き起こす。前者を X の**可換変形**、後者を X の**非可換変形**と呼ぶことにすると、実は後者の方が自由度が大きい。次にこれを説明しよう。

アーベル圏の変形理論は [LVdB05] で確立されており、基礎体 $\mathbf{k}$ の標数が 0 の場合には圏の Hochschild 微分次数つき Lie 代数 (differential graded Lie algebra, dgla) によってコントロールされることがわかっている[5]。特に非特異代数多様体 X に対して $\operatorname{coh} X$ の変形を考えると、Hochschild-Kostant-Rosenberg 同型 (HKR 同型) と合わせて次のことがわかる。

- 1 次無限小変形 (すなわち $\mathbf{k}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 上の変形) の同値類は

$$\operatorname{HH}^2(X) \simeq H^2(\mathcal{O}_X) \oplus H^1(T_X) \oplus H^0\left(\wedge^2 T_X\right) \tag{2.1}$$

  の元と 1 対 1 対応する。
- 変形の障害空間として

$$\operatorname{HH}^3(X) \simeq \bigoplus_{p+q=3} H^q(\wedge^p T_X) \tag{2.2}$$

  が取れる。

(2.1) の右辺の 3 成分はそれぞれ gerby 変形、可換変形、(正則)Poisson 変形と呼ばれる変形の方向に対応している。特に、可換変形が非可換変形の特別な場合であることが見て取れる。

X が非特異曲線の場合、(2.1) の右辺は可換方向しか残らない。その意味で非可換変形が意味を持つのは曲面の場合からである。この場合 (2.1) の第 3 成分は $H^0(-K_X)$ に他ならない。また、この記事では非可換有理曲面の場合だけを扱うが、その場合第 1 成分は消えてしまう。

[5] Hochschild dgla は結合的代数の変形理論において導入された概念だが、$\mathbf{k}$ 線型圏を上述のように「対象が沢山ある $\mathbf{k}$ 代数 ($\mathbf{k}$-algebroid)」と思うことによって Hochschild dgla の定義を拡張することができる。

X が del Pezzo 曲面[6]の場合、HKR 分解の右辺を見ることで $\mathrm{HH}^3(X) = 0$ が証明できる。従ってこの場合は非可換変形が障害を持たないことになり、非可換変形のモジュライ空間が (スタックとして) 特異点を持たないということになる。なお、X として Hirzebruch 曲面[7] $\mathbb{F}_d = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$ を考えると、$d > 3$ の時に障害射が非自明になることが知られている ([Got16, Remark 5, Proposition 9]。この論文では $\mathbb{F}_d$ の複素構造から決まる一般化された複素構造 (generalized complex structure、GCS) の変形を論じているが、実は GCS の変形理論とアーベル圏の変形理論が一致することがわかっている [VdB07])。なお、Hirzebruch 曲面を少し非可換変形したものは必ず [VdB12] の意味の「$\mathbb{P}^1$ 上の非可換 $\mathbb{P}^1$ 束」であることが証明されており、特にそれらは (非可換射影平面等の場合と同様に) 可換代数幾何的な対象でパラメトライズされることがわかっている。この結果は GCS による視点よりも精密であると言えよう。なお、具体的な分類や導来圏的な視点については筆者らが研究している [MOU]。

3 次元以上の Fano 多様体を考えると非可換変形は一般に障害されている。最も基本的な場合である $\mathbb{P}^3$ ですら、非可換変形が分類されたのは最近である [Pym15]。なお、一部の非可換 $\mathbb{P}^3$ は非可換 del Pezzo 曲面を閉部分多様体として含んでおり、この点を理解するのは今後の課題である。

3. 3 次元正則代数と種数 1 曲線の幾何

$A = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} A_{i,j}$ を連結な $\mathbb{Z}$ 代数とする。局所単位元 $e_i \in A_{i,i}$ を用いて定義される射影対象

$$P_i = e_i A \in \operatorname{grmod} A \tag{3.1}$$

は単純対象への全射

$$P_i \to S_i \to 0 \tag{3.2}$$

を持つ。これをふまえて以下が定義される。

定義 3.1. (1) 以下の条件が満たされるとき、連結な $\mathbb{Z}$ 代数 A は *quadratic* **な** *3* **次元** *(Artin-Schelter)* **正則代数**と呼ばれる[8]。

(i) 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbf{k}} \operatorname{Ext}^k_{\operatorname{Grmod} A}(S_i, P_j) = 1 \tag{3.3}$$

が成立する (*AS-Gorenstein* 条件)。

(ii) 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して次の形の完全列が存在する。

$$0 \to P_{i+3} \to P_{i+2}^{\oplus 3} \to P_{i+1}^{\oplus 3} \to P_i \to S_i \to 0. \tag{3.4}$$

(2) (1) において (3.4) を次の形の完全列に置き換えたものを *cubic* **な** *3* **次元正則代数**と呼ぶ。

$$0 \to P_{i+4} \to P_{i+3}^{\oplus 2} \to P_{i+1}^{\oplus 2} \to P_i \to S_i \to 0. \tag{3.5}$$

Quadratic な 3 次元正則代数の典型例は 3 変数多項式環 $S = \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ に付随する $\mathbb{Z}$ 代数である。このとき (3.4) は Koszul 解消に他ならない。Serre の圏同値 $\operatorname{qgr} \check{S} \simeq \operatorname{qgr} S \simeq \operatorname{coh} \mathbb{P}^2$ を思い出すと、次の定義が妥当であるとわかる。

---

[6] 反標準束 $\wedge^2 T_X$ が豊富であるような非特異射影代数曲面のこと。分類が知られており、射影平面を一般の位置にある 8 つ以下の点で爆発して得られる曲面または 2 次曲面である。

[7] $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ 束のことであるが、同型類は $\mathbb{F}_d$ $(d \geq 0)$ たちで完全に代表されることが知られている。なお、d のパリティが同じもの同士は変形で互いに繋がる。

[8] Quadratic の適当な和訳が思いつかなかったので無理をせず英語のままにした。

定義 3.2. Quadratic な 3 次元正則代数 A から定まる $\operatorname{qgr} A$ と $\mathbf{k}$ 線型圏として同値なアーベル圏を**非可換射影平面**と呼ぶ。同様に、cubic な 3 次元正則代数 A から定まる圏を**非可換 *2* 次曲面**と呼ぶ。

[AS87] においては 3 次元正則代数 (の次数つき代数版) が導入され、その分類が試みられた。分類が完成したのは [ATVdB90] においてであった。そこでは、3 次元正則代数の分類が平面 3 次曲線とその (代数群ではなく単に代数曲線としての) 自己同型の組の分類と等価であることが証明された。これは真に驚くべき発見であった。以下、この結果の $\mathbb{Z}$ 代数版 ([BP93] で示された。) を紹介する。

定義 3.3. 許容可能な *3* つ組 *(admissible triple)* (Y, L_0, L_1) とは

- 種数 1 の曲線 Y
- Y 上の非常に豊富な直線束 L_0, L_1

であって以下の条件を満たすものである。

- L_i は Y を $\mathbb{P}^2$ に 3 次曲線として埋め込む。
- $L_0 \not\simeq L_1$。
- 任意の既約成分 $C \subset Y$ に対して $\deg L_0|_C = \deg L_1|_C$。

定理 3.4. *Quadratic な 3 次元正則代数であって* qgr *が* $\operatorname{coh} \mathbb{P}^2$ *と同値でないものの同型類は許容可能な 3 つ組の同型類と 1 対 1 対応する。*

対応を説明する。まず A を定理のような $\mathbb{Z}$ 代数として、積

$$m\colon A_{0,1} \otimes A_{1,2} \to A_{0,2} \tag{3.6}$$

に注目する。代数に関する仮定からこれが全射であることがわかり、3 次元部分ベクトル空間

$$\ker m \subset A_{0,1} \otimes A_{1,2} \simeq H^0 \left(\mathbb{P}A_{0,1} \times \mathbb{P}A_{1,2}, \mathcal{O}(1,1)\right) \tag{3.7}$$

を得る。$\ker m$ の定める $\mathbb{P}A_{0,1} \times \mathbb{P}A_{1,2} \simeq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の閉部分スキームを Y とすると、仮定から Y は完全交叉となり、特に種数 1 の射影的代数曲線となる ($\operatorname{qgr} A \simeq \operatorname{coh} \mathbb{P}^2$ となる場合は $Y \simeq \mathbb{P}^2$ となるが、この場合は除いているのであった)。さらに L_0, L_1 をそれぞれ $\mathcal{O}(1,0), \mathcal{O}(0,1)$ の Y への制限とすることで、許容可能な 3 つ組が得られる。

逆に、許容可能な 3 つ組 (Y, L_0, L_1) が与えられたとする。このとき Y 上の直線束の列 $(L_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ を漸化式

$$L_i \otimes L_{i+1}^{\otimes -2} \otimes L_{i+2} \simeq \mathcal{O}_Y \tag{3.8}$$

によって定義する。すると各 i について自然な写像

$$H^0(L_i) \otimes H^0(L_{i+1}) \to H^0(L_i \otimes L_{i+1}) \tag{3.9}$$

が全射になることがわかる。この写像の核を R_i とする。

$A_{i,i+1} := H^0(L_i)$ とし、これらで自由に生成される $\mathbb{Z}$ 代数を考える。これを R_i たちの生成する両側イデアルで剰余したのが所望の A である。詳しくは [VdB11] や [BP93] を読んでいただきたい。

定理 3.4 の状況において、さらに興味深い事が示せる。

$$M_i := \bigotimes_{k\in(-\infty,\ i-1]} L_k^{-1} \tag{3.10}$$

とし、これらの定める部分圏

$$(M_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subset \operatorname{coh} Y \tag{3.11}$$

を $\mathbb{Z}$ 代数と見たものを考えよう[9]。$B = \mathrm{Alg}\left((M_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)$ とすると、自然な全射

$$A \to B \tag{3.12}$$

が存在することがわかる。よって充満忠実な関手

$$\mathrm{qgr}\, B \hookrightarrow \mathrm{qgr}\, A \tag{3.13}$$

ができるが、実は

$$\mathrm{qgr}\, B \simeq \mathrm{coh}\, Y \tag{3.14}$$

となっていることがわかる。実際、Y の自己同型 σ であって $L_1 \simeq \sigma^* L_0$ を満たすものが存在するのであるが (一般には 9 個存在する)、これを用いると $B \simeq R(Y, L_0, \sigma)^\vee$ となっている。ただし $R(Y, L_0, \sigma)$ は捻り斉次座標環 (twisted homogeneous coordinate ring, [AVdB90]) である。$R(Y, L_0, \sigma)$ は一般には非可換環であり、$R(Y, L_0, \mathrm{id}_Y) = R(Y, L_0)$ である。今の場合 (L_0, σ) が Y の「豊富な対」であるため、$\mathrm{qgr}\, R(Y, L_0, \sigma) \simeq \mathrm{coh}\, Y$ が証明できる。

これにより、Y が非可換射影平面 $\mathrm{qgr}\, A$ に因子として埋まっている、という描像ができる。特に Y 上の点は $\mathrm{qgr}\, A$ の点とみなせるわけだが、逆に A の点加群 (point module) は Y の上にしかないということがわかる。

これをふまえて、[VdB01] において、$\mathrm{qgr}\, A$ の (複数) 点における爆発が定義された。爆発の結果は次数つき環・アーベル圏・導来圏のいずれとも思えるのであるが、導来圏と思った場合に Orlov 型の半直交分解があることも証明された。例えば 6 点爆発の場合を考えると可換 3 次曲面の非可換変形が出来るわけだが、それらと非可換 $\mathbb{P}^3$ の 3 次超曲面との関係は完全には理解されていない。

なお、qaudratic な 3 次元正則代数 A は必ず 1 周期的であることがわかっており、quadratic な 3 次元正則次数つき環から来ることがわかる。対応する幾何学的なデータの対応は

$$(Y, L_0, \sigma) \mapsto (Y, L_0, L_1 = \sigma^* L_0) \tag{3.15}$$

となっており、一般には 9 対 1 対応であることがわかる。

注 3.5. 非可換射影平面の中に平面 3 次曲線が入っているのは何故か？という問に対する完全な解答はまだ得られていないと言える。しかし、次のような概念的な説明がある。

射影平面の非可換変形は $0 \neq \beta \in H^0\left(\mathbb{P}^2, \wedge^2 T_{\mathbb{P}^2}\right)$ によって与えられる。β は直線束の切断なので零点集合を考えると $\mathbb{P}^2$ の閉部分多様体になるが、それは平面 3 次曲線に他ならない。また、そこは非可換変形が自明になっている部分である。従って、その曲線は非可換変形後の射影平面にそのまま閉部分多様体として埋まっているわけである。

この描像は GCS[Gua11] の言葉で厳密化することができる。この場合、β は最初に与えられた複素構造から決まる GCS の正則 Poisson 変形を引き起こす。GCS は可微分多様体上のベクトル束の自己同型であるが、その変形が β の零点上のファイバーでは自明になるわけである。変形後の一般化された複素多様体上で type 数を見ると、β の零点集合上では 2、その外では 0 ということになる。これを標語的に「β の零点集合上では複素多様体、その外ではシンプレクティック多様体になっている」と表現することがある。

GCS と非可換代数幾何の関係は現時点で明らかでない。主たる困難は、一般化された複素多様体に対してその上の対象の良い dg 圏を定義する事が出来ていないというところにある。しかし、Gualtieri や Cavalcanti らが解明に向けて研究を進めているようである。

---

[9] わかりやすさを優先して、記号を濫用した。要するに j から i への射が $H^0\left(Y, M_j^{-1} \otimes M_i\right)$ となるような圏のことである ($M_j^{-1} \otimes M_i$ は M_j と M_i の「ズレ」の部分を表している、と読むと意味が通る)。

4. 印つき非可換 del Pezzo 曲面とモジュライ

次に、$\mathbf{k}$ 線型アーベル圏 $\operatorname{qgr} A$ から $\mathbb{Z}$ 代数 A の同型類がどこまで復元できるか、という問題を考えよう。A が quadratic な 3 次元正則代数の時、実は A の同型類が $\operatorname{qgr} A$ の情報だけから復元できることがわかっている ([SvdB01]。証明は [AOU14, Appendix] 参照)。これは非可換射影平面の特殊事情であり、一般には正しくない。これを説明するために cubic な 3 次元正則代数 (非可換 2 次曲面) の場合について少し説明をしたい。

Cubic な 3 次元正則代数について quadratic の場合と完全に平行な結果を確立したのが [VdB11] である。特に $\operatorname{qgr} A \not\simeq \operatorname{coh} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であるような cubic3 次元正則代数 A の同型類が許容可能な 4 つ組 (Y, L_0, L_1, L_2) の同型類と 1 対 1 対応する事が証明されている。ただし、ここで

- Y は種数 1 の射影曲線。
- L_i は Y 上の直線束で $L_0 \not\simeq L_2$。
- $L_0 \otimes L_1, L_1 \otimes L_2$ はどちらも非常に豊富で、Y を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に次数 $(2,2)$ の因子として埋め込む。
- 任意の既約成分 $C \subset Y$ について $\deg L_0|_C = \deg L_2|_C$。

Quadratic 代数の場合と違い、cubic 代数の場合には $\operatorname{qgr} A$ から A の同型類を復元することはできない。それどころか A の同型類の集合に離散無限群 $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ が qgr を保つように作用することがわかっている。具体的には、生成元の作用を許容可能な 4 つ組で表すと

$$(Y, L_0, L_1, L_2) \mapsto (Y, L_1, L_2, L_3) \tag{4.1}$$

$$(Y, L_0, L_1, L_2) \mapsto (Y, L_{-1}, L_2, L_1) \tag{4.2}$$

となる[10]。

このように、代数を復元しようとすると圏に情報を付加しないとならないということがわかる。これは、非可換 del Pezzo 曲面の「良い」モジュライ空間を構成するためには圏同値類そのものを見るのではなく「印つき (marked) 圏」の同値類を考えるべきであるという事を示唆する[11]。そのような付加的な情報として (導来) 圏の**充満強例外対象列** *(full strong exceptional collection, FSEC)* を考えるべきである、というのが筆者らの立場である。これは筆者らによる非可換 del Pezzo 曲面のモジュライの構成法の基礎にもなっている。

定義 4.1. $\mathcal{T}$ をある程度性質の良い $\mathbf{k}$ 線型三角圏とする。$\mathcal{T}$ の対象の列 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r \in \mathcal{T}$ が次の条件をみたすとき FSEC と呼ばれ、記号

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r \rangle \tag{4.4}$$

で表される。

(1) $\mathcal{T}$ は $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_r$ を含む最小の三角圏である。
(2) $[k = 0$ かつ $i \leq j]$ が成立する場合を除いて

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j[k]) = 0 \tag{4.5}$$

となる。
(3) 全ての $\mathcal{E}_i$ について $\mathcal{T}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i) = \mathbf{k} \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{E}_i}$ が成立する。

[10]直線束 L_i は L_0, L_1, L_2 から漸化式

$$L_i \otimes L_{i+1}^{-1} \otimes L_{i+2}^{-1} \otimes L_{i+3} \simeq \mathcal{O}_Y \tag{4.3}$$

で定まる。

[11]例えばアーベル多様体のモジュライ空間を考える時は実際には偏極つきアーベル多様体のモジュライを考えるのであった。

非特異射影多様体 X の導来圏を考えた時、FSEC を持つというのはとても強い制約である。例えばその仮定から自動的に $K_0(X) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus r}$ が従う。よって、例えば、射影直線以外の曲線の導来圏が FSEC を持たないということがわかる[12]。

一方、del Pezzo 曲面は常に FSEC を持つということがわかる。より強く、(爆発する点の個数が 3 以上ならば)3-block FSEC という大変性質の良い FSEC を持つことがわかっている [KN98]。

FSEC の各メンバー $\mathcal{E}_i$ を考えると、仮定から $\mathcal{T}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i[1]) = \mathcal{T}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i[2]) = 0$ である。これは、圏 $\mathcal{T}$ を変形した時に $\mathcal{E}_i$ も一意的に・必ず変形することを意味する [LVdB06]。従って、del Pezzo 曲面の非可換変形のうち少なくとも一般のものは FSEC を持つことになる。

以上を踏まえて次の定義を導入する。

定義 4.2. $\mathcal{C}$ を非可換 del Pezzo 曲面とする。このとき $\mathcal{C}$ の印づけ (marking) とは、導来圏 $D^b(\mathcal{C})$ の FSEC のことである。

例 4.3. Quadratic な 3 次元正則代数 A を考える。対応する非可換射影平面を便宜的に X で表し、$\operatorname{qgr} A = \operatorname{coh} X$ と思う。このとき「直線束」を

$$\mathcal{O}_X(i) := \pi(P_{-i}) \in \operatorname{coh} X \tag{4.6}$$

と定めると

$$D^b \operatorname{coh} X = \langle \mathcal{O}_X(-2), \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_X \rangle \tag{4.7}$$

という FSEC がある。

同様に Cubic な 3 次元正則代数の場合を考えると

$$D^b \operatorname{coh} X = \langle \mathcal{O}_X(-3), \mathcal{O}_X(-2), \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_X \rangle \tag{4.8}$$

という FSEC がある。$X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合には右辺の 4 つの対象はそれぞれ

$$\mathcal{O}_X(-2,-1), \mathcal{O}_X(-1,-1), \mathcal{O}_X(-1,0), \mathcal{O}_X \tag{4.9}$$

となる。一般には、これらを変形して得られる対象が右辺にあらわれているわけである。

$D^b \operatorname{coh} X$ から FSEC を 1 組取った時、それらだけを対象とした部分圏

$$\mathcal{C} = (\mathcal{E}_i)_{i=1,2,\ldots,r} \subset D^b \operatorname{coh} X \tag{4.10}$$

を $\{1, 2, \ldots, r\}$ 代数と見たものが大事である。$R = \operatorname{Alg}(\mathcal{C})$ を考えると、これを ($Q_0 = \{1, 2, \ldots, r\}$ を満たすような) 特定の箙 Q から決まる道代数 $\mathbf{k}Q$ の商代数として表現することができる。表現に対応する $\mathbf{k}^r$ 代数の全射準同型 $\mathbf{k}Q \to R$ の核として得られる両側イデアルを I とすると、I を $G = \operatorname{Aut}_{\mathbf{k}^r} \mathbf{k}Q$ の作用で動かしても商代数の $\mathbf{k}^r$ 代数としての同型類は変わらないことになる。また、両側イデアルとして長さ 1 の道を含まないものだけを考えるならば、商代数の同型類を変えないようなイデアルの取り替え方はこれで尽きるということもわかる。以上より

$$X \mapsto [I \mod \text{the action of } G] \tag{4.11}$$

という対応ができるわけであるが、これを「X から線型代数的なデータを抽出する操作」と思うことで、X の変形をパラメトライズするモジュライ空間やその (GIT) コンパクト化が構成できる。特に非可換 del Pezzo 曲面に対してこのプログラムを実行することができる。以下、非可換射影平面の場合に限ってこの話をする。内容が一部 [Ued14] と重複部分があるが、説明の都合上くり返すことにする。詳細に興味を持っていただけた場合には元論文 [AOU14, OUa] も見ていただきたい。

[12] FSEC を持つならばその多様体は有理的なのではないか、という folklore があるが、証明も反証もされていない。$p_g = 0$ の一般型代数曲面のことを考えると、容易な問題とは言えないであろう。

次の形の箙 Q を考える (Beilinson quiver)。

$$-2 \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} -1 \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} 0 \tag{4.12}$$

Quadratic な 3 次元正則代数 A に対して FSEC(4.7) を考えると、それに対応する $\mathbb{Z}$ 代数 B へ Q の道代数 $\mathbf{k}Q$ からの $\mathbf{k}^3$ 代数としての全射準同型

$$\varphi\colon \mathbf{k}Q \twoheadrightarrow B \tag{4.13}$$

が構成できる。ただし、これを構成するためには

$$\operatorname{qgr} A\left(\mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-1)\right) = A_{1,2} \tag{4.14}$$

および

$$\operatorname{qgr} A\left(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}\right) = A_{0,1} \tag{4.15}$$

のベクトル空間としての基底を 1 組ずつ選ばないといけない。その選び方の自由度は上述の群 $G = \operatorname{Aut}_{\mathbf{k}^3} \mathbf{k}Q$ の作用と等価である。

さて、記号

$$U = e_{-1}\mathbf{k}Qe_{-2},\ V = e_0\mathbf{k}Qe_{-1} \tag{4.16}$$

を用意する。これらはともに 3 次元の $\mathbf{k}$ ベクトル空間である。この記号のもとで、全射準同型 φ の核は 3 次元部分ベクトル空間 $I \subset V \otimes U$ で与えられる[13]。これを**箙 Q の関係式**と呼ぶ。また、$G = GL(V) \times GL(U)$ である。以上をふまえて次のように定義する。

定義 4.4. 非可換射影平面のモジュライスタックとは商スタック

$$\mathcal{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2} := \left[\operatorname{Grass}(3, V \otimes U)/G\right] \tag{4.17}$$

のことである。

商スタックの定義にあらわれる代数群 G は、今の例の場合簡約である。よって、対応する GIT 商が定義できる。ここで、G の中心 $\simeq \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ は $\operatorname{Grass}(3, V \otimes U)$ に自明に作用しているので、GIT 商を考えるときには GL を PGL に取り替えて商を考えることにする。さらに、本質的に GIT を変えないので PGL をエタール被覆 SL に取り替えることで以下の定義を得る。

定義 4.5. 非可換射影平面のコンパクト化されたモジュライ空間を GIT 商

$$\mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2} := \operatorname{Grass}(3, V \otimes U) /\!/ SL(V) \times SL(U) \tag{4.18}$$

として定義する。ただし、$/\!/$ は半安定点集合[14]の圏論的商 (categorical quotient) を表す。

[Ued14] でも説明されているように、実は不変式環が知られており、$\mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2} \simeq \mathbb{P}(6, 9, 12)$ であることがわかる[15]。特にモジュライは 2 次元である。これは変形理論

$$\begin{aligned} \mathrm{HH}^3\left(\mathbb{P}^2\right) &= 0, \\ \mathrm{HH}^2\left(\mathbb{P}^2\right) &\simeq H^0\left(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)\right) \simeq \mathbf{k}^{10}, \\ \mathrm{HH}^1\left(\mathbb{P}^2\right) &\simeq H^0\left(\mathbb{P}^2, T_{\mathbb{P}^2}\right) \simeq T_{\mathrm{id}} \operatorname{Aut} \mathbb{P}^2 \simeq \mathbf{k}^8 \end{aligned} \tag{4.19}$$

[13] これは (3.7) と本質的に同じものである。

[14] 今の場合 $\operatorname{Grass}(3, V \otimes U)$ の同変 Picard 群は階数 1 なので、VGIT はなく、GIT 安定性は一意に決まる。

[15] Vinberg による「次数つき Lie 環に付随する Weyl 群の不変式論」の特別な例になっており、不変式環が適当な複素鏡映群 (有限群) の不変式環と同型になることがわかるので、計算できるということになっている。今の場合は $\mathfrak{e}_6$ を $\mathbb{Z}/3$ 次数づき Lie 環と思ったものに付随する不変式論になっているのだが、何故この次数つき Lie 環があらわれるのか、という問に対する明快な解答を持っていない。なお、このあたりの不変式論の話は量子情報理論の論文 [BLTV04] で知った ([OUb] も見よ)。

から求まる期待次元 $10-0-8=2$ とちゃんと符合している。

$\mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ の点は次のようにモジュライ解釈できる。以下、開部分集合 $\mathrm{M}^{\mathrm{o}}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2} \subset \mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ を安定点集合の商とする。

(1) $\mathrm{M}^{\mathrm{o}}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ の点は Y が非特異であるような許容可能な 3 つ組から定まる非可換射影平面[16]の圏同値類と自然に 1 対 1 対応している。
(2) 曲線 $\Delta := \mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2} \setminus \mathrm{M}^{\mathrm{o}}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ は cuspidal cubic curve と同型である。
(3) Δ の特異点 0 に対応する閉軌道は可換な $\mathbb{P}^2$ に対応する箙の関係式の軌道である。
(4) Δ には上述の点以外にもう 1 つ特別な点 ∞ があり、この点に対応する箙の関係式はどの非可換射影平面にも対応しない。
(5) $\Delta \setminus \{0, \infty\}$ の点に対応する閉軌道は、Y が $\mathbb{P}^1$3 本の三角形と同型であるような非可換射影平面から決まる箙の関係式からなる。特に、そのようなタイプの非可換射影平面の圏同値類と 1 対 1 対応する。
(6) $\mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ の 2 つの商特異点は共に $\mathrm{M}^{\mathrm{o}}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ に含まれている。これらは、曲線 Y が虚数乗法から来る余分な自己同型を持っており、さらにそれが 3 つ組 (Y, L_0, L_1) の自己同型になっているような非可換射影平面の同値類に対応している。
(7) $\mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ を可換な $\mathbb{P}^2$ に対応する点で適当に重みつき爆発すると、種数が 1 で 2 点つきの安定曲線の粗モジュライ空間 $\overline{\mathrm{M}}_{1,2}$ と同型になる。自然な射 $\pi\colon \overline{\mathrm{M}}_{1,2} \to \overline{\mathrm{M}}_{1,1}$ を $\overline{\mathrm{M}}_{1,1}$ の普遍族 (の粗モジュライ) とみなすと 0 切断
$$o\colon \overline{\mathrm{M}}_{1,1} \to \overline{\mathrm{M}}_{1,2} \tag{4.20}$$
があるが、この像を収縮する射がちょうど上述の重みつき爆発の射に一致する。$\overline{\mathrm{M}}_{1,2} \to \mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ は、一般点 $(Y, o, p) \in \overline{\mathrm{M}}_{1,2}$ を 3 つ組 $(Y, \mathcal{O}_Y(3o), \mathcal{O}_Y(3p))$ に対応する非可換射影平面 (が定める箙の関係式) に送る。

なお、箙の関係式 $I \subset V \otimes U$ から逆に 3 つ組を復元することもできる。次にこれを説明する。

関係式つき箙 (Q, I) の次元ベクトル $(1,1,1)$ の表現全体を考え、その中で安定性条件 $\chi = (-2,1,1)$ について安定なものだけを集めてできるファインモジュライ空間 [Kin94] を考える。その上には普遍表現があるので、特に Q の各頂点に対応して直線束 $\mathcal{L}_{-2}, \mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_0$ が乗っている。$\mathcal{L}_{-2}$ をモジュライの構造層に正規化しておけば、実はモジュライ空間が曲線 Y を与え、また $\mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_0$ がそれぞれ L_0, L_1 を与えるのである。

ここまで、$\mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ の話は全て特定の FSEC(4.7) を使って行ってきた。$\mathbb{P}^2$ の導来圏には無限に FSEC があるため、他の FSEC を使っても当然同様の話ができるわけである。ところが、$\mathbb{P}^2$ の導来圏の FSEC は全て (4.7) に何回か変異 (mutation) という操作を施すことで得られることがわかっている。これは、Markov 方程式と呼ばれる Diophantus 方程式
$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz \tag{4.21}$$
の自然数解が全て基本的な解 $(3,3,3)$ に何回か変異 (mutation) という操作を施すことで得られる、ということに密接に関係している [GK04, Bri05]。これを用いると、実は、異なる FSEC に対して構成した $\mathrm{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$ が全て互いに標準的に同型である、ということが証明できる。これは射影平面の場合にだけおきる特別な現象で、他の del Pezzo 曲面の場合にはモジュライの異なる双有理モデルが得られる。ただし、3-block FSEC に限定して考えれば、射影平面の場合と同様な現象が観察できる。

以上、非可換射影平面の場合に限って話をしてきたが、全く平行な話が他の del Pezzo 曲面に対しても成立する[17]。射影平面の場合ですらかなり内容があるわけで、他の del Pezzo 曲面についても調べようとすると膨大な話になる (可換な del Pezzo 曲面のモジュライやそのコンパクト化ですら、大変な蓄積のある話題である)。なお、低い次数の del Pezzo 曲

[16](3 変数多項式環を除いた)3 次元 Sklyanin 代数から定まる非可換射影平面、と言ってもよい。

[17]Abdelgadir-大川-植田で鋭意準備中。

面には可換な変形も存在するが、可換な変形のモジュライが非可換変形のモジュライの閉部分多様体になることがわかる。可換変形のモジュライのコンパクト化と非可換変形のモジュライのコンパクト化の関係を調べるのは興味深い問題である。

なお、非可換代数多様体のモジュライ (特に K 安定性の一般化) は [BN15] でも扱われている。筆者らとは全く異なる定義を採用しており、筆者らの定義で不安定だがかれらの定義では半安定性な非可換射影平面があるようである。一方で一般化された Kähler 多様体に対する Kähler-Einstein 計量の理論も後藤竜司氏らによって構築されつつあるようであり、その意味での計量の存在と安定性の関係は気になるところである。

References

[AOU14] Tarig Abdelgadir, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda, *Compact moduli of noncommutative projective planes*, 2014.

[AS87] Michael Artin and William F. Schelter, *Graded algebras of global dimension* 3, Adv. in Math. **66** (1987), no. 2, 171–216. MR 917738 (88k:16003)

[ATVdB90] M. Artin, J. Tate, and M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 33–85. MR 1086882 (92e:14002)

[AVdB90] M. Artin and M. Van den Bergh, *Twisted homogeneous coordinate rings*, J. Algebra **133** (1990), no. 2, 249–271. MR 1067406 (91k:14003)

[AZ94] M. Artin and J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes*, Adv. Math. **109** (1994), no. 2, 228–287. MR MR1304753 (96a:14004)

[BLTV04] Emmanuel Briand, Jean-Gabriel Luque, Jean-Yves Thibon, and Frank Verstraete, *The moduli space of three-qutrit states*, J. Math. Phys. **45** (2004), no. 12, 4855–4867. MR 2105225 (2005g:81055)

[BN15] Kai Behrend and Behrang Noohi, *Moduli of non-commutative polarized schemes.*

[BP93] A. I. Bondal and A. E. Polishchuk, *Homological properties of associative algebras: the method of helices*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **57** (1993), no. 2, 3–50. MR 1230966 (94m:16011)

[Bri05] Tom Bridgeland, *t-structures on some local Calabi-Yau varieties*, J. Algebra **289** (2005), no. 2, 453–483. MR MR2142382 (2006a:14067)

[CI05] Daniel Chan and Colin Ingalls, *The minimal model program for orders over surfaces*, Invent. Math. **161** (2005), no. 2, 427–452. MR 2180454 (2008b:16043)

[CI12] ———, *Conic bundles and Clifford algebras*, New trends in noncommutative algebra, Contemp. Math., vol. 562, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 53–75. MR 2905553

[Gab62] Pierre Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448. MR 0232821 (38 #1144)

[GK04] A. L. Gorodentsev and S. A. Kuleshov, *Helix theory*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 2, 377–440, 535. MR 2108443 (2005i:14020)

[Got16] Ryushi Goto, *Unobstructed deformations of generalized complex structures induced by C^∞ logarithmic symplectic structures and logarithmic poisson structures*, pp. 159–183, Springer Japan, Tokyo, 2016.

[Gua11] Marco Gualtieri, *Generalized complex geometry*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 1, 75–123. MR 2811595 (2012h:53185)

[Kin94] A. D. King, *Moduli of representations of finite-dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **45** (1994), no. 180, 515–530. MR MR1315461 (96a:16009)

[KN98] B. V. Karpov and D. Yu. Nogin, *Three-block exceptional sets on del Pezzo surfaces*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **62** (1998), no. 3, 3–38. MR 1642152 (99k:14069)

[LVdB05] Wendy Lowen and Michel Van den Bergh, *Hochschild cohomology of abelian categories and ringed spaces*, Adv. Math. **198** (2005), no. 1, 172–221. MR 2183254 (2007d:18017)

[LVdB06] ———, *Deformation theory of abelian categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 12, 5441–5483 (electronic). MR 2238922 (2008b:18016)

[Mor10] Izuru Mori, *Noncommutative algebraic geometry*, Sūgaku **62** (2010), no. 2, 219–239. MR 2641972

[MOU] Izuru Mori, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda, *Moduli of non-commutative Hirzebruch surfaces*, 鋭意準備中.

[OR15] Andrei Okounkov and Eric Rains, *Noncommutative geometry and Painlevé equations*, Algebra Number Theory **9** (2015), no. 6, 1363–1400. MR 3397405

[OUa] Shinnosuke Okawa and Kazushi Ueda, *Noncommutative quadric surfaces and noncommutative conifolds*, arXiv:1403.0713.

[OUb] ———, *Quantum entanglement, Calabi-Yau manifolds, and noncommutative algebraic geometry*, arXiv:1402.3768.

[Pym15] Brent Pym, *Quantum deformations of projective three-space*, Adv. Math. **281** (2015), 1216–1241. MR 3366864

[Sak01] Hidetaka Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **220** (2001), no. 1, 165–229. MR 1882403

[Sie11] Susan J. Sierra, *G-algebras, twistings, and equivalences of graded categories*, Algebr. Represent. Theory **14** (2011), no. 2, 377–390. MR 2776790 (2012d:16128)

[SvdB01] J. T. Stafford and M. van den Bergh, *Noncommutative curves and noncommutative surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), no. 2, 171–216. MR 1816070 (2002d:16036)

[Ued14] Kazushi Ueda, **箙の関係式のモジュライ空間**, 代数幾何学シンポジウム 2014 プロシーディングス, 2014.

[VdB01] Michel Van den Bergh, *Blowing up of non-commutative smooth surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **154** (2001), no. 734, x+140. MR 1846352 (2002k:16057)

[VdB07] ———, *On global deformation quantization in the algebraic case*, J. Algebra **315** (2007), no. 1, 326–395. MR 2344349 (2008i:14018)

[VdB11] ———, *Noncommutative quadrics*, International Mathematics Research Notices. IMRN (2011), no. 17, 3983–4026. MR MR2836401 (2012m:14004)

[VdB12] M. Van den Bergh, *Non-commutative* $\mathbb{P}^1$*-bundles over commutative schemes*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 12, 6279–6313. MR 2958936

大阪大学大学院理学研究科
E-mail address: okawa@math.sci.osaka-u.ac.jp