幾何学と数

小川 裕之 (大阪大学大学院 理学研究科)[†]

於 龍野北高等学校 2009 年 6 月 18 日

§1. 幾何学略史

よく知られたことですが, 幾何学は, ナイル川氾濫後の土地測量など, 実用上の目的のための図形に対する知識の積み重ねが起源とされています. Thales や Pythagoras 学派, あるいは Zeno らの Elea 派における議論に, 知識を証明によって記述する論証数学の萌芽がみられ, Euclid は原論 (Stoicheia) で, 幾何学の知識を基本的な仮定 (公理, 公準) のもとで証明によって論理的な体系にまとめました. 原論では有理数 (分割数) や 2 次実無理数 (直角三角形の斜辺の長さなど, 2 次方程式の解) などの実数も扱われていますが, 図形の中で捉えていました. 数についての純粋に代数的な考察は, インド数学を経て al-Khwarizmi らによるアラビア代数学で方程式の理論として発展しました.

図形の学問であった幾何学は, 中世以降のヨーロッパにおける代数学や解析学の発展の中で進展しました. 実数は直感的に数直線と同一視され, Descartes の空間座標の創始 (17 世紀中頃) により, 図形の性質は数の関係式で表せるようになりました. 幾何学に代数的, 解析的手法が取り入れられるようになり, 職人芸的な証明の多くは, 単に方程式を解く問題に帰着されました. 座標幾何学あるいは解析幾何学といいます. そこから, Gauss 曲率など新たな幾何学的概念も見出され, 微分幾何学への道が開かれました.

座標を使わずに図形を直接考察する幾何学もあります. 総合幾何学といいます. 問題の種類によっては, 座標幾何学よりも考えやすい問題もあります. 総合幾何学は古典的な幾何学とも言えますが, 真に新しい幾何の構築はこの立場から生まれたものが多くあります. 例えば, 遠近法から始まった射影幾何学, 平行線の公理の否定を公理にもつ非 Euclid 幾何学など. 座標幾何学にしろ総合幾何学にしろ, 手段の違いに過ぎなかったのですが, 非 Euclid 幾何学の発見により固有の幾何をもつ様々な空間が見つかり, 多種多様な幾何学が意識されるようになりました.

Klein は 1872 年の Erlangen 大学教授就任の際, 研究プログラムを大学に提出しました. Erlangen 目録と呼ばれ, 群によって幾何学を分類し統制しようという指導原理です. Erlangen 目録で Euclid 幾何学は, 運動群 (合同変換群) によって不変な affine 空間の性質と言えます. Klein の洞察により, 多種多様であった幾何学が種々の変換群に関する等質空間の幾何学になりました. Erlangen 目録の枠組みでは捉えきれない幾何学も見つかりましたが, 修正し内容を深化させてきました. 等質空間の幾何学は, 代数学や解析学など, 現代数学の非常に多くの分野と関わりながら発展していきました. しかし, Klein は幾何学のひとつのまとめ方を述べたに過ぎません. 幾何学は Erlangen 目録の閉じた世界にだけあるのではなく, 非 Euclid 幾何学が Euclid 幾何学から生まれ出たように, 今も新しい幾何学が生まれようとしています.

§2. 序 (順序がちょっと変ですが . . .)

等質空間の幾何学のさわりを, 実数や複素数など数の性質と絡めながら紹介します. Descartes の座標幾何学は, Euclid 空間に座標を与え, 図形の性質を座標を使った数 (量) の関係式で表すものでした. Erlangen 目録の立場では, Lie 環から等質空間を作りそこに内在する幾何を抽出し研究することになります. 数に組み込まれている幾何を調べることで, 数の世界をより深く垣間見ることができるのです.

§3. 数直線と実数の公理

直線は実数の全体に対応しています. この対応も考慮して, 数直線と呼びます. 要するに実数の目盛りの付いた定規のことです. 「2 点を $s:t$ $(s, t>0)$ に内分する点を求めよ」と言う問いを考えてみましょう. 平面に書かれた直線上の 2 点の内分と考えれば, 簡単な作図で答えられます. 実数 a, b の内分なら, 単なる分数 $\frac{ta+sb}{t+s}$ が答

[†] 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

えです．でも良く考えるとちょっと変なのです．例えば $1 : \pi$ に内分する点を作図できるのでしょうか．陸上競技などで距離を測る回転円板などの特殊な道具を使えば可能ですが, 円周率の超越性 (1882 年 Lindemann) により定規とコンパスだけでは不可能です．Euclid 幾何学や直感的な数直線と実数の同一視では, 作図や計測という作業を伴って実数と数直線の対応を見ていました．実数 a, b を $1 : \pi$ に内分する数は $\dfrac{a\pi + b}{\pi + 1}$ のはずですが, $\dfrac{a\pi + b}{\pi + 1}$ は本当に直線上の目的の位置に存在するのでしょうか．

かつては数直線上の点こそが実数だったのですが, 小数が収束する数列 (級数) であり, 収束する数列の収束先 (極限値) が実数であり, 収束性がとても微妙な概念であることが認識されるに至り, 実数を公理論的に整備する必要性がでてきました．実数は 3 つの公理「四則演算の公理」「順序の公理」「連続性の公理」で定まる数学的概念です．「四則演算の公理」は 4 つの演算, 加減乗除の定義と計算手続きをまとめたものです．「順序の公理」は大小関係のことで, どの 2 つの実数も大きさを比べられることを保証します．大きさの順に重なりなく真っ直ぐに実数を並べることができますが, 隙間があるかもしれません．「連続性の公理」は, 簡単に言うと, 直線状に実数を並べたとき隙間がないことです．3 つの公理により, 実数の全体は数直線に同一視できるのです．

「連続性の公理」には沢山の表現方法があります． Archimedes が自明の真理と思っていた “任意の正の数 $0 < a < b$ について, ある整数 n で $na > b$ を満たすものが存在する” や, Weierstrass の “有界な単調数列は収束する” などなど．Weierstrass の表現を少し言い換えると, “有界な単調数列の収束先にあたる実数が存在する” となります．「四則演算の公理」と「順序の公理」より内分を考えれば, 直線上で実数の抜けたところは幅を持った空白地帯ではなくポツポツとあいた穴になっています．穴の下側から, 穴に近づいていく (穴に収束する) 単調増加数列が取れます．その数列の収束先は実数なので, 穴が実数で埋められました．

ところで, 高校の教科書の幾つかで採用されている数列の収束の定義に, “数列 $\{a_n\}$ が収束するとは, n を限りなく大きくすると, a_n が一定の値 α に限りなく近づく” というものがあります．数直線のイメージに頼った直感的な表現で, 定量的な取り扱いが多少面倒ですが,「連続性の公理」の下で良い定義と言えます．一見するとこの定義に従って, Weierstrass の表現が導けそうに思えますが, “一定の値 α に” の部分に「連続性の公理」が使われているのです．「連続性の公理」は気がつき難いところにしばしば隠れています．

§4.　平面図形の幾何学と複素数

複素数は, 自乗して -1 になる虚数単位 i と, 実部と虚部の 2 つの実数を使って表される数です．実部虚部を座標に取れば, 複素数は平面上の点に対応します．この対応を込めて複素平面 (複素数平面) と呼びます．複素数の全体が平面をなすことを連続性を使って公理論的に眺めることは省略します．手続きが易しいか難しいかは別にして, 平面図形の幾何学を複素数を使った代数的な性質に言い換えることができます．Erlangen 目録に従うなら, 長さ, 角度, 平行線など図形を描くための材料と, 平行移動, 回転, 対称移動など図形の合同変換, 拡大縮小などの相似変換を, 複素数の代数式で表せばよいのです．

まずは, ベクトルで考えてみます．ベクトルは幾つかの数の組を並べてひとまとめにしたものです．長さはベクトルの絶対値, 角度はベクトルの内積, 平行線はベクトルの加法とスカラー倍で表せます．平行移動はベクトルの加法, 回転や対称移動は一次変換, 拡大縮小はスカラー倍です．平面だけでなくもっと高次元の Euclid 幾何学もベクトルの方程式で記述できます．ベクトルは幾つかの数の組なので, 素朴には座標と大差なく見えますが, 座標は単に位置を表すのに対して, ベクトルは図形的な意味も併せもつので幾何学に適しています．

ベクトルで上手くいった平面図形の幾何を複素数で考えることで, ご利益はあるのでしょうか．試しに, 三角形の内角の和が 180° であることを複素数で見てみましょう．複素平面上で z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形を考えます．すぐ後で述べますが, 頂点 z_1 での角は分数 $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ で表せます．角は向きにも注意がいりますが, z_2, z_3 の角はそれぞれ $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}, \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ です．角度の和は複素数の積なので,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\,\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\,\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \;=\; -1$$

となります．負の実数が 180° (の向き) なので, 三角形の内角の和が 180° であることが示されました．図形と複素数の関係を説明していませんが, 計算自体はとても簡単です．

ベクトルでもやってみましょう. 三角形の各辺を半時計回り $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とおくと, 三角形なので $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ となる. 頂点の角度の余弦は内積を使って, $-\vec{a}\cdot\vec{b}/|\vec{a}||\vec{b}|$, $-\vec{b}\cdot\vec{c}/|\vec{b}||\vec{c}|$, $-\vec{c}\cdot\vec{a}/|\vec{c}||\vec{a}|$ となる. 正弦も求めて, ベクトルと三角関数の加法公式の計算問題になります. 古典的な証明方針では, 辺 $\vec{a}$ と平行な線を向かい合った頂点を通るように引き, 錯角が等しいことを使えばよいのですが, ベクトルを使った気がしない $\cdots$.

図形要素と合同変換, 相似変換を複素数の言葉で表してみましょう. 長さは複素数の絶対値で, 平行線, 平行移動は複素数の加法と実数倍, 拡大縮小も実数倍で表せます. 角度と回転移動は極形式で説明します. 複素平面上で複素数を表すのに実部虚部を座標にもつ点を考えました. 原点からみて実軸正の部分となす角 θ と原点からの距離 r を使って, $z=r(\cos\theta+i\,\sin\theta)$ (極形式) で複素平面上の点を表せます. θ を z の偏角と言い, $\arg z=\theta$ とおきます. 複素数の積と三角関数の加法公式により $\arg z_1+\arg z_2=\arg(z_1z_2)$ が確かめされます. 従って, 原点を中心とし z_1 と z_2 を見込む角は $\arg z_2/z_1$ です. 長さの情報を無視すれば, 複素数そのものが角なのです. 角の和は複素数の積, 角の差は複素数の商です. $180°$ に相当するのは実軸負の方向なので, 先ほどの三角形の内角の和の話しでは, 角を表す 3 つの複素数の積が負の実数であることを示せばよかったのです. 対称移動は, 回転移動と組み合わせれば実軸との対称移動で十分です. これは複素数の虚部の符号を変える, 複素共役です. 平面図形の図形要素, 合同変換, 相似変換はすべて複素数の絶対値や四則演算, 複素共役で表せました.

§5. 複素平面の幾何学

前節では平面図形の幾何学を複素数で表現しましたが, 極形式などそもそも複素数自体に幾何学の素地がありました. Erlangenn 目録に従い複素数自体に内包する幾何学を呼び出すことができます. 合同変換 (形を変えない 1 対 1 写像) を与え, 変換で不変な計量を求め, 測地線 (2 点間の最短経路) を決めればよいのです. 測地線に沿って長さを測ることで, 2 点間の長さが定まります. 測地線のなす角は交点での局所的なものなので, 傾きベクトルのなす角で定義できます. これは計量とは無関係で, 図形を考える空間を決めたときに定義されます. 合同変換の定義の形を変えないとは, 変換の前後で角度を変えないこと (等角写像) なのです.

複素数全体における合同変換 (等角写像) は $\varphi_{a,b}:z\mapsto a\,z+b$ と $\overline{\varphi}_{a,b}:z\mapsto a\,\overline{z}+b$ $(a,\,b\in\mathbb{C},\,|a|=1)$ で, 不変な計量は $|dz|$ です. 実際 $|d\varphi_{a,b}(z)|=|\dfrac{d\varphi_{a,b}(z)}{dz}\,dz|=|a|\,|dz|=|dz|$ となり, これが計量が不変であることの定義です. $|d\overline{\varphi}_{a,b}(z)|$ の計算はちょっと面倒ですが, 全微分を使って確かめられます. 変分原理により, 測地線は通常の直線であることもわかります. 話しが少し複雑になりましたが, この幾何学は 2 次元 Euclid 幾何学なのです.

§6. 複素上半平面と非 Euclid 幾何学

複素平面で虚部が正のもの全体を考えましょう. 実数の並んだ実軸より上にあるので, それら全体を複素上半平面といいます. 合同変換 (等角写像) は一次分数変換と呼ばれる $\varphi:z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R},\,ad-bc=1)$ で, 不変計量は $|\dfrac{dz}{\operatorname{Im} z}|$ ($\operatorname{Im} z$ は z の虚部) です. 実際, $\dfrac{\operatorname{Im}\varphi(z)}{\operatorname{Im} z}=\dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2}>0$ なので φ は複素上半平面の間の変換で, $\dfrac{d\varphi(z)}{dz}=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$ なので φ は等角写像です. $|\dfrac{d\varphi(z)}{dz}|=|\dfrac{\operatorname{Im}\varphi(z)}{\operatorname{Im} z}|$ なので, $|\dfrac{dz}{\operatorname{Im} z}|$ は不変計量です. 測地線を求めるのは大変ですが, 実軸に垂直な線と, 実軸上に中心をもつ半円です. こうして複素上半平面に幾何学が定義されました.

この幾何学は非 Euclid 幾何学です. 複素上半平面上にはありませんが, 話しを簡単にするために実軸上の 3 点 0, 1, 2 を頂点とする三角形を描いてみましょう. 三角形とは頂点のみで交わる 3 つの測地線で囲まれた図形です. 0 と 1 を結ぶ測地線は 1/2 を中心とする半径 1/2 の半円で, 1 と 2 を結ぶ測地線は 3/2 を中心とする半径 1/2 の半円, 2 と 0 を結ぶ測地線は 1 を中心とする半径 1 の半円です. 3 辺は実軸上で交わり, 実軸と直交しているので, なす角はすべて 0 です. この三角形の内角の和は 0 になりました. 複素上半平面内の三角形ではもう少し計算が要りますが, 三角形の内角の和は $180°$ より真に小さくなります. この幾何学は非 Euclid 幾何学です. 「平行線の公理」を満たさないことも, 容易に直接確かめられます.

§7. Hamilton の四元数と 3 次元 Euclid 幾何学

1 次元 Euclid 幾何学 (直線の幾何学) と実数, 2 次元 Euclid 幾何学 (平面図形の幾何学) と複素数の関係を話しました. 最後に, 3 次元 Euclid 幾何学 (立体図形の幾何学) と Hamilton の四元数という複素数を拡張した数の世界との関係を話しましょう. これで, 平面図形や立体図形の問題はすべてある種の数の方程式で書けることになるでしょう.

i, j, k を $i^2 = j^2 = -1, ij = -ji, k = ij$ なる記号 (数) とし, 集合 $\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ に四則演算を定めたものを, Hamilton の四元数といいます. $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ に対して i, j, k の係数の符号を変えた $\overline{\alpha} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ を α の共役と言います. 複素数に習って a_0 を α の実部, $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ を虚部と言い, 実部が 0 のものを純虚数と呼びます. $\beta = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \mathbb{H}$ に対して,

$$\begin{aligned} &\text{加法 (減法)} \quad \alpha \pm \beta = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) i + (a_2 \pm b_2) j + (a_3 \pm b_3) k \quad \text{(複号同順)} \\ &\text{乗法} \quad \alpha\beta = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) i \\ &\qquad + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1) j + (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0) k \end{aligned}$$

で定義します. 乗法は, i, j, k の積の順序 ($ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$) と分配法則によっても定義できます. 乗法の定義は $a_\bullet$ と $b_\bullet$ について対称ではないので, 一般に $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ です. この乗法は可換ではありません. 実部は $a_\bullet$ と $b_\bullet$ について対称なので, $\alpha\beta$ の実部と $\beta\alpha$ の実部は一致します. 共役との和を $\mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha + \overline{\alpha}$, 積を $\mathrm{N}(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$ とおきます. $\mathrm{Tr}(\alpha) = 2a_0$ は α の実部の 2 倍で, $\mathrm{N}(\alpha) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ は非負実数です. 従って $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) = \mathrm{Tr}(\beta\alpha)$ が成り立ちます. $\alpha \neq 0$ なら $\mathrm{N}(\alpha)$ は 0 でない実数なので, $\dfrac{1}{\mathrm{N}(\alpha)}\,\overline{\alpha}$ は $\mathbb{H}$ に属し, α の逆数になります. 除法が定まり $\mathbb{H}$ に四則演算が定義されました.

Hamilton の四元数に新たに 2 つの演算 ($\bullet$ と $\times$) を次式で定義します.

$$\alpha \bullet \beta = \frac{1}{2}(\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha}) \qquad \alpha \times \beta = \frac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha)$$

$\alpha \bullet \beta$ は $\alpha\overline{\beta}$ の実部なので値は実数で, $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$ などベクトルの内積と同じ性質を持つことが四元数の計算で示せます. $\alpha \times \beta$ は実部を持たない純虚数で, $\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$ (半対称性) を満たします. ちょっと面倒ですが $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) = \mathrm{Tr}(\beta\alpha)$ なども使って, $(\alpha \times \beta) \bullet \alpha = (\alpha \times \beta) \bullet \beta = 0$ (直交性) が得られます.

純虚数は実部が 0 なので, 純虚数の全体は $\mathbb{H}^- = \{\alpha \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Tr}(\alpha) = 0\}$ です. 純虚数は $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ と表せるので (a_1, a_2, a_3) なる 3 次元 Euclid 空間の点に対応します. このことは Tr 写像の線形性からも言えます. この安直な対応でも出来るのですが, 四元数の代数的性質から $\mathbb{H}^-$ に 3 次元 Euclid 幾何学の構造を与えます. 3 次元 Euclid 空間の一つの特徴として, 外積 (ベクトル積) があります. 少し計算は面倒ですが, 純虚数 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{H}^-$ に対して $\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha \bullet \gamma)\beta - (\alpha \bullet \beta)\gamma$ が成り立ち, Jacobi 律 $\alpha \times (\beta \times \gamma) + \beta \times (\gamma \times \alpha) + \gamma \times (\alpha \times \beta) = 0$ が得られます. $(\alpha \times \beta) \bullet \gamma$ が 3 次元の体積要素, つまり行列式になることも少し線形代数の知識が必要ですが証明できます. 以上のことから $\bullet$ は内積で $\times$ は外積 (ベクトル積) に相当します. 詳細は省きますが, 内積 $\bullet$ と外積 $\times$ により $\mathbb{H}^-$ に 3 次元 Euclid 空間の構造が定まるのです. Erlangen 目録の流儀とは少し違った方針ですが, Hamilton の四元数の中に 3 次元 Euclid 幾何学を, 代数的に記述することができました.

もうひと言付け加えると, 3 次元 Euclid 空間の外積は, 与えられた 2 つのベクトルと右手系で直交する方向のベクトルを定めるもので, 幾何的に定義されたものした. $\mathbb{H}^-$ での $\times$ は, 非可換な積演算から代数的に定義され, 自然に外積としての特徴が現れたのです. ちなみに $|\alpha \times \beta|$ が α, β で張られた平行四辺形の面積に等しいことは次の様に意味付けられます. α と β のなす角 θ は $\alpha \bullet \beta = |\alpha|\,|\beta| \cos\theta$ で定義されます. 四元数だけにある関係式 $\alpha\beta = -(\alpha \bullet \beta) + \alpha \times \beta$ から $1 = \left(\dfrac{\alpha \bullet \beta}{|\alpha|\,|\beta|}\right)^2 + \left(\dfrac{|\alpha \times \beta|}{|\alpha|\,|\beta|}\right)^2$ が得られます. 右辺の 1 項目は $\cos^2\theta$ なので 2 項目は $\sin^2\theta$ です. 従って目的の $|\alpha \times \beta| = |\alpha|\,|\beta|\,|\sin\theta|$ を得ました.