調和級数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ のはなし

小川 裕之　(大阪大学大学院 理学研究科) †

於　西宮東高等学校　2012 年 6 月 20 日

§0　序

分子が 1 の分数を単位分数と言います. 単位分数を並べた数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ を調和数列と言い, すべての単位分数の和 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ を調和級数と言います. 調和数列の極限は 0 に収束しますが, 調和級数は無限大に発散します. 一般に収束する級数において, 各項の極限は 0 に収束します. 調和級数はこのことの逆が成り立たない例でもあります. 今日は, 調和数列, 調和級数を軸にして数の世界に遊んでみましょう.

§1　調和級数の発散と Euler 定数

1.1　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散は, 部分和 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ $(=\sum_{k=1}^{n} a_k)$ の数列 $\{S_n\}$ が収束するかどうかを調べればわかります. 等比級数 $1+r+r^2+\cdots$ $(r\neq1)$ では, $S_n=1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ となり, 極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は, $|r|<1$ のとき $\frac{1}{1-r}$ に収束し, $|r|\geq1$ のとき収束しません. 調和級数でも部分和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ を何か式で表して, 極限を頑張って計算すればよい. しかし, 調和級数の部分和を何か意味のある数式で表すことはとても難しく, 現代数学において重要な問題のひとつです. この章の最後にひとつの評価式を与えますが, それは調和級数が発散することの証明の後に得られるものなので, 発散を証明しようという今の段階では使えません.

1.2　解析学の基本技術のひとつに, 不等式で易しい対象に置き換えて計算してみる, と言うものがあります. $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}>\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}>\frac{1}{8}$. $\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$ のように, 単位分数をそれより小さい, 分母が 2 の冪の単位分数に置き換えると,

$$S_1 = 1 = \frac{2}{2}$$
$$S_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$
$$S_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

となります. このとき $S_{2^r}\geq\frac{r+2}{2}$ となります. $r\to\infty$ とすると $\frac{r+2}{2}\to\infty$ なので, 調和級数の部分和の列 $\{S_n\}$ が正の無限大に発散し, 調和級数が正の無限大に発散します.

1.3　調和級数が無限大に発散することがわかりました. 部分和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ は無限大に発散するので, 和をとる項数 n をどんどん大きくとればいくらでも大きな値になってゆくはずです. 1.2 節より $n\geq2^r$ とすると $S_n\geq S_{2^r}\geq\frac{r+2}{2}$ となります. r をどんどん大きくとると S_n もどんどん大きくなります. $r=8$ ととると, $n\geq2^8$ に対して $S_n\geq S_{2^8}\geq\frac{8+2}{2}=5$ です. 実際 $S_{2^8}=6.12434$ なので $n\geq2^8=256$ に対して $S_n\geq6.12434\geq5$ が成り立ちます. S_n がどんどん大きくなることはわかりますが, 実際の値との差が大きく, 本当のところがよく見えません. 部分和 S_n の値をいくつか計算してみましょう. (表の数値は四捨五入ではなく, 切り捨てています. 書いてある数はそのままその桁まで正しく確定した値です.)

n	S_n	n	S_n	n	S_n	n	S_n	n	S_n	n	S_n
1	1	10	2.92896	100	5.18737	1000	7.48547	10000	9.7876	10^1	2.9289
2	1.5	20	3.59773	200	5.87803	2000	8.17836	20000	10.4807	10^2	5.1873
3	1.83333	30	3.99498	300	6.28266	3000	8.58374	30000	10.8861	10^3	7.4854
4	2.08333	40	4.27854	400	6.56992	4000	8.87139	40000	11.1738	10^4	9.7876
5	2.28333	50	4.49920	500	6.79282	5000	9.09450	50000	11.3970	10^5	12.0901
6	2.45	60	4.67987	600	6.97497	6000	9.27681	60000	11.5793	10^6	14.3927
7	2.59285	70	4.83283	700	7.12901	7000	9.43095	70000	11.7334	10^7	16.6953
8	2.71785	80	4.96547	800	7.26245	8000	9.56447	80000	11.8670	10^8	18.9978
9	2.82896	90	5.08257	900	7.38016	9000	9.68225	90000	11.9847	10^9	———
10	2.92896	100	5.18737	1000	7.48547	10000	9.78760	100000	12.0901	10^{10}	———

部分和 S_n は少しずつ大きくなっていますが, 1 億項 (10^8) まで足してやっと 18.9978 です. 増え方はとても緩やかで, いくらでもどんどん大きくなっていくような勢いは感じません.

[問い]　部分和 S_n が　100 を超えるのは和を取る項数 n が幾つのときでしょうか?
部分和 S_n が 1000 を超えるのは和を取る項数 n が幾つのときでしょうか?
部分和 S_n が 10000 を超えるのは和を取る項数 n が幾つのときでしょうか?

† 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1-1　　ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

1.4　調和級数の発散の証明に話を戻してみましょう. 積分を使った証明を紹介します. 単位分数 $\dfrac{1}{k}$ を, 底辺 1 高さ $\dfrac{1}{k}$ の長方形の面積とみます. その長方形を, x-軸の $x{=}k$ から $x{=}k{+}1$ のところに底辺を, 長方形自身は y-座標が正のところに置きます. 単位分数 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}$ に対応する長方形を並べると, $x=1$ から $x=n{+}1$ まで階段状の図形が得られます. この図形の面積は, 調和級数の部分和 $S_n{=}1{+}\frac{1}{2}{+}\frac{1}{3}{+}\cdots{+}\frac{1}{n}$ です. 双曲線 $y{=}\frac{1}{x}$ のグラフは, 各長方形の左上の頂点 $(k, \frac{1}{k})$ を通り, $x{=}1$ から $x{=}n{+}1$ の範囲で階段状の図形の中に描かれます. 双曲線 $y{=}\frac{1}{x}$, 直線 $x{=}1$, $x{=}n{+}1$, と x-軸で囲まれた図形は階段状の図形に含まれます. 面積をみると,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^{n+1} = \log(n{+}1)$$

$\lim\limits_{b\to\infty} \log(n{+}1){=}\infty$ なので, 部分和はいくらでも大きくなり, 調和級数が正の無限大に発散します.

1.5　調和級数の部分和 S_n を面積とする階段状の図形を x-軸負の方向へ 1 だけずらすと, 双曲線 $y{=}\frac{1}{x}$ のグラフの下に収まります. $x{=}0$ から 1 までの部分を別にして面積を比べると, $S_n{<}1{+}\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx{=}1{+}\log n$ となります. 2 つの数列 $b_n{=}S_n{-}\log(n{+}1)$, $c_n{=}S_n{-}\log n$ を考えます. b_n, c_n は階段状の図形と双曲線で囲まれた図形の面積で表され, b_n は小さい図形を少しずつ増やしていくので単調増加, c_n は小さい図形を少しずつ減らしていくので単調減少となります. $0{<}b_n{<}c_n{<}1$ で, $c_n{-}b_n{=}\log(1{+}\frac{1}{n}){\to}0$ $(n{\to}\infty)$ なので, $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ は同じ数に収束します. これを γ とおき, Euler 定数と呼びます. Euler 定数は有理数であるか無理数であるか何もわかっていませんが, その値は $\gamma{=}0.57721566490153286\cdots$ と計算されています.

1.6　数列 $\{b_n\}$ は単調増加で, $\{c_n\}$ は単調減少でともに Euler 定数 γ に収束するので, $b_n{<}\gamma{<}c_n$ となる. $b_n{=}S_n{-}\log(n{+}1)$, $c_n{=}S_n{-}\log n$ なので, $\log n{+}\gamma{<}S_n{<}\log(n{+}1){+}\gamma$ を得ました. この評価式を使って 1.3 節の問いを考えてみましょう. $S_{n-1}{<}10{\le}S_n$ とすると, $\log(n{-}1){+}\gamma{<}S_{n-1}{<}10{\le}S_n{<}\log(n{+}1){+}\gamma$ なので $e^{10-\gamma}{-}1{<}n{<}e^{10+\gamma}{+}1$ となります. $e^{10-\gamma}{=}12366.96$ なので $n{=}12366$ または $n{=}12367$ です. $S_{12366}{=}9.999962$, $S_{12367}{=}10.000043$ なので, $S_n{\ge}10$ となる最小の n は $n{=}12367$ です. 同様にして少し計算してみましょう.

$e^{10-\gamma}$	$=$ 12366.96			S_{12366}	$=$ 9.999962	S_{12367}	$=$ 10.000043
$e^{11-\gamma}$	$=$ 33616.90			S_{33616}	$=$ 10.999988	S_{33617}	$=$ 11.000017
$e^{12-\gamma}$	$=$ 91380.22	S_{91379}	$=$ 11.999992	S_{91380}	$=$ 12.000003		
$e^{13-\gamma}$	$=$ 248397.19	S_{248396}	$=$ 12.999997	S_{248397}	$=$ 13.000001		
$e^{14-\gamma}$	$=$ 675213.58			S_{675213}	$=$ 13.999999	S_{675214}	$=$ 14.000001
$e^{15-\gamma}$	$=$ 1835420.80			$S_{1835420}$	$=$ 14.999999	$S_{1835421}$	$=$ 15.000000
$e^{16-\gamma}$	$=$ 4989191.02	$S_{4989190}$	$=$ 15.999999	$S_{4989191}$	$=$ 16.000000		
$e^{17-\gamma}$	$=$ 13562027.29	$S_{13562026}$	$=$ 16.999999	$S_{13562027}$	$=$ 17.000000		
$e^{18-\gamma}$	$=$ 36865412.36	$S_{36865411}$	$=$ 17.999999	$S_{36865412}$	$=$ 18.000000		

$S_{n-1}{<}100{\le}S_n$ となる n を求めてみましょう. $e^{100-\gamma}{-}1{<}n{<}e^{100-\gamma}{+}1$ で, $e^{100-\gamma}{=}1.5092688{\times}10^{43}$ (!) なので, n は 44 桁の自然数です. より詳しく計算すると $e^{100-\gamma}{=}15092688622113788323693563264538101449859497.364$ なので, $n{=}15092688622113788323693563264538101449859497$ または $n{=}15092688622113788323693563264538101449859498$ となります. どっちでしょう? 44 桁までの数について逆数の和を求めるのは現在の計算機では処理できません.

1.7　調和級数の部分和 S_n について, $\log n{+}\gamma{<}S_n{<}\log(n{+}1){+}\gamma$ が成り立ちます. $r_n{=}S_n{-}(\log n{+}\gamma)$ とおくと, r_n は正で, 単調減少 $(r_n{>}r_{n+1})$ し, 0 に収束 $(\lim\limits_{n\to\infty} r_n{=}0)$ します. $S_n{=}\log n{+}\gamma{+}r_n$ と書けば, 調和級数の部分和を表す数式と思えます. このとき r_n を誤差項と呼びます. $S_n{<}\log(n{+}1){+}\gamma$ なので, 誤差項は $0{<}r_n{<}\log(1{+}\frac{1}{n}){<}\frac{1}{n}$ と評価されます. つまり S_n と $\log n{+}\gamma$ の差は $\frac{1}{n}$ より小さいのです. 誤差項 r_n についてはもっと詳しく調べられていますが, もう十分に難しいところまで来ているので, この話はここでとどめておきましょう.

§2　素数と調和級数

2.1　調和級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}{=}1{+}\frac{1}{2}{+}\frac{1}{3}{+}\cdots$ が無限大に発散することを証明し, 発散の様子を観察しました. すべての自然数に対して逆数の和を取ったら無限大に発散したわけですが, 自然数の中の一部分を選んで逆数の和を考えてみるとどの様になるでしょうか. 自然数を偶数と奇数に分けて, 偶数についての逆数の和, 奇数についての逆数の和を考えるとき, それらは収束するのでしょうか, 発散するのでしょうか. すぐにわかることですが, これらはどちらも無限大に発散します. 自然数を半々に分けたぐらいでは収束するものを作り出すのは難しそうです. 自然数の中で 2 の冪 (2^n の形の数) を集めると, それらの逆数は $\dfrac{1}{2^n}$ なので, 公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比級数 (等比数列の和) となり, $\dfrac{1}{1{-}1/2} = 2$ に収束します. これではあまりにつまらない. 収束するかしないかぎりぎりどうか? ってところ

を見てみるのが面白そうです．そこでやや唐突ですが，素数について考えてみましょう．素数を集めて，すべての素数の逆数の和 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots)$ を考えてみましょう．

2.2　素数が有限個しかなければ，素数の逆数の和は明らかにある有理数になります．このとき分母が全ての素数の積になるので，その数に意味がない訳ではありませんが，出来ることなら素数が無数に多くあると言う状況で考えてみたい．素数は無数に多くあることが，Euclid により次の簡明な手続きで証明されています．

[証明]　$p_1, p_2, \cdots, p_r$ を異なる素数とし，$N=p_1p_2\cdots p_r+1$ とおきます．
N は $p_1, p_2, \cdots, p_r$ では割り切れないので，N の素因数 p は $p_1, p_2, \cdots, p_r$ と異なる素数です．
有限個の素数を幾ら集めてもそれらと異なる素数が存在するので，素数は無数に多くなければならない．

2.3　安心して，素数の逆数の和を考えることができます．無価値な問題設定ではないことがわかったわけです．結論から言うと，素数の逆数の和は無限大に発散することが，18 世紀に Euler によって得られました．

[定理] (Euler)　素数の逆数の和 $\sum_{p:\text{素数}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$ は無限大に発散する．

話の流れから行きますと，ここでこの定理を証明しなければなりません．証明にはかなり難しい解析と代数を使うため，残念ながらこの講演では割愛します．ですが，高校数学の限度を超えているのを承知の上で，概略を話しましょう．整数論の基本定理 (すべての自然数は素数の積として一意的に表せる) より，調和級数 $\sum\frac{1}{n}$ は素数に関する無限積 $\prod_{p:\text{素数}}(1-\frac{1}{p})^{-1}$ (Euler 積という) で表せます．無限積が収束するか発散するかは，無限積の各項に現れる $\frac{1}{p}$ のすべての和が収束するかどうかで決まります．そもそも調和級数が発散していたので，無限積も発散しており，無限積の各項に現れる $\frac{1}{p}$ すべての和 (素数の逆数の和) も発散しなければならない．この証明で無限積の収束条件が少し難しいので，無限積の対数を取って素数の逆数の和と関連づける方法もあります．

2.4　ともかく，これで素数の逆数の和が発散することが証明されるのですが，難しい言葉で煙に巻いた感じで，まったくわかった気がしないと思います．ところがこの証明を良く読むと，素数が無数にあるかどうかを使っていないことに気づきます．素数が無数に多く存在することについて Euclid のものとは全く異なる証明が得られます．

[証明] (Euler)　素数の逆数の和が無限大に発散するので，素数は無数に多く存在しなければならない．

これは驚くべきことです．素数の個数に関する純粋に代数的なものに対して，級数やらなんやら，解析を使った全く異なるアプローチが発見されたのです．これ以降，素数の量的な分析に解析学が大きな役割を演じることになりました．3 で割って 1 余る素数が無数にあること，4 で割って 1 余る素数が無数にあることなど，その様な素数について逆数の和を考えることで得られます (Dirichlet の算術級数定理)．素数定理 (自然数の中で素数がどの程度の割合で含まれるか) なども，自然数の負の冪乗の和や調和級数の部分和の誤差項の精密な評価などから得られます．素数が無数に多く存在すると言うことだけなら，Euclid によってギリシャ時代に証明されたことではありますが，Euler はその頃の最先端の解析学を駆使して新しい方向へ導き，新しい世界を開拓したのです．

2.5　双子素数というものがあります．差が 2 の素数の組を双子素数といいます．双子素数 (の組) は無数に多く存在するであろうと予想されています．双子素数の逆数の和を考えてみましょう．

[定理] (Brun, 1919)　双子素数の逆数の和 $\sum_{(p,p+2):\text{双子素数}}(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2})$ は収束する．

網羅的に素数を見つける効率的な方法として Eratosthenes の篩があります．数に篩をかけて，素数など目的の数をすくい取る方法を篩法と言います．篩法により Brun は双子素数の逆数の和が収束することを示し，これを持って双子素数の逆数の和を Brun の定数といいます．Thomas R. Nicely は 2010 年に，2×10^{16} (2 京 !) 以下の双子素数 (19,831,847,025,792 個，19 兆 8 千億個 !) をすべて求め，Brun の定数 (1.902160583209±0.000000000781) を計算しました．双子素数が無数にあるかどうか知るために逆数の和を考えたのですが，有限の値に収束したため，無数にあるか有限個であるかわかりません．でも，Nicely の計算から双子素数自身は意外に沢山あると思いませんか? それでも逆数の和は収束し，それもとても小さい値 (2 を越えない !) に収束しているのです．

§3　完全数，過剰数など

3.1　調和級数は無限大に発散するので，異なる単位分数を足していくと幾らでも大きい数が現れます．部分和 $S_6=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{49}{20}=2.45$ から幾つか単位分数を選んで $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$ とできます．この様に異なる単位分数を幾つか集めて 3, 4, 5, 6, $\cdots$ と自然数を表すことができるでしょうか? またその表し方はどのぐらいあるのでしょうか? ただ一通りでしょうか，無数に多くの表し方があるのでしょうか? 正の有理数でも同じ問題を考

えることができるでしょうか. つまり, 任意の正の有理数に対して, 異なる単位分数を幾つか集めてその和が与えられた有理数に等しくなるようにできるでしょうか? またその表し方は何通りあるのでしょうか? 正の実数ではどうでしょうか? どの様に問題を設定し, どの様に考えればいいのでしょうか.

3.2 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$ ですが, 分母を 6 で通分して分子だけを眺めると, $6+3+2+1=2\times 6$ となります. 左辺は 6 の約数の和で, それが 6 の 2 倍に等しい. 6 の真の約数 (6 自身をのぞく) の和にすると, $3+2+1=6$ となります. 真の約数の和がもとの数に等しい自然数を完全数と言います. 28 も $14+7+4+2+1=28$ なので完全数です. $28+14+7+4+2+1=2\times 28$ の両辺を 28 で割ると $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$ となります. 完全数は単位分数の和で 2 や 1 を表すことに関係があります. 自然数 n の正の約数の和を $s(n)$ とおきます. $s(1)=1$, $s(2)=1+2=3$, $s(3)=1+3=4$, $s(4)=1+2+4=7$ です. n が完全数であるための必要十分条件は $s(n)=2n$ です. $\frac{s(n)}{n}$ を考えます. $s(n)$ は n の約数の和ですから, 各項を n で割ると, 約分されて分母が n の約数の単位分数になります. つまり, $\frac{s(n)}{n}$ は n の約数を分母とする単位分数の和に等しい. 完全数 n に対して $\frac{s(n)}{n}=2$ なので, 異なる単位分数の和で 2 を表せます. 最初の 1 の項を除くと, 異なる単位分数の和で 1 を表したことになります. 奇数の完全数はまだひとつも見つかっていませんが, 偶数の完全数は $2^r(2^r-1)$ ($2r-1$ が素数) の形をしており, 現在 40 数個見つかっています. 完全数を使って 40 数通りの異なる形の単位分数の和で 1 または 2 を表せます. 更に, 簡単な恒等式 $\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k(k+1)}$ を組み合わせると, いくらでも異なる表し方ができます. 以上により,

[**定理**] 正の有理数は異なる単位分数の有限個の和で表すことができ, 無数に多くの異なる表し方がある.

3.3 自然数 n について, $\frac{s(n)}{n}=2$ のとき完全数, $\frac{s(n)}{n}>2$ のとき過剰数, $\frac{s(n)}{n}<2$ のとき不足数といいます. 素数 p に対して $\frac{d(p)}{p}=1+\frac{1}{p}$ なので, 大きな素数をとれば $\frac{s(p)}{p}$ を 1 より大きいけどいくらでも 1 に近い値にできます. $\frac{s(n)}{n}$ はどのぐらい大きくなるのでしょう. 3.2 節の定理より, 正の有理数 r を異なる単位分数の和で表しておきます. そこに現れた分母の最小公倍数を n とおくと, 各単位分数の分母は n の約数です. n の約数を分母とする単位分数の和が $\frac{s(n)}{n}$ に等しいので, $\frac{s(n)}{n}\geq r$ を得ます. 例えば $2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ に対して, 分母の最小公倍数 12 に対して $\frac{s(12)}{12}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=2$ が成り立つ. 従って $\frac{s(n)}{n}$ がいくらでも大きな値になるような過剰数 n が取れます.

3.4 $\frac{s(n)}{n}$ はいくらでも大きな値を取りうるのですが, §1 と同じ疑問が生じます. 大きくなっていく様子を調べたい. 単に $\frac{s(n)}{n}$ を表にしただけでは, 素数のところで急激に値が小さくなったり観察が難しくなります. そこで m より小さいすべての自然数 n に対して $\frac{s(m)}{m}>\frac{d(n)}{n}$ となる m について調べれば, 値にばらつきのある $\frac{s(n)}{n}$ の上端を辿って大きくなっていく度合いを調べることができます. この様な自然数 m を超過剰数といいます. 非常に難しい話に入ってしまいました. 定理を引用します.

[**定理**] **(Grónwall, 1913)** 超過剰数 m について, $m\to\infty$ とするとき $\frac{s(m)}{m\log\log m}\to e^{\gamma}$ が成り立つ.

[**定理**] **(Ramanujan, 1915)** Riemann 予想を認めると, すべての n で $\frac{s(n)}{n\log\log n}\leq e^{\gamma}$ が成り立つ.

[**定理**] **(Robin, 1984)** すべての n について $\frac{s(n)}{n\log\log n}\leq e^{\gamma}$ であることと Riemann 予想は同値である.

3.5 最後に正の実数を単位分数の和で表すことを考えてみましょう. 有限個の単位分数の和は通分して計算すると有理数になります. 無理数を有限個の単位分数の和では表せないので, 無限個の和, つまり単位分数からなる級数を考えることになります. この級数は調和級数の一部分なので部分列と呼ばれます.

[**定理**] 任意の正の実数に対して, その数に収束する調和級数の部分列が存在する.

§4 まとめ

ただただ収束しない級数の例として出会うだけのことの多い調和級数ですが, 面白いことがたくさんあります. 意外に思うかもしれませんが, 授業などで習ったことから少し踏み込むだけで, 誰も知らない数学の世界の広がりに出会うことができます. 数学の楽しさは, 頑張って解いたときのある種の爽快感だけではありません. 未知のものに出会い創り出すことが数学の研究の楽しさです. §1 では知識として知っている調和級数が発散について, その挙動 (大きくなっていく様子) を観察しました. §2 では Euler の定理を軸に, 整数論が新しい概念 (解析学) に出会うことで, 新しい整数論が誕生する様子を垣間見ました. §3 は話を端折ってしまったので, 何のことやらわからないかもしれませんが, 素朴な観察 ($1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$) から素朴な疑問 (任意の正の数を単位分数で表す) を提起し, それを定式化する試みについて話しました.